ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME LXXVI — ANNÉE 1959

(95e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SEIZIÈME — ANNÉE 1959

FASCICULE N° 1

(JANVIER A MARS)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

(Ce recueil paraît tous les trois mois.)

ÉDITIONS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

I. — *PUBLICATIONS PÉRIODIQUES*

LE BULLETIN SIGNALÉTIQUE

ABONNEMENT ANNUEL
(Y compris la table des auteurs)

	France.	Étranger
PREMIÈRE PARTIE. — *Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences de l'Ingénieur* ..	10 000 F	12 000 F
DEUXIÈME PARTIE. — *Biologie, Physiologie, Zoologie, Agriculture*	10 000 F	12 000 F

Des Tirés à part sont également mis en vente par abonnement.

Pour tous renseignements s'adresser au
CENTRE DE DOCUMENTATION du C. N. R. S.
16, rue Pierre-Curie, PARIS-V^e^ — Tél. : DANton 87-20
C. C. P. Paris 9131-62

II. — *OUVRAGES*

ALLOITEAU (J.). — *Contribution à la systématique des Madréporaires Fossiles.*
Ouvrage relié au format 21-27, comprenant :

un volume de textes de 464 pages..... 4 500 F
— de planches de 107 pages..... 4 700 F

LEXIQUE STRATIGRAPHIQUE INTERNATIONAL réalisé en 7 volumes et plus de 125 fascicules.
Demander les renseignements spéciaux aux Éditions du C. N. R. S., 13, quai A.-France, Paris-7^e^

NAHMIAS. — *Le neutrino*..... 240 F

GRIVET. — *La résonance paramagnétique nucléaire* ..... 1 800 F

TERROINE. — *La Synthèse protéique*..... 3 200 F

ROSE & TREGOUBOFF. — *Manuel de Planctonologie méditerranéenne.*
Ouvrage format 21-27 relié, comprenant :

un volume de textes de 592 pages.....
— d'illustrations de 225 pages..... } 7 500 F

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SEIZIÈME — ANNÉE 1959

(95e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—

1959

© by Gauthier-Villars, 1959.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

STRUCTURE DES GROUPES LIBRES

PAR Mlle SOPHIE PICCARD.

Introduction.

Soit G un groupe multiplicatif engendré par un ensemble A d'éléments dont aucun ne peut être obtenu par composition finie des autres. L'ensemble A ne contient donc pas l'élément neutre 1 du groupe G et ne peut contenir qu'un seul de deux éléments x, x^{-1}, quel que soit $x \in G$, Tout élément de G peut être obtenu par composition finie d'éléments de A(1). Soit $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ une composition finie quelconque d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (en nombre fini k) de A, C'est un produit de puissances finies des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pris dans un ordre quelconque, un même élément a_i pouvant contribuer à former divers facteurs du produit. On dit que la composition f est *réduite* si l'on y a remplacé partout le produit de deux facteurs consécutifs (s'il y en avait) du type $a_i^m a_i^n$, où i est un nombre quelconque de la suite 1, 2, ..., k et m et n sont deux entiers quelconques, par a_i^{m+n}, dans le cas où $m+n \neq 0$, ou par 1, lorsque $m+n=0$, et si l'on a laissé tomber tous les facteurs égaux à 1, pour autant que la composition envisagée entière ne se réduit pas identiquement à 1, auquel cas on dira que 1 est sa forme réduite. D'après cette définition, toute composition finie réduite $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de A, pour autant qu'elle n'est pas identiquement égale à 1 (l'élément neutre de G), est de la forme $a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \ldots a_{i_r}^{j_r}$, où $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ sont des éléments (pas nécessairement distincts) de l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ tels que $a_{i_t} \neq a_{i_{t+1}} (t = 1, 2, \ldots, k-1)$

(1) Et de leurs inverses, sous-entendu.

et $j_1, j_2, \ldots, j_r$ sont des entiers non nuls quelconques (positifs ou négatifs). Soient $a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \ldots a_{i_r}^{j_r}$ et $a_{k_1}^{l_1} a_{k_2}^{l_2} \ldots a_{k_s}^{l_s}$ deux compositions finies réduites d'éléments de A qui ne se réduisent pas identiquement à 1. Ces compositions sont distinctes si $s \neq r$ ou si $s = r$ mais si, soit $a_{i_t} \neq a_{k_t}$, pour une valeur au moins de l'indice $t = 1, 2, \ldots, r$, soit $a_{i_t} = a_{k_t} (t = 1, 2, \ldots, r)$ mais $j_t \neq l_t$ pour une valeur au moins de l'indice $t = 1, 2, \ldots, r$.

Si le groupe G n'est pas libre, les éléments de tout système générateur A sont liés par un certain nombre de relations non triviales (qui ne découlent pas des axiomes de groupe) de la forme $f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$ où $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ est une composition finie réduite d'éléments de A qui ne se réduit pas identiquement à 1. Toute relation de cette nature implique l'égalité entre deux compositions finies réduites distinctes d'éléments de A.

Si le groupe G est libre, il possède des systèmes d'éléments générateurs qui ne sont liés par aucune relation non triviale et si A est un tel système d'éléments générateurs du groupe libre G, chaque élément de G peut se mettre de façon unique sous la forme d'une composition finie réduite d'éléments de A. Les éléments d'un système générateur A d'un groupe libre qui ne sont liés par aucune relation non triviale sont appelés des *éléments libres* du groupe G. Tous les éléments de G ne sont pas libres. Ainsi, par exemple, 1 n'est pas libre. Tout groupe libre possède aussi bien des éléments libres que des éléments non libres et il est, comme on sait, le produit libre des groupes cycliques engendrés par les éléments d'un quelconque de ses systèmes générateurs formé d'éléments libres.

Soit c un élément $\neq 1$ quelconque d'un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments libres et soit

$$(\uparrow) \qquad a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \ldots a_{i_r}^{j_r}$$

la composition finie réduite d'éléments de A qui le représente. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les divers éléments de A (en nombre fini) qui figurent dans cette composition et soit n_i le degré de $(\uparrow)$ par rapport à $a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. Nous dirons que n_i est *le degré* de l'élément c par rapport à l'élément a_i de l'ensemble A $(i = 1, 2, \ldots, k)$ et nous dirons que c est de degré nul par rapport à tout élément de l'ensemble $A - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Comme $(\uparrow)$ est l'unique composition finie réduite d'éléments de A qui représente l'élément c de G, on voit que quel que soit l'ensemble A d'éléments générateurs libres d'un groupe libre G, tout élément de G possède un degré bien défini par rapport à tout élément de l'ensemble A.

Il est à noter que les groupes libres ne sont pas les seuls à jouir de cette propriété. Tout groupe G défini par un système A d'éléments générateurs liés par un ensemble de relations fondamentales non triviales dont chacune est de degré zéro par rapport à chacun des éléments de A jouit de cette propriété que bien que deux compositions réduites distinctes peuvent représenter un

même élément de G, deux telles compositions sont toujours du même degré par rapport à chaque élément de A.

Loi de composition des éléments d'un groupe libre.

Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres, soient a et b deux éléments quelconques de G. Chacun des éléments a, b possède une expression unique par une composition finie réduite d'éléments de A. Soit

$$a = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_r}^{j_r} \quad \text{et} \quad b = a_{k_1}^{l_1} a_{k_2}^{l_2} \dots a_{k_s}^{l_s}$$

ces expressions et soit $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ l'ensemble (fini) d'éléments de A qui figurent dans les expressions de a et de b. Soit m_i le degré de a et n_i le degré de b par rapport à $a_i (i = 1, 2, \dots, k)$; a aussi bien que b est de degré nul par rapport à tout élément de l'ensemble $A - \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Le produit ab peut à son tour, être exprimé de façon unique par une composition finie réduite des éléments $a_1, a_2, \dots a_k$. Cette expression est la suivante.

Si $i_r \neq k_1$,

$$ab = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_r}^{j_r} a_{k_1}^{l_1} a_{k_2}^{l_2} \dots a_{k_s}^{l_s}.$$

Et si $i_r = k_1$, soit h le plus grand entier $\geqq 0$, tel que $a_{i_{r-h}} = a_{k_{1+h}}$ et que $a_{i_{r-t}}^{j_{r-t}} = a_{k_{1+t}}^{-l_{1+t}} (t = 0, 1, \dots, h-1)$ si $h > 0$.

Alors si $j_{r-h} \neq -l_{1+h}$, on a

$$ab = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_{r-h-1}}^{j_{r-h-1}} a_{i_{r-h}}^{j_{r-h}+l_{1+h}} a_{k_{2+h}}^{l_{2+h}} \dots a_{k_s}^{l_s}.$$

Et si $j_{r-h} = -l_{1+h}$, on a

$$ab = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_{r-h-1}}^{j_{r-h-1}} a_{k_{2+h}}^{l_{2+h}} \dots a_{k_s}^{l_s}.$$

Il s'ensuit que ab est de degré $m_i + n_i$ par rapport à $a_i (i = 1, 2, \dots, k)$ et que ab est de degré nul par rapport à tout élément de l'ensemble $A - \{a_1, a_2 \dots, a_k\}$. Par conséquent, le degré du produit de deux éléments quelconques a et b de G par rapport à un élément quelconque d'un système A de générateurs libres est égal à la somme des degrés de a et de b par rapport au même élément de A.

Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments libres. Nous allons répartir les éléments de G d'une infinité de façons en classes d'équivalence dont chacune contient, avec tout élément a de G la classe entière des éléments de G conjugués à a, nous donnerons une loi commutative de composition de ces classes qui permet d'associer à tout groupe libre une infinité de groupes abéliens $\Gamma^{(n)}$ dont les éléments sont des classes d'équivalence d'éléments de G. Nous montrerons que quel que soit le sous-groupe γ d'un groupe $\Gamma^{(n)}$, la réunion des classes d'équivalence d'éléments de G qui constituent les éléments de ce groupe γ est un sous-groupe invariant de G. Nous utiliserons les groupes $\Gamma^{(n)}$

pour étudier la structure des groupes libres. Ces considérations permettent d'établir l'existence d'une infinité de sous-groupes invariants dans tout groupe libre, elles facilitent la recherche des éléments libres des groupes libres, elles permettent d'établir de nombreux théorèmes relatifs à la structure des groupes libres, quelle que soit la puissance de l'ensemble A des générateurs libres. Les classes d'équivalence en lesquelles on répartit, d'une infinité de façons, les éléments de tout groupe libre ont un caractère intrinsèque, indépendant du système générateur A qui sert à les définir. Quel que soit le sous-groupe g du groupe libre G, deux classes d'équivalences quelconques d'éléments de G qui contiennent des éléments de g ont en commun avec g des ensembles d'égale puissance.

Appelons *base* d'un groupe libre G tout système générateur de G formé d'éléments libres. Un groupe cyclique libre, composé des puissances entières d'un élément libre a ne possède, comme on sait, que deux bases : a et a^{-1} qui sont ses seuls éléments libres. Tout groupe libre non cyclique possède, comme on sait, une infinité de bases. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que quelle que soit la base A d'un tel groupe G et quels que soient deux éléments distincts a_1 et a_2 de A, on déduit de A une nouvelle base en remplaçant a_2 par $a_1^m a_2 a_1^n$, quels que soient les entiers m et n. Si le groupe G est engendré par un ensemble infini A de puissance $\mathfrak{m}$ d'éléments générateurs libres, il possède un ensemble de puissance supérieure à $\mathfrak{m}$ de bases. En effet, quel que soit le sous-ensemble non vide A^* de A, remplaçons dans A chaque élément de A^* par son inverse. Le système obtenu est, comme on sait, une base de G et à deux sous-ensembles distincts A^* et A^{**} de A correspondent deux bases différentes. Et comme l'ensemble de tous les sous-ensembles de A est de puissance $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$, G possède bien un ensemble de puissance $> \mathfrak{m}$ (donc en tout cas indénombrable) de systèmes générateurs dont tous les éléments sont libres.

Tout élément $\neq 1$ d'un groupe libre est, comme on sait, d'ordre infini.

Si un groupe libre est engendré par un système fini de k éléments libres, le groupe G ne saurait, comme on sait, être engendré par moins de k éléments et tout système comprenant k éléments, générateur de G, est formé d'éléments libres. Le nombre k est alors appelé le *rang* du groupe libre G.

Systèmes irréductibles d'éléments générateurs d'un groupe.

Définition. — *Soit G un groupe engendré par un ensemble A (fini ou infini) d'éléments générateurs. Nous disons que l'ensemble de générateurs A est* irréductible *si, quel que soit le sous-ensemble fini A^* de A, il n'existe aucun sous-ensemble fini B de G formé d'un nombre d'éléments inférieur à celui de A^* et tel que tout élément de A^* puisse être obtenu par composition finie d'éléments de B.*

Toute base d'un groupe libre est irréductible. — En effet, soit G un groupe

libre et soit A l'une quelconque de ses bases. Supposons qu'elle soit réductible et soit A^* un sous-ensemble fini formé de k éléments de G pour lequel il existe un ensemble B formé de $k' < k$ éléments de G et tel que tout élément de A^* puisse être obtenu par composition finie d'éléments de B. Soit G^* le groupe libre engendré par les k éléments de l'ensemble A^* qui en forment une base. Comme tout élément de A^* s'obtient par composition finie d'éléments de B, B est à son tour un système générateur de G^*, ce qui est impossible, d'après les propriétés connues des groupes libres, puisque $k' < k$. On voit donc bien que la base A est irréductible.

Nous allons d'abord traiter le cas où l'ensemble A est fini, puis nous passerons au cas où l'ensemble A est infini, de puissance quelconque, et enfin nous signalerons diverses généralisations des méthodes exposées qui se prêtent également à l'étude de la structure des groupes libres.

Les groupes libres de rang fini.

I. Soit G un groupe multiplicatif libre engendré par un nombre fini k d'éléments générateurs $a_1, a_2, \ldots, a_k$ qui ne sont liés par aucune relation non triviale. Les seules relations satisfaites par ces éléments générateurs sont des relations triviales qui dérivent des axiomes de groupes, telles que les relations

$$a_i a_i^{-1} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

ainsi que les relations identiques de la forme

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = f(a_1, a_2, \ldots, a_k),$$

où f est une composition finie quelconque des éléments de l'ensemble

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Les classes $\mathrm{M}^{(n)}$. — Soit n un entier quelconque $\geqq 2$. Répartissons les éléments de G en n^k classes $\mathrm{M}^{(n)}$ comme suit. Soit a un élément quelconque de G. Il peut être obtenu par composition finie des éléments de A. Soit $a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, où f est une composition finie réduite des éléments de A. Comme G est un groupe libre dont l'ensemble A est une base, la composition réduite des éléments de cette base qui représente l'élément a est *unique*. Soit u_i le degré de f par rapport à a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$; u_i est aussi le degré de l'élément a de G par rapport à l'élément a_i de la base A. Soit λ_i le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$, tel que $u_i \equiv \lambda_i \pmod{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Nous disons que l'élément a fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$. Quels que soient les k nombres (distincts ou non, peu importe) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de la suite $0, 1, \ldots, n-1$, la classe $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ n'est pas vide. Elle contient, entre autres, les éléments $a_1^{\lambda_1 + t_1 n} a_2^{\lambda_2 + t_2 n} \ldots a_k^{\lambda_k + t_k n}$ de G, quels que soient les entiers $t_1, t_2, \ldots, t_k$, et elle contient avec tout élément $a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de G la classe entière des éléments de G conjugués à a.

En effet, quel que soit l'élément b de G, b peut être obtenu par composition finie d'éléments de A. Soit $b = g(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. D'après la loi de composition des éléments d'un groupe libre, les deux éléments a et bab^{-1} sont de même degré par rapport à a_i, quel que soit $i = 1, 2, \ldots k$, Tout élément de G appartient à une classe $\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ et à une seule puisque tout élément de G peut se mettre de façon unique sous la forme d'une composition finie réduite d'éléments de A et le groupe G est la réunion de toutes les classes $\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ qui sont disjointes deux à deux.

Loi de composition des classes $\mathbf{M}^{(n)}$. — Soient $\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ et $\mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$ deux classes $\mathbf{M}^{(n)}$ quelconques. Nous appelons *produit* de ces classes et nous désignons par le symbole $\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} \mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$ l'ensemble des éléments de G de la forme ab,

$$a \in \mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}, \qquad b \in \mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}.$$

Proposition 1. — *Quelles que soient les deux classes* $\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ *et* $\mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$, *on a*

$$\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} \mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} = \mathbf{M}^{(n)}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k}$$

où ν_i *est le nombre de la suite* $0, 1, \ldots, n-1$ *qui satisfait la congruence*

$$\nu_i \equiv \lambda_i + \mu_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Démonstration. — Soit a un élément quelconque de la classe $\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ et soit b un élément quelconque de la classe $\mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$. Soit u_i le degré de a par rapport à a_i et soit v_i celui de b par rapport à $a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. D'après la loi de composition des éléments d'un groupe libre, ab est de degré $u_i + v_i$ par rapport à a_i, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$. Soit ν_i le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui satisfait la congruence $\nu_i \equiv u_i + v_i \pmod{n}$. Comme $a \in \mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$, on a

$$u_i \equiv \lambda_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et comme $b \in \mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$, on a

$$v_i \equiv \mu_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Donc

$$\nu_i \equiv \lambda_i + \mu_i \pmod{n}$$

et, d'après ce qui précède,

$$ab \in \mathbf{M}^{(n)}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k}.$$

Cela étant, quels que soient les éléments a de $\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ et b de $\mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$, on a l'inclusion

$$(\dagger) \qquad \mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} \mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \subset \mathbf{M}^{(n)}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k}.$$

Montrons qu'on a aussi l'inclusion inverse. A cet effet, nous prouverons que pour tout élément fixe a de la classe $\mathbf{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ et pour tout élément c de la classe $\mathbf{M}^{(n)}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k}$ il existe un élément b de la classe $\mathbf{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$, tel que $ab = c$. En effet,

comme G est un groupe dont a et c sont deux éléments, l'équation $ax = c$ admet une solution en G, notamment l'élément $b = a^{-1}c$. Soit $u_i(w_i)$ le degré de l'élément $a(c)$ par rapport à $a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. On a

$$u_i \equiv \lambda_i \pmod{n} \qquad \text{et} \qquad w_i \equiv \nu_i \pmod{n}.$$

L'élément a^{-1} de G est de degré $-u_i$ par rapport à $a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ et, par suite, il fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(n)}_{n-\lambda_1, n-\lambda_2, \ldots, n-\lambda_k}$, donc, d'après la première partie de la démonstration, $b \in \mathrm{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$. On a donc aussi l'inclusion

$$(++) \qquad \mathrm{M}^{(n)}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k} \subset \mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} \mathrm{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}.$$

Des deux inclusions $(+)$ et $(++)$ découle l'égalité à démontrer.

Proposition 2. — *Deux classes* $\mathrm{M}^{(n)}$ *quelconques sont des ensembles d'égale puissance.*

Démonstration. — Soient $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ et $\mathrm{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$ deux classes $\mathrm{M}^{(n)}$ quelconques. Soit ν_i le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui satisfait la congruence

$$\nu_i \equiv \mu_i - \lambda_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots k),$$

et soit c un élément quelconque de la classe $\mathrm{M}^{(n)}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k}$ et d un élément quelconque de la classe $\mathrm{M}^{(n)}_{n-\nu_1, n-\nu_2, \ldots, n-\nu_k}$. Quels que soient l'ensemble E d'éléments de G et l'élément x de G, désignons par le symbole Ex l'ensemble des éléments yx de G, $y \in E$. Il ressort de la démonstration de la proposition 1 qu'on a les deux inclusions

$$\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} c \subset \mathrm{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} d \subset \mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k},$$

inclusions qui démontrent que les deux ensembles $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_1 \ldots \lambda_k}$ et $\mathrm{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_1 \ldots \mu_k}$ sont bien d'égale puissance. Donc toutes les classes $\mathrm{M}^{(n)}$ sont des ensembles d'égale puissance. C. Q. F. D.

Les groupes abéliens $\Gamma^{(n)}$ associés au groupe libre G [2]. — Avec la loi de composition indiquée plus haut, loi qui est commutative et associative, les classes $\mathrm{M}^{(n)}$ forment *un groupe abélien* $\Gamma^{(n)}$ *associé au groupe* G. La classe $\mathrm{M}^{(n)}_{00\ldots0}$ constitue l'élément neutre de ce groupe et l'inverse d'une classe $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ est la classe $\mathrm{M}^{(n)}_{n-\lambda_1, n-\lambda_2, \ldots, n-\lambda_k}$.

Proposition 3. — *Quels que soient les nombres* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *de la suite* $0, 1, \ldots, n-1$ *la classse* $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ *envisagée comme élément du groupe* $\Gamma^{(n)}$ *est d'ordre* $\frac{n}{d}$, *où* d *est le p. g. c. d. des nombres* $n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. *En effet, soit* m

---

[2] On peut associer de la même façon un groupe abélien $\Gamma^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ à tout groupe non libre G engendré par un ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'éléments générateurs et dont chaque élément possède un degré fixe par rapport à tout élément de A et les propriétés de $\Gamma^{(n)}$ que nous établissons pour les groupes libres subsistent pour de tels groupes non libres.

l'ordre de cette classe et soit ν_i *le nombre de la suite* $0, 1, \ldots, n-1$ *qui satisfait la congruence*

$$\nu_i \equiv \frac{n}{d}\lambda_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

D'après la loi de composition des classes $M^{(n)}$, on a

$$(M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k})^{\frac{n}{d}} = M^{(n)}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k}.$$

Et comme $\frac{n}{d}\lambda_i \equiv 0 \pmod{n}$, il s'ensuit que

$$\nu_i \equiv 0 \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Donc $(M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k})^{\frac{n}{d}} \equiv M^{(n)}_{00\ldots0}$ et par suite, $\frac{n}{d}$ est un multiple de m. Montrons que $m = \frac{n}{d}$. En effet, supposons que $m < \frac{n}{d}$ et soit $\frac{n}{d} = n'm\,(n' > 1)$. Comme m est l'ordre de $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$, on doit avoir $m\lambda_i \equiv 0 \pmod{n}$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$ et, par suite, λ_i doit être un multiple de $\frac{n}{m}\,(i = 1, 2, \ldots, k)$. Or $\frac{n}{m} = n'd$ et, par conséquent, le p. g. c. d. des nombres $n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ serait $\geq n'd > d$ ce qui est contradictoire, Donc $m = \frac{n}{d}$. C. Q. F. D.

Proposition 4. — *Le nombre minimum d'éléments générateurs du groupe* $\Gamma^{(n)}$ *est égal à* k.

Démonstration. — En effet, l'ordre de toute classe $M^{(n)}$ est un diviseur de n, il n'est donc pas supérieur à n. Et comme $\Gamma^{(n)}$ est un groupe abélien d'ordre n^k, le groupe $\Gamma^{(n)}$ ne saurait être engendré par moins de k éléments. D'autre part, il possède des systèmes de k éléments générateurs. Tel est, par exemple, le système formé des k classes $M_{10\ldots0}$, $M_{010\ldots0}$, $M_{00\ldots01}$. Le nombre minimum d'éléments générateurs du groupe $\Gamma^{(n)}$ est donc bien égal à k.

C. Q. F. D.

Classes $M^{(n)}$ indépendantes et dépendantes. — Soient $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}\,(i = 1, 2, \ldots, t)\, t \geq 1$ classes $M^{(n)}$. Nous disons que ces classes sont indépendantes si l'égalité

$$(1) \qquad \left[M^{(n)}_{\lambda_1^1 \lambda_2^1 \ldots \lambda_k^1}\right]^{\alpha_1} \left[M^{(n)}_{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_k^2}\right]^{\alpha_2} \ldots \left[M^{(n)}_{\lambda_1^t \lambda_2^t \ldots \lambda_k^t}\right]^{\alpha_t} = M^{(n)}_{00\ldots0},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ sont des entiers, implique que $\alpha_i \equiv 0 \pmod{n}$ quel que soit $i = 1, 2, \ldots, t$, et nous disons que les classes $M^{(n)}$ envisagées sont dépendantes ou liées s'il existe un système d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ dont l'un au moins n'est pas congru à 0 modulo n et pour lequel l'égalité (1) a lieu.

Proposition 5. — *Soient* $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}\,(i = 1, 2, \ldots, t,\ 1 \leq t \leq k)$ t *classes* $M^{(n)}$.

Si ces classes sont indépendantes, le rang de la matrice

$$\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^t\\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^t\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_k^1 & \lambda_k^2 & \dots & \lambda_k^t\end{pmatrix}$$

est égal à t.

Démonstration. — Si les t classes considérées sont indépendantes, l'égalité (I), où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ désignent des entiers, implique que $\alpha_i \equiv 0 \pmod n$, quel que soit $i=1, 2, \dots, t$. Or, d'après la loi de composition des classes $M^{(n)}$ et d'après l'égalité (I), $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ doivent satisfaire le système d'équations linéaires

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_1\lambda_1^1+\alpha_2\lambda_1^2+\dots+\alpha_t\lambda_1^t=\tau_1 n,\\ \alpha_1\lambda_2^1+\alpha_2\lambda_2^2+\dots+\alpha_t\lambda_2^t=\tau_2 n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1\lambda_k^1+\alpha_2\lambda_k^2+\dots+\alpha_t\lambda_k^t=\tau_k n, \end{cases}$$

où $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ sont des entiers.

C'est un système de k équations à $t \leq k$ inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ et comme ce système n'admet que des solutions dans lesquelles toutes les inconnues sont des multiples de n, il s'ensuit que le rang du système (1) est nécessairement égal à t.

En effet, supposons le contraire et soit $r<t$ le rang du système considéré.

Supposons pour fixer les idées que le déterminant principal de ce système est

$$\delta=\begin{vmatrix}\lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^r\\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^r\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_r^1 & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^r\end{vmatrix}.$$

Il y a alors des inconnues et des équations non principales

Posons

$$\tau_1=\tau_2=\dots=\tau_k=0.$$

Le système (1) est alors homogène, il est possible et admet une infinité de solutions. On peut attribuer à $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_t$ des valeurs arbitraires. Montrons qu'il existe des valeurs entières de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ qui ne sont pas toutes $\equiv 0 \pmod n$, et qui constituent une solution du système envisagé. En effet, résolvons le système des équations principales par la règle de Cramer par rapport aux inconnues principales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Désignons par δ_{r+s}^j le déterminant qui se déduit de δ en y remplaçant la colonne de rang $j (j=1, 2, \dots, r)$ par

$$\begin{cases}\lambda_1^{r+s}\\ \lambda_2^{r+s}\\ \dots\\ \lambda_r^{r+s}\end{cases}\qquad (s=1, 2, \dots, t-r).$$

Il vient

$$\alpha_j = -\frac{\alpha_{r+1}\delta^j_{r+1} + \alpha_{r+2}\delta^j_{r+2} + \ldots + \alpha_t\delta^j_t}{\delta} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Si $\delta \not\equiv 0 \pmod{n}$ posons

$$\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_t = \delta.$$

On aura des valeurs entières de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ qui ne sont pas toutes $\equiv 0 \pmod{n}$.

Et si $\delta \equiv 0 \pmod{n}$, soit n^m la plus grande puissance de n qui est diviseur de δ. Si tous les déterminants δ^j_{r+s} sont des multiples de n^m et si

$$\delta = n^m \delta', \qquad \delta' \not\equiv 0 \pmod{n},$$

posons

$$\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_t = \delta'.$$

On aura de nouveau une solution $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ du système considéré dans laquelle toutes les inconnues prennent des valeurs entières dont l'une au moins n'est pas $\equiv 0 \pmod{n}$.

Et si $\delta \equiv 0 \pmod{n}$ et $\delta = n^m \delta'$, où $\delta' \not\equiv 0 \pmod{n}$, mais si l'un au moins des déterminants δ^j_{r+s} n'est pas $\equiv 0 \pmod{n^m}$, soit $n^{m'}\delta''\,[m' < m,\ \delta'' \not\equiv 0 \pmod{n}]$ le p. g. c. d. de δ et de tous les déterminants δ^j_{r+s} et soit $\delta^j_{r+s'} \not\equiv 0 \pmod{n^{m'+1}}$. Posons, dans ce cas

$$\alpha_{r+s'} = n^{m-m'}\frac{\delta'}{\delta''}, \qquad \alpha_{r+s} = 0 \qquad (s \neq s').$$

On obtiendra ainsi une solution entière en $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ du système d'équations considéré, solution dans laquelle l'un au moins des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ n'est pas $\equiv 0 \pmod{n}$.

Donc, dans tous les cas, on est conduit à une contradiction.

Le raisonnement est tout à fait analogue et la conclusion subsiste quelles que soient les lignes et les colonnes de la matrice λ qui contribuent à former le déterminant principal δ d'ordre r du système considéré.

La condition énoncée est donc bien nécessaire.

C. Q. F. D.

Proposition 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour que k classes $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda^i_1\lambda^i_2\ldots\lambda^i_k}(i = 1, 2, \ldots, k)$ soient indépendantes, c'est que le p. c. g. d. de n et du déterminant $|\lambda^i_j|$ soit égal à 1.*

Démonstration. — La condition est nécessaire. — En effet, supposons que les k classes $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda^i_1\lambda^i_2\ldots\lambda^i_k}$ sont indépendantes. Alors, d'après la proposition 5, le déterminant d'ordre k : $\delta = |\lambda^i_j|$ est $\not\equiv 0$.

Si donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des entiers tels que

$$(2) \qquad \left[\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda^1_1\lambda^1_2\ldots\lambda^1_k}\right]^{\alpha_1}\left[\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda^2_1\lambda^2_2\ldots\lambda^2_k}\right]^{\alpha_2}\ldots\left[\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda^k_1\lambda^k_2\ldots\lambda^k_k}\right]^{\alpha_k} = \mathrm{M}^{(n)}_{00\ldots0},$$

chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ est $\equiv 0 \pmod{n}$ et, d'après la loi de compo-

sition des classes $M^{(n)}$ et l'égalité (2), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont racines du système d'équations linéaires

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha_1\lambda_1^1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \ldots + \alpha_k\lambda_1^k = \tau_1 n, \\ \alpha_1\lambda_2^1 + \alpha_2\lambda_2^2 + \ldots + \alpha_k\lambda_2^k = \tau_2 n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1\lambda_k^1 + \alpha_2\lambda_k^2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k^k = \tau_k n, \end{cases}$$

où $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ désignent des entiers.

Comme le rang de ce système est égal à k, c'est un système régulier qui peut être résolu par la règle de Cramer. Désignons par δ_i le déterminant qui se déduit de δ en remplaçant sa $i^{\text{ième}}$ colonne par $\begin{cases} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \cdots \\ \tau_k \end{cases}$. On a

$$\alpha_i = n\frac{\delta_i}{\delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Soit d le p. g. c. d. de n et de δ et soit Λ_j^i le coefficient de λ_j^i dans le développement du déterminant δ.

Deux cas peuvent se présenter :

a. Il existe un coefficient Λ_j^i (au moins) qui n'est pas un multiple de d. Posons alors

$$\tau_j = \frac{\delta}{d}, \qquad \tau_{j'} = 0$$

quel que soit l'indice $j' \neq j$ de la suite 1, 2, ..., k. On obtient pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les valeurs

$$\alpha_1 = \frac{n}{d}\Lambda_j^1, \qquad \alpha_2 = \frac{n}{d}\Lambda_j^2, \qquad \ldots \qquad \alpha_k = \frac{n}{d}\Lambda_j^k$$

et comme Λ_j^i n'est pas un multiple de d, $\alpha_i \not\equiv 0 \pmod{n}$, ce qui est contradictoire, les classes $M^{(n)}$ considérées, étant, par hypothèse, indépendantes.

b. Tous les coefficients Λ_j^i sont des multiples de d. Soit p le plus petit diviseur premier de d. Il est alors aussi diviseur de tous les Λ_j^i. Soit p^m la plus grande puissance de p commune à tous les Λ_j^i ($m \geq 1$). Il existe donc un coefficient (au moins) Λ_j^i qui n'est pas divisible par p^{m+1}. Considérons le déterminant $\Delta = |\Lambda_j^i|$ adjoint de δ. Comme chaque élément de Δ est divisible par p^m, le déterminant Δ qui est d'ordre k est divisible par p^{mk}. Or Δ est lié à son adjoint δ par l'égalité $\Delta = \delta^{k-1}$. Donc δ^{k-1} est à son tour divisible par p^{mk}. Et comme les nombres k et $k-1$ sont premiers entre eux et que p est un nombre premier ≥ 2, il s'ensuit que $m \equiv 0 \pmod{k-1}$. Soit $m = m'(k-1)$, $(m' \geq 1)$. Le déterminant δ est donc divisible par $p^{m'k} = p^{m+m'}$.

Posons dans ce cas

$$\tau_j = \frac{\delta}{p^{m+1}}, \qquad \tau_{j'} = 0,\ j' = 1, 2, \ldots, k, \text{ mais } j' \neq j.$$

Il vient

$$\alpha_1 = \frac{n}{p}\frac{\Lambda_j^1}{p^m}, \qquad \ldots \qquad \alpha_i = \frac{n}{p}\frac{\Lambda_j^i}{p^m}, \qquad \ldots \qquad \alpha_k = \frac{n}{p}\frac{\Lambda_j^k}{p^m},$$

ce qui fournit un système de valeurs entières de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ dont l'une au moins $\alpha_i \not\equiv 0 \pmod{n}$ et qui satisfont la relation (2), ce qui est contradictoire. On ne saurait donc avoir $d > 1$ et la condition énoncée est bien nécessaire.

La condition est suffisante. — En effet, supposons que le p. g. c. d. de n et du déterminant $\delta = |\lambda_j^i|$ est égal à 1. Montrons que les classes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ sont alors indépendantes. En effet, comme $D(n, \delta) = 1$, on a $\delta \not\equiv 0$ et par suite, le système (3) d'équations linéaires en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, où $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ désignent des entiers, est un système régulier dont la solution est donnée par la règle de Cramer. On a notamment

$$(4) \qquad \alpha_i = n\frac{\tau_1\Lambda_1^i + \tau_2\Lambda_2^i + \ldots + \tau_k\Lambda_k^i}{\delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Soit a le plus grand commun diviseur de δ et de tous les coefficients Λ_j^i. Pour avoir une solution entière en α_i du système d'équations (3) il convient de choisir les nombres $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ de façon que

$$(5) \qquad \tau_1\Lambda_1^i + \tau_2\Lambda_2^i + \ldots + \tau_k\Lambda_k^i \equiv 0 \pmod{\delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

On obtient, par exemple, une telle solution en posant

$$\tau_j = \frac{\delta}{a} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Mais comme n et δ sont premiers entre eux, il découle des formules (4) que toute solution entière en α_i du système (3) fournit pour toutes les inconnues du système des valeurs $\equiv 0 \pmod{n}$, donc les classes $M^{(n)}$ sont indépendantes et la condition énoncée est bien suffisante.

C. Q. F. D.

Remarque 1. — On démontre sans peine que la condition nécessaire et suffisante pour que t classes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} (i = 1, 2, \ldots, t,\ 1 \leq t \leq k)$ soient dépendantes, c'est que le p. g. c. d. de n et de tous les déterminants d'ordre t qu'on peut former à partir de la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^t \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_k^1 & \lambda_k^2 & \ldots & \lambda_k^t \end{pmatrix},$$

en prenant les éléments communs à ses t colonnes et à t lignes quelconques, soit > 1. La démonstration de cette proposition est tout à fait analogue à celle de la proposition 7 de notre Note (*Un problème de structure des groupes d'ordre fini*) (3).

(3) *J. Math. pures et appl.*, t. 35, 1956, p. 149 à 155.

PROPOSITION 7. — *Quel que soit l'entier $t > k$, t classes $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ sont toujours dépendantes.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des classes $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} (i = 1, 2, \ldots, t)$. Pour établir la proposition 7, nous montrerons qu'il existe t entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, dont l'un au moins n'est pas un multiple de n, et tels qu'on a l'égalité

$$(\mathrm{I}) \qquad \left[\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1^1 \lambda_2^1 \ldots \lambda_k^1}\right]^{\alpha_1} \left[\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_k^2}\right]^{\alpha_2} \ldots \left[\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1^t \lambda_2^t \ldots \lambda_k^t}\right]^{\alpha_t} = \mathrm{M}^{(n)}_{00\ldots0}.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, t entiers, qui vérifient l'égalité (I). Cette égalité implique le système de k équations à t inconnues (1), où $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ désignent des entiers (*voir* proposition 5).

Soit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^t \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_k^1 & \lambda_k^2 & \ldots & \lambda_k^t \end{pmatrix}$$

la matrice des coefficients des inconnues de ce système. Comme $t > k$, le rang r de cette matrice est $\leq k$ et, par suite, ses t colonnes sont liées linéairement. Il existe donc des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ non tous nuls tels que

$$(6) \qquad \alpha_1 \lambda_i^1 + \alpha_2 \lambda_i^2 + \ldots + \alpha_t \lambda_i^t = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Envisageons tous les déterminants d'ordre r qu'on peut former avec les éléments communs à r lignes et à r colonnes quelconques de la matrice Λ. Si l'un au moins de ces déterminants n'est pas congru à 0 modulo n, prenons un tel déterminant Δ pour déterminant principal du système (6). Supposons, pour fixer les idées, que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^r \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_r^1 & \lambda_r^2 & \ldots & \lambda_r^r \end{vmatrix}.$$

Les inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sont alors principales ; on peut attribuer à $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_t$ des valeurs arbitraires, les r premières équations du système (6) sont principales et l'on obtient la solution du système (6) en résolvant le système formé par les équations principales. Posons dans les équations principales du système (6)

$$\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_t = \Delta$$

et résolvons le système obtenu par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ par la règle de Cramer. On obtient ainsi des valeurs entières de ces r inconnues et les t nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ dont les $t - r$ derniers ne sont pas $\equiv 0 \pmod{n}$ satisfont à l'égalité (I). Donc, dans ce cas, les classes de l'ensemble $\mathfrak{M}$ sont bien liées.

Supposons maintenant que tous les déterminants d'ordre r qu'on peut déduire

de la matrice Λ sont $\equiv 0 \pmod{n}$. L'un au moins de ces déterminants est $\not\equiv 0$, puisque r est le rang du système (1). Envisageons r lignes de la matrice Λ dont les éléments contribuent à former un déterminant d'ordre r non nul. Supposons, pour fixer les idées, que ce sont les r premières lignes de la matrice Λ. Soient $i_1, i_2, \ldots, i_r$ r nombres distincts de la suite $1, 2, \ldots, t$ et soit $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ le déterminant formé des éléments communs aux r premières lignes et aux colonnes de rangs $i_1, i_2, \ldots, i_r$ de Λ. Si $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_r} \not\equiv 0$, soit

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \beta_{i_1 i_2 \ldots i_r} n^{\gamma_{i_1 i_2 \ldots i_r}},$$

où l'entier $\beta_{i_1 i_2 \ldots i_r} \not\equiv 0 \pmod{n}$ et $\gamma_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ est un entier ≥ 1. Prenons alors pour déterminant principal du système (6) un déterminant $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ pour lequel le nombre $\gamma_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ est minimum. Soit Δ ce déterminant principal et soit, pour fixer les idées,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \ldots & \lambda_r^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^r & \ldots & \lambda_r^r \end{vmatrix};$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ seront donc de nouveau les inconnues principales et l'on peut attribuer à $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_t$ des valeurs arbitraires. Posons, dans le système (7) des équations principales

$$\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_t = \beta_{i_1 i_2 \ldots i_r}.$$

(7) est alors un système régulier qui possède une solution unique en $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ donnée par la règle de Cramer et l'on voit sans peine que cette solution est entière. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ vérifient l'égalité (I) et les nombres $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_t$ ne sont pas congrus à 0 modulo n. Donc, dans ce cas aussi, les classes de l'ensemble $\mathfrak{M}$ sont dépendantes.

Le raisonnement est tout à fait analogue et la conclusion subsiste quelles que soient les rangées de la matrice Λ qui contribuent à former le déterminant principal du système (6). La proposition 7 est donc démontrée.

Remarque 2. — Si dans un système de classes $M^{(n)}$ figure la classe nulle, les classes sont dépendantes. En effet, soit $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ un ensemble de classes $M^{(n)}$ parmi lesquelles figure la classe nulle $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} = M^{(n)}_{00\ldots0}$. Alors les t classes envisagées sont dépendantes. En effet, posons

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_i = 0, \qquad (i = 2, \ldots, t).$$

On a la relation

$$\text{(I)} \qquad \left[M^{(n)}_{\lambda_1^1 \lambda_2^1 \ldots \lambda_k^1}\right]^{\alpha_1} \left[M^{(n)}_{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_k^2}\right]^{\alpha_2} \ldots \left[M^{(n)}_{\lambda_1^t \lambda_2^t \ldots \lambda_k^t}\right]^{\alpha_t} = M^{(n)}_{00\ldots0}.$$

avec les exposants qui ne sont pas tous $\equiv 0 \pmod{n}$, ce qui démontre que les classes $M^{(n)}$ considérées sont bien liées.

D'autre part, si t classes $M^{(n)}$ sont dépendantes, en leur ajoutant une ou un nombre fini quelconque de classes $M^{(n)}$ quelconques, on obtient de nouveau un

système de classes dépendantes. Pour s'en convaincre, il suffit d'ajouter aux nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ dont l'un au moins n'est pas $\equiv 0 \pmod n$ et pour lesquels on a l'égalité (I), les nombres $\alpha_{t+1} = \ldots = 0$. On aura

$$(II) \qquad \left[M^{(n)}_{\lambda_1^1 \lambda_2^1 \ldots \lambda_k^1}\right]^{\alpha_1} \ldots \left[M^{(n)}_{\lambda_1^t \lambda_2^t \ldots \lambda_k^t}\right]^{\alpha_t} \left[M^{(n)}_{\lambda_1^{t+1} \lambda_2^{t+1} \ldots \lambda_k^{t+1}}\right]^{\alpha_{t+1}} \ldots = M^{(n)}_{00\ldots0},$$

ce qui démontre que l'ensemble des classes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} (i = 1, 2, \ldots, t, t+1, \ldots)$ sont liées.

Proposition 8. — *La condition nécessaire et suffisante pour que k classes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} (i = 1, 2, \ldots, k)$ constituent une base du groupe $\Gamma^{(n)}$, c'est que ces k classes soient indépendantes.*

Démonstration. — La condition est nécessaire. — En effet, si les classes considérées constituent une base de $\Gamma^{(n)}$ en composant ces k classes on obtient les n^k classes $M^{(n)}$ qui forment la totalité des éléments de $\Gamma^{(n)}$. Or, d'après la loi de composition des classes $M^{(n)}$ qui est commutative et du fait que toute classe $M^{(n)}$ envisagée comme élément de $\Gamma^{(n)}$ est d'ordre $\leq n$, il s'ensuit qu'elles ne peuvent être génératrices du groupe $\Gamma^{(n)}$ que si elles sont indépendantes, ce qui implique, entre autres, que chacune de ces classes est d'ordre n. La condition énoncée est donc bien nécessaire.

La condition est suffisante. — En effet, supposons que les k classes données sont indépendantes. Chacune de ces classes considérée comme élément de $\Gamma^{(n)}$ est donc d'ordre n et les classes

$$\left[M^{(n)}_{\lambda_1^1 \lambda_2^1 \ldots \lambda_k^1}\right]^{\alpha_1} \left[M^{(n)}_{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_k^2}\right]^{\alpha_2} \ldots \left[M^{(n)}_{\lambda_1^k \lambda_2^k \ldots \lambda_k^k}\right]^{\alpha_k},$$

où chacun des entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ parcourt la suite des valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, sont toutes distinctes. Ces classes sont au nombre de n^k et, par suite, les k classes données forment bien une base de $\Gamma^{(n)}$ et la condition énoncée est aussi suffisante.

C. Q. F. D.

Proposition 9. — *Si le groupe G (4) possède un système fini $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'éléments générateurs, tel que tout élément du groupe G possède un degré fixe par rapport à chacun des éléments $a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ le nombre k d'éléments qui constituent le système générateur A est minimum et tout élément de G possède un degré fixe par rapport à chaque élément de tout autre système générateur de G : $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ formé lui aussi de k éléments.*

Démonstration. — Soit A un système générateur du groupe G et supposons que chaque élément de G a un degré fixe par rapport à tout élément de A. Soit c un élément quelconque de G et soit u_i son degré fixe par rapport à

(4) Pas nécessairement libre. *Voir* Note (2) en bas de la page 7.

$a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. Un système générateur de G ne saurait être formé de moins de k éléments. En effet, tout élément de G appartient comme nous savons à une classe $M^{(n)}$ et à une seule. Quel que soit le système générateur de G, on doit pouvoir, par composition finie de ses éléments, obtenir des éléments de toute classe $M^{(n)}$. Or le groupe $\Gamma^{(n)}$ est à base minimum d'ordre k et, par suite, aucun système générateur du groupe G ne saurait être formé de moins de k éléments.

Soit à présent $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ un second système générateur de G, formé lui aussi de k éléments. Soit encore c un élément quelconque de G. Soit u_i son degré (fixe) par rapport à $a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. Comme B est un système générateur de G, c peut être obtenu par composition finie des éléments de B. Soit

$$(+) \qquad c = f(b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

une telle composition et soit ε_i le degré de f par rapport à $b_i (i = 1, 2, \ldots, b_k)$. Chacun des éléments b_i en tant qu'élément de G possède un degré fixe par rapport à tout élément de A et comme A est un système générateur de G, chacun des éléments b_i peut être obtenu par composition finie des éléments de A. Soit

$$(++) \qquad b_i = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

et soit w_j^i le degré (fixe) de b_i par rapport à $a_j (i, j = 1, 2, \ldots, k)$. Remplaçons dans l'expression $(+)$ chacun des b_i par son expression $(++)$. Il vient

$$c = f[f_1(a_1, a_2, \ldots, a_k), f_2(a_1, a_2, \ldots, a_k), \ldots, f_k(a_1, a_2, \ldots, a_k)].$$

Le second membre de cette égalité est de degré $\varepsilon_1 w_j^1 + \varepsilon_2 w_j^2 + \ldots + \varepsilon_k w_j^k$ par rapport à $a_j (j = 1, 2, \ldots, k)$. Et comme c possède un degré fixe u_j par rapport à a_j, quel que soit $j = 1, 2, \ldots, k$. les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ vérifient le système d'équations linéaires

$$(+++) \qquad \varepsilon_1 w_j^1 + \varepsilon_2 w_j^2 + \ldots + \varepsilon_k w_j^k = u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Les éléments $b_1, b_2, \ldots, b_k$ en tant qu'éléments générateurs de G font partie de k classes $M^{(n)}$. Soit $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ la classe $M^{(n)}$ qui contient l'élément $b_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. Comme ces classes sont indépendantes, le p. g. c. d. de n et du déterminant $|\lambda_j^i|$ est égal à 1, donc le déterminant $|\lambda_j^i|$ est $\neq 0$ et il n'est pas congru à 0 modulo n. Or

$$|w_j^i| \equiv |\lambda_j^i| \pmod{n}, \qquad \text{donc} \quad |w_j^i| \neq 0.$$

Le système d'équations $(+++)$ est donc régulier et il possède une solution unique en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$. On voit donc bien que quel que soit le système B générateur de G, formé de k éléments, tout élément de G a un degré fixe par rapport à chaque élément de B. La proposition 9 est donc démontrée.

Soit à présent G un groupe libre qui possède des systèmes finis d'éléments

générateurs, soit k le nombre minimum d'éléments générateurs de G. Nous savons que tout élément de G possède un degré fixe par rapport à tout élément d'un système générateur minimum.

PROPOSITION 10. — *Quels que soient les deux systèmes générateurs minima*

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \qquad \text{et} \qquad B=\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$$

du groupe G, on a

$$b_i=f_i(a_1, a_2, \ldots, a_k) \qquad (i=1, 2, \ldots, k),$$

où f_i est une composition finie réduite des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$, de degré fixe ϖ^i_j par rapport à $a_j (j=1, 2, \ldots, k)$ et le déterminant $|\varpi^i_j|$ est toujours égal à $+1$ ou à -1. D'autre part, quel que soit l'entier $n \geqq 2$, si l'on répartit les éléments de G en classes $\mathrm{M}^{(n)}$ relatives à ce nombre n, les éléments b_i font partie de k classes $\mathrm{M}^{(n)}$ indépendantes et si $b_i \in \mathrm{M}^{(n)}_{\lambda^i_1 \lambda^i_2 \ldots \lambda^i_k} (i=1, 2, \ldots, k)$, le déterminant $|\lambda^i_j|$, d'ordre k, est congru à $+1$ ou à -1 modulo n.

Démonstration. — Pour établir la première partie de cette proposition, reprenons la démonstration de la proposition 9. Un élément quelconque c de G est de degré fixe u_i par rapport à a_i et de degré fixe v_i par rapport à $b_i (i=1, 2, \ldots, k)$. Soit ϖ^i_j le degré fixe de b_i par rapport à $a_j (i, j=1, 2, \ldots, k)$. Nous avons vu que les nombres $v_1, v_2, \ldots, v_k$ doivent satisfaire le système d'équations (+++) qui est un système de Cramer. La résolution du système (+++) par la règle de Cramer donne

$$(++++) \qquad v_i=\frac{u_1 \mathrm{W}^i_1 + u_2 \mathrm{W}^i_2 + \ldots + u_k \mathrm{W}^i_k}{|\varpi^i_j|} \qquad (i=1, 2, \ldots, k),$$

où W^i_j est le coefficient de ϖ^i_j dans le développement du déterminant $|\varpi^i_j|$. La formule (++++) doit donner des valeurs entières pour $v_1, v_2, \ldots, v_k$, condition qui est imposée par la nature des nombres v_i, et cela quels que soient les entiers $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Or G étant un groupe libre, les degrés d'un élément quelconque c de G par rapport aux éléments de A peuvent être des entiers quelconques. Donc pour que (++++) donne pour v_i des valeurs entières quels que soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ (qui sont des entiers), chacun des coefficients W^i_j doit être un multiple de $|\varpi^i_j|$. Mais alors le déterminant $|\mathrm{W}^i_j|$, adjoint de $|\varpi^i_j|$, doit être un multiple de $|\varpi^i_j|^k$, puisque c'est un déterminant d'ordre k dont chaque rangée est un multiple de $|\varpi^i_j|$. Or $\mathrm{W}^i_j = |\varpi^i_j|^{k-1}$. Donc $|\varpi^i_j|^{k-1}$ qui est un entier doit être un multiple de $|\varpi^i_j|^k$, ce qui n'est possible que si $|\varpi^i_j|$ est égal à $+1$ ou à -1.

Soit à présent n un entier quelconque $\geqq 2$. Répartissons les éléments de G en classes $\mathrm{M}^{(n)}$ relatives à ce nombre n. Soit $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda^i_1 \lambda^i_2 \ldots \lambda^i_k}$ celle de ces classes qui contient l'élément b_i de $B (i=1, 2, \ldots, k)$. Comme B est un système générateur minimum de G, les classes $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda^i_1 \lambda^i_2 \ldots \lambda^i_k}$ sont indépendantes et, d'après ce qu'on

a vu dans la démonstration de la proposition 9, $|\lambda_j^i| \equiv |w_j^i| \pmod{n}$. Et comme $|w_j^i| = +1$ ou -1, on a bien

$$|\lambda_j^i| \equiv \varepsilon \pmod{n}, \qquad \text{où} \quad \varepsilon = +1 \quad \text{ou} \quad -1.$$

C. Q. F. D.

Remarque 3. — Bien que le déterminant $|\lambda_j^i|$ soit toujours $\equiv \varepsilon \pmod{n}$, $\varepsilon = +1$ ou -1, la valeur numérique de ce déterminant peut varier avec n et, en général, elle n'est pas égale à ε. En voici un exemple. Soit G un groupe libre à base du second ordre engendré par les deux éléments libres a_1 et a_2. Soit b_1, b_2 une seconde base de G définie par les formules

$$b_1 = [(a_1 a_2)^3 a_1 (a_1 a_2)^4]^7 a_1 a_2 [(a_1 a_2)^3 a_1 (a_1 a_2)^4]^{10}, \qquad b_2 = (a_1 a_2)^3 a_1 (a_1 a_2)^4.$$

Pour vérifier que b_1, b_2 est bien une base de G, il suffit de montrer que a_1 et a_2 peuvent être obtenus par composition finie de b_1 et de b_2. En effet, on a successivement

$$b_2^{-7} b_1 b_2^{-10} = a_1 a_2, \qquad (a_1 a_2)^{-3} b_2 (a_1 a_2)^{-4} = a_1, \qquad a_1^{-1} (a_1 a_2) = a_2.$$

Donc b_1, b_2 est bien une base de G. b_1 est de degré 137 par rapport à a_1 et de degré 120 par rapport à a_2, b_2 est de degré 8 par rapport à a_1 et de degré 7 par rapport à a_2.

Le déterminant

$$|w_j^i| = \begin{vmatrix} 137 & 120 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -1.$$

Prenons $n = 5$. On a

$$|\lambda_j^i| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

il est $\equiv -1 \pmod{5}$.

Prenons maintenant $n = 21$. Alors

$$|\lambda_j^i| = \begin{vmatrix} 11 & 15 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -43 \equiv -1 \pmod{21}.$$

Remarque 4. — Il ressort de la proposition 10 que quels que soient les systèmes générateurs minima

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \qquad \text{et} \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$$

d'un groupe libre G ayant un nombre fini d'éléments générateurs, si b_i est de degré w_j^i par rapport à a_j, quels que soient i et j de la suite 1, 2, ..., k, le déterminant $|w_j^i|$ est égal à $+1$ ou à -1. On peut le démontrer de la façon suivante. Soit n un entier ≥ 2 quelconque. Soit $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ la classe $\mathrm{M}^{(n)}$ qui contient $b_i (i = 1, 2, \ldots, k)$.

On a

$$(+) \qquad |w_j^i| \equiv |\lambda_j^i| \pmod{n}.$$

Comme B est une base de G, les n classes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ sont indépendantes. Donc, d'après la proposition 6, le p. g. c. d. de n et de $|\lambda_j^i|$ est égal à 1 et, par conséquent, $|\lambda_j^i| \not\equiv 0$ et $|\lambda_j^i| \not\equiv 0 \pmod{n}$. Il s'ensuit, d'après (+), que $|\omega_j^i| \not\equiv 0$, $\omega_j^i \not\equiv 0 \pmod{n}$ et que le p. g. c. d. de $|\omega_j^i|$ et de n est aussi égal à 1. Cela étant, quel que soit l'entier $n = 2, 3, \ldots, |\omega_j^i|$ qui est un entier non nul ne peut être égal qu'à $+1$ ou à -1.

C. Q. F. D.

Remarque 5. — Quel que soit l'entier $n \geq 2$, aucune base du groupe libre G ne saurait contenir un élément de la classe nulle $M^{(n)}_{00\ldots0}$. En effet, soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ une base de G. D'après ce qui précède, les éléments de A doivent faire partie de k classes indépendantes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Or un ensemble de classes $M^{(n)}$ qui contient la classe $M^{(n)}_{00\ldots0}$ est dépendant, d'après la remarque 2.

D'autre part, aucun vrai sous-ensemble de A ne saurait être composé d'éléments de G qui font partie de classes $M^{(n)}$ dépendantes, puisque les classes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ comprenant, chacune, un élément et un seul de A sont indépendantes et que tout ensemble de k classes $M^{(n)}$ dont $k' < k$ sont dépendantes est lui-même dépendant, d'après la remarque 2. Donc, d'après la proposition 5, quelles que soient les $k' < k$ classes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ $(i = i_1, i_2, \ldots, i_{k'})$, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{i_1} & \lambda_1^{i_2} & \ldots & \lambda_1^{i_{k'}} \\ \lambda_2^{i_1} & \lambda_2^{i_2} & \ldots & \lambda_2^{i_{k'}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_k^{i_1} & \lambda_k^{i_2} & \ldots & \lambda_k^{i_{k'}} \end{pmatrix}$$

est égal à k'.

Remarque 6. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble fini A d'éléments générateurs libres, soit n un entier ≥ 2 et soit $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ une seconde base quelconque de G. Répartissons les éléments de G en classes d'équivalence $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ en partant de la base A. Les éléments de B font alors partie de k classes $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ indépendantes. En effet, comme B est une base de G, tous les éléments de chaque classe $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ s'obtiennent par composition finie d'éléments de B et, par conséquent, les classes $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ qui contiennent les éléments de B sont génératrices du groupe $\Gamma^{(n)}$. Or pour cela il faut et il suffit, d'après la proposition 8, que ces k classes soient indépendantes.

Proposition 11. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'éléments générateurs libres. Soit n un entier ≥ 2 et soit $\Gamma^{(n)}$ le groupe abélien d'ordre n^k associé à G. Quel que soit le sous-groupe γ du groupe $\Gamma^{(n)}$, la réunion des éléments de G contenus dans les classes $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ qui sont les éléments de $\Gamma^{(n)}$ est un sous-groupe invariant de G.*

Démonstration. — Soit γ un sous-groupe quelconque du groupe $\Gamma^{(n)}$, soit t

l'ordre de γ et soient $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, les éléments de ce groupe. Soit

$$g = \bigcup_{i=1}^{t} M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}.$$

C'est un sous-ensemble de G. Montrons que G est un groupe. En effet, soient a et b deux éléments quelconques de g, ils font donc partie de classes $M^{(n)}$-éléments de γ. Soit

$$a \in M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} \qquad \text{et} \qquad b \in M^{(n)}_{\lambda_1^j \lambda_2^j \ldots \lambda_k^j}.$$

Comme γ est un groupe, le produit des deux classes $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$, $M^{(n)}_{\lambda_1^j \lambda_2^j \ldots \lambda_k^j}$ est aussi un élément de γ et ce produit contient l'élément ab. Donc $ab \in g$. D'autre part, quel que soit l'élément a de g, il est contenu dans une classe $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$ de γ et comme γ est un groupe, il contient, avec la classe $M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}$, la classe inverse $M^{(n)}_{n-\lambda_1^i, n-\lambda_2^i, \ldots, n-\lambda_k^i}$, classe qui contient l'élément a^{-1}. Donc $a^{-1} \in g$. Il s'ensuit que g est un groupe, sous-groupe de G. Et ce sous-groupe est invariant. En effet, quel que soit l'élément c de G, on a

$$cgc^{-1} = c\left[\bigcup_{i=1}^{t} M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i}\right]c^{-1} = \bigcup_{i=1}^{t} c M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} c^{-1} = \bigcup_{i=1}^{t} M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} = g,$$

puisque chaque classe $M^{(n)}$ contient, avec tout élément d de G, la classe entière des éléments de G conjugués à d. On voit donc bien que G est un sous-groupe invariant de G.

C. Q. F. D.

Corollaire 1. — *Quel que soit l'entier $n \geqq 2$, la classe nulle $M^{(n)}_{00\ldots0}$ est un sous-groupe invariant de G.*

Démonstration. — La classe nulle $M^{(n)}_{00\ldots0}$ en temps qu'élément neutre du groupe $\Gamma^{(n)}$ constitue, à elle seule, un sous-groupe de $\Gamma^{(n)}$ et, par suite, d'après la proposition 11, l'ensemble des éléments de G qui forment la classe $M^{(n)}_{00\ldots0}$ est un sous-groupe invariant de G.

Proposition 12. — *Quel que soit l'entier $n \geqq 2$, les classes $M^{(n)}$ en lesquelles se répartissent les éléments d'un groupe libre G engendré par une base A, ont un caractère intrinsèque, elles sont indépendantes de la base $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de G à partir de laquelle elles ont été déterminées.*

Démonstration. — Soit G un groupe libre engendré par la base

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Envisageons l'ensemble des classes $M^{(n)}$ définies à partir de cette base A. Soit, d'autre part, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ une seconde base quelconque du groupe G,

soient $\mathrm{M}'^{(n)}$ les classes M définies, pour le même entier n, à partir de cette seconde base. Les classes $\mathrm{M}^{(n)}$ aussi bien que les classes $\mathrm{M}'^{(n)}$ sont au nombre de n^k et tout élément de G fait partie d'une classe $\mathrm{M}^{(n)}$ ainsi que d'une classe $\mathrm{M}'^{(n)}$ et d'une seule.

Montrons que si une classe $\mathrm{M}^{(n)}$ a un élément commun avec une classe $\mathrm{M}'^{(n)}$, ces deux classes sont confondues. En effet, supposons que les deux classes $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ et $\mathrm{M}'^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}$ ont en commun un élément c de G. c a un degré fixe par rapport à chaque élément de toute base de G. Soit u_i le degré de c par rapport à a_i et soit v_i le degré de c par rapport à $b_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. On a

$$u_i \equiv \lambda_i \pmod{n} \qquad \text{et} \qquad v_i = \mu_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Chacun des éléments de la base $B(A)$ en tant qu'élément de G a à son tour un degré fixe par rapport à tout élément de la base $A(B)$. Soit $w_j^i (w_j'^i)$ le degré de $b_i(a_i)$ par rapport à $a_j(b_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$. Soit

$$c = f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = f'(b_1, b_2, \ldots, b_k),$$

où $f(f')$ désigne la composition finie réduite des éléments de la base $A(B)$ qui représente c. Cette composition, comme nous savons, est unique. Soit

$$a_i = f_i(b_1, b_2, \ldots, b_k), \qquad b_i = f_i'(a_1, a_2, \ldots, a_k),$$

où f_i est la composition finie réduite des éléments de B qui représente l'élément a_i et f_i' la composition réduite des éléments de A qui représente l'élément $b_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. On a

$$c = f'[f_1'(a_1, a_2, \ldots, a_k), f_2'(a_1, a_2, \ldots, a_k), \ldots, f_k'(a_1, a_2, \ldots, a_k)].$$

Le second membre de cette composition des éléments de A est de degré

$$v_1 w_i' + v_2 w_i^2 + \ldots + v_k w_i^k$$

par rapport à a_i, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$. Et comme c est de degré fixe u_i par rapport à a_i, on a

$$u_i = v_1 w_i^1 + v_2 w_i^2 + \ldots + v_k w_i^k,$$

égalité qui implique la congruence

$$\lambda_i \equiv \mu_1 w_i^1 + \mu_2 w_i^2 + \ldots + \mu_k w_i^k \pmod{n} \qquad \text{quel que soit} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Soit à présent d un élément quelconque de la classe $\mathrm{M}'^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}$ et soit $d = h'(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, où le second membre est la composition finie réduite des éléments de B qui représente d. d est de degré fixe par rapport à tout élément de chaque base de G. Le degré v_i' de h par rapport à b_i satisfait la congruence

$$v_i' \equiv \mu_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si l'on remplace dans h les éléments b_i par leurs expressions au moyen des

éléments de A, on trouve

$$d = h'[f'_1(a_1, a_2, \ldots, a_k), f'_2(a_1, a_2, \ldots, a_k), \ldots, f'_k(a_1, a_2, \ldots, a_k)]$$

et le second membre de cette expression est de degré

$$\varphi'_1 w_i^1 + \varphi'_2 w_i^2 + \ldots + \varphi'_k w_i^k \equiv \mu_1 w_i^1 + \mu_2 w_i^2 + \ldots + \mu_k w_i^k \equiv \lambda_i \pmod{n}$$
$$\text{quel que soit } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Donc $d \in \mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$. Cela étant quel que soit l'élément d de la classe $\mathrm{M}'^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$, on a l'inclusion

$$(+) \qquad \mathrm{M}'^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \subset \mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}.$$

Soit maintenant d' un élément quelconque de la classe $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$. Soit $d' = h(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, h est de degré $u'_i \equiv \lambda_i \pmod{n}$ par rapport à $a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. Remplaçons dans h les a_i par leurs expressions au moyen des éléments de la base B. Il vient

$$d' = h[f_1(b_1, b_2, \ldots, b_k), f_2(b_1, b_2, \ldots, b_k), \ldots, f_k(b_1, b_2, \ldots, b_k)]$$

et le second membre de cette égalité est de degré

$$u'_1 w_i'^1 + u'_2 w_i'^2 + \ldots + u'_k w_i'^k \equiv \lambda_1 w_i'^1 + \ldots + \lambda_k w_i'^k \pmod{n}$$

par rapport à b_i, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$; et comme

$$c = f(a_1, \ldots, a_k) = f[f_1(b_1, b_2, \ldots, b_k), f_2(b_1, b_2, \ldots, b_k), \ldots, f_k(b_1, b_2, \ldots, b_k)]$$

et que c fait partie de la classe $\mathrm{M}'^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$, on a

$$\mu_i \equiv \lambda_1 w_i'^1 + \lambda_2 w_i'^2 + \ldots + \lambda_k w_i'^k \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

On voit donc que $d' \in \mathrm{M}'^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$.

Cela étant, quel que soit l'élément d' de $\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ on a l'inclusion

$$(++) \qquad \mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} \subset \mathrm{M}'^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$$

et des deux inclusions $(+)$ et $(++)$ résulte l'égalité

$$\mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} = \mathrm{M}'^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}.$$

Et comme tout élément de G appartient à une classe $\mathrm{M}^{(n)}$ et à une seule ainsi qu'à une classe $\mathrm{M}'^{(n)}$ et à une seule, il s'ensuit qu'il existe entre les classes $\mathrm{M}^{(n)}$ et $\mathrm{M}'^{(n)}$ une correspondance biunivoque et qu'à toute classe $\mathrm{M}^{(n)}$ correspond une classe $\mathrm{M}'^{(n)}$ confondue avec la première. Les classes M ont donc bien un caractère intrinsèque et ne dépendent pas de la base A de G à partir de laquelle elles sont formées.

C. Q. F. D.

Remarque 7. — Comme l'élément identique de G est commun aux classes $\mathrm{M}^{(n)}_{00\ldots0}$ et $\mathrm{M}'^{(n)}_{00\ldots0}$, les deux classes $\mathrm{M}^{(n)}_{00\ldots0}$ et $\mathrm{M}'^{(n)}_{00\ldots0}$ sont confondues, mais en général,

l'égalité

$$M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k} = M^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}$$

n'implique pas que $\lambda_i = \mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Exemple. — Supposons que le groupe G est à base du second ordre. Considérons deux de ses bases a_1, a_2 et b_1, b_2, où $b_1 = a_1^3 a_2$ et $b_2 = a_1$. Soit $n = 5$.

Envisageons les classes $M^{(5)}_{22}$ et $M^{(5)}_{21}$. L'élément $a_1 a_2 a_1 a_2$ de G fait partie de la première de ces classes et comme $a_1 a_2 a_1 a_2 = b_2^{-2} b_1 b_2^{-2} b_1$, l'élément considéré fait également partie de la classe $M^{(5)}_{21}$. Donc, d'après ce qui précède, $M^{(5)}_{22} = M^{(5)}_{21}$.

Quelle que soit la base B de G, à partir de laquelle on détermine les classes $M^{(n)}$, la classe nulle est toujours la même alors que les classes non nulles peuvent être permutées entre elles quand on passe d'une base à l'autre, mais l'ensemble d'éléments de G qui constitue chacune de ces classes est toujours le même, il est indépendant de B.

Remarque 8. — Quel que soit l'entier $n \geq 2$, comme on l'a vu, aucun élément de la classe $M^{(n)}_{00\ldots0}$ ne saurait faire partie d'une base de G. D'après le corollaire 1, la classe $M^{(n)}_{00\ldots0}$ est un sous-groupe invariant du groupe G. Et comme la classe $M^{(n)}_{00\ldots0}$ varie avec n et qu'à deux valeurs distinctes de l'entier $n \geq 2$ correspondent, comme nous le verrons, deux classes M nulles différentes, il s'ensuit que tout groupe libre de rang fini possède une infinité de sous-groupes invariants dont aucun élément ne fait partie d'une base de G. Nous prouverons que la réunion des classes $M^{(n)}_{00\ldots0}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ engendre le groupe G tout entier.

Les classes M nulles. — Soit G un groupe libre à base d'ordre fini k. Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ une base de G et soit n un entier ≥ 2 quelconque. La classe nulle $M^{(n)}_{00\ldots0}$ comprend tous les éléments de G de degré $\equiv 0 \pmod{n}$ par rapport à chacun des éléments de la base A. Tous les éléments de G qui sont de degré 0 par rapport à chaque élément d'une première base A jouissent de la même propriété par rapport à n'importe quelle autre base B de G. On peut donc dire que *la classe* $M^{(n)}_{00\ldots0}$ *se compose de tous les éléments de* G *qui sont de degré* $\equiv 0 \pmod{n}$ *par rapport à chaque élément de n'importe quelle base de* G.

Montrons que *les classes* $M^{(n)}_{00\ldots0}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *sont distinctes*, tout en ayant deux à deux une infinité d'éléments communs. En effet, soient n et n' deux entiers ≥ 2 et soit $n' > n$. Si n est un diviseur de n', la classe $M^{(n)}_{00\ldots0}$ contient la classe $M^{(n')}_{00\ldots0}$. En effet, soit a un élément quelconque de G qui est de degré $\equiv 0 \pmod{n}$ par rapport à chaque élément de la base A. Comme n' est un multiple de n, tout élément de G qui est de degré $\equiv 0 \pmod{n'}$ est aussi de degré $\equiv 0 \pmod{n}$ par rapport à chaque élément de la base A et, par suite,

$$M^{(n)}_{00\ldots0} \supset M^{(n')}_{00\ldots0}.$$

Mais ces deux classes ne sauraient être confondues puisque la première de ces

classes contient, par exemple, les éléments a_i^n $(i=1, 2, \ldots, k)$ qui ne font pas partie de la seconde classe.

Si $D(n, n')=d>1$, mais si $d<n$ les deux classes $M_{00\ldots0}^{(n)}$ et $M_{00\ldots0}^{(n')}$ sont, d'après ce qui précède, contenues dans la classe $M_{00\ldots0}^{(d)}$. Soit m le p. p. c. m. des deux nombres n et n'. Tout élément de G qui est de degré $\equiv 0 \pmod m$ par rapport à chaque élément de A est commun aux deux classes nulles considérées. On a

$$M_{00\ldots0}^{(n)} \cap M_{00\ldots0}^{(n')} = M_{00\ldots0}^{(m)},$$

car tout élément commun à nos deux classes nulles est de degré $\equiv 0 \pmod m$ [puisqu'il est de degré $\equiv 0 \pmod n$ et $\equiv 0 \pmod{n'}$] et que tout élément de $M_{00\ldots0}^{(m)}$ fait évidemment partie de chacune des deux classes nulles considérées. Mais les deux classes $M_{00\ldots0}^{(n)}$ et $M_{00\ldots0}^{(n')}$ sont distinctes. En effet, par hypothèse, $n<n'$. Les éléments $a_i^n (i=1, 2, \ldots, k)$ font partie de la classe $M_{00\ldots0}^{(n)}$, mais non de la classe $M_{00\ldots0}^{(n')}$ quel que soit $i=1, 2, \ldots, k$. Donc $M_{00\ldots0}^{(n)} \neq M_{00\ldots0}^{(n')}$.

Si $D(n, n')=1$, le p. p. c. m. de n et de n' est $m=nn'$. Dans ce cas aussi, comme on le voit sans peine,

$$M_{00\ldots0}^{(n)} \cap M_{00\ldots0}^{(n')} = M_{00\ldots0}^{(m)}$$

ei les deux classses nulles considérées sont distinctes. La première contient les éléments a_i^n et la seconde les éléments $a_i^{n'} (i=1, 2, \ldots, k)$, éléments de G dont aucun n'est commun aux deux classes envisagées.

On voit donc bien que quels que soient les entiers $n \geq 2$ et $n'>n$, les deux classes $M_{00\ldots0}^{(n)}$ et $M_{00\ldots0}^{(n')}$ ont en commun une infinité d'éléments de G, mais qu'elles sont distinctes. Si n' est un multiple de n, la classe $M_{00\ldots0}^{(n)}$ contient la classe $M_{00\ldots0}^{(n')}$.

Chaque classe $M_{00\ldots0}^{(n)}$ est un sous-groupe invariant de G. Envisageons l'ensemble

$$M = \bigcup_{n=2}^{\infty} M_{00\ldots0}^{(n)},$$

réunion de toutes les classes nulles, *M est un ensemble d'éléments de G qui engendre le groupe G*. En effet, supposons d'abord que A se compose d'un seul élément a, donc que le groupe G est cyclique. Alors toute classe $M_0^{(n)}$ se compose des éléments a^{tn}, où t est un entier quelconque. Considérons deux éléments quelconques a^{tn} et $a^{t'n'}$ de l'ensemble M. Leur produit $a^{tn+t'n'}$ appartient à G. Par suite, M — qui contient avec tout élément de G aussi, son inverse — engendre le groupe G puisqu'il contient les éléments a^{-n} et $a^{n+1} (n \geq 2)$ et que $a^{-n} a^{n+1} = a$.

Supposons maintenant que A contient au moins deux éléments et soient n et n' deux entiers quelconques ≥ 2 et premiers entre eux. L'élément $a_1^n \in M_{00\ldots0}^{(n)}$, l'élément $a_2^{n'} \in M_{00\ldots0}^{(n')}$, ces deux éléments font donc partie de M, mais leur produit ne fait pas partie de M, il n'est contenu dans aucune classe M nulle et, par suite, M n'est pas un groupe. Mais il engendre le groupe G tout entier.

En effet, quel que soit l'élément a_i de la base A, l'élément a_i^3 appartient à la classe $M^{(3)}_{00\ldots0}$, l'élément a_i^{-2} appartient à la classe $M^{(2)}_{00\ldots0}$, donc $a_i = a_i^3 a_i^{-2}$ fait partie du groupe engendré par les éléments de M. Cela étant quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$, il s'ensuit que tout élément de A, donc aussi tout élément de G, fait partie du groupe engendré par l'ensemble M. Donc l'ensemble M est générateur du groupe G.

Ceci montre que *tout élément libre d'un groupe libre peut être obtenu par composition finie d'éléments non libres de ce groupe.*

On appelle libres les éléments d'une base quelconque de G. Tous les éléments de G (libres et non libres) s'obtiennent par composition finie des éléments de n'importe quelle base de ce groupe. Donc tout élément non libre s'obtient à son tour par composition finie d'éléments libres.

Les p-classes. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'éléments libres, soit p un nombre premier ≥ 2 et soit n un entier multiple de p et supérieur à p, $n = mp$, $m > 1$. Répartissons les éléments de G en classes $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$. Nous dirons qu'une classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ est une p-classe si chacun des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ est un multiple de p. Il ressort aussitôt de la loi de composition des classes $M^{(n)}$ que le produit de deux p-classes est une p-classe et que l'inverse d'une p-classe est aussi une p-classe. Donc l'ensemble des p-classes est un sous-groupe du groupe $\Gamma^{(n)}$ et la réunion des éléments de G qui font partie de toutes les p-classes est un sous-groupe invariant de G. Ce sous groupe G_p est formé de tous les éléments de G qui sont de degré $\equiv 0 \pmod{p}$ par rapport à tout élément de A. Soit $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ un système quelconque de générateurs libres du groupe G. Tout élément c de G_p est aussi de degré $\equiv 0 \pmod{p}$ par rapport à tout élément de B. En effet, partons de la composition finie réduite d'éléments de A qui représente c. Cette composition $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ est de degré $\equiv 0 \pmod{p}$ par rapport à tout élément de A. Comme B est une base de G, tout élément de A peut être obtenu par composition finie d'éléments de B. Soit

$$a_i = f_i(b_1, b_2, \ldots, b_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

On obtient l'expression réduite de c au moyen d'éléments de B en remplaçant dans f l'élément a_i par $f_i(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ et en opérant la réduction par rapport aux éléments de B. Comme tous ces éléments sont libres et que f est de degré $\equiv 0 \pmod{p}$ par rapport à chacun des éléments a_i, c est aussi de degré $\equiv 0 \pmod{p}$ par rapport à chaque élément de B. Donc les classes $M^{(n)}$ qui sont des p-classes relativement à la base A sont aussi des p-classes relatives à n'importe quelle autre base B de G.

Proposition 13. — *Aucun élément du groupe G_p (donc aussi aucun élément d'une p-classe) n'est libre.*

Démonstration. — Soit G un groupe libre engendré par l'ensemble

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

d'éléments libres, soit p un nombre premier quelconque ≥ 2 et soit $n = mp$, où m est un entier > 1.

Répartissons les éléments de G en classes $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ relatives à la base A. Soit

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$$

un ensemble quelconque d'éléments générateurs libres de G. D'après la remarque 6, les éléments $b_1, b_2, \ldots, b_k$ font partie de k classes $M^{(n)}$ indépendantes. Soit

$$b_i \in M^{(n)}_{\lambda_1^i \lambda_2^i \ldots \lambda_k^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Donc, d'après la proposition 6, le p. g. c. d. de n et du déterminant $|\lambda^i_j|$ est égal à 1. Mais alors aucun des éléments b_i de B ne saurait faire partie d'une p-classe. En effet, si un élément b_i de B faisait partie d'une p-classe, tous les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne de $|\lambda^i_j|$ seraient des multiples de p et, par suite, le p. g. c. d. de n et de $|\lambda^i_j|$ serait $\geq p > 1$, ce qui est contradictoire. On voit donc bien qu'aucun élément de la base B ne saurait faire partie d'une p-classe et, par suite, qu'aucun élément du groupe G_p n'est libre.

C. Q. F. D.

Remarque 9. — Toute p-classe est formée d'éléments de la classe $M^{(p)}_{00\ldots0}$.

Les classes $M^{(n)}$ et les éléments libres du groupe G. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'éléments générateurs libres et soit n un entier > 2. Répartissons les éléments de G en classes $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ à partir de la base A et proposons-nous de rechercher s'il existe parmi les classes $M^{(n)}$ qui ne sont pas des p-classes des classes dépourvues d'éléments libres et si de telles classes peuvent faire partie d'un système irréductible d'éléments générateurs du groupe $\Gamma^{(n)}$.

Soit d'abord $k = 1$. — Soit p un nombre premier ≥ 5. Alors des $p-1$ classes non nulles $M^{(p)}_1, M^{(p)}_2, \ldots, M^{(p)}_{p-1}$, seules la première et la dernière contiennent chacune un seul élément libre, alors que les classes $M^{(p)}_2, \ldots, M^{(p)}_{p-2}$ ne renferment que des éléments non libres. Toutefois, chacune des classes $M^{(p)}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ est génératrice du groupe $\Gamma^{(n)}$ qui est un groupe cyclique d'ordre p.

Soit à présent $k = 2$. — Soit $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}$ un élément du groupe $\Gamma^{(n)}$ qui n'est pas une p-classe.

Supposons d'abord que l'un des nombres λ_1, λ_2 est nul. λ_1 et λ_2 ne sauraient être nuls tous les deux, car la classe considérée n'est pas nulle. Le raisonnement étant tout à fait analogue quel que soit celui des deux nombres λ_1, λ_2 qui est nul, bornons-nous à considérer le cas où $\lambda_2 = 0$. Dans ce cas, le p. g. c. d. des

deux nombres n et λ_1 est $=1$, puisque la classe $M^{(n)}_{\lambda_1 0}$ envisagée n'est pas une p-classe et, par suite, il existe un entier t, tel que $tn \equiv 1 \pmod{\lambda_1}$, d'après le petit théorème de Fermat. Soit $tn = 1 + u\lambda_1$, où u désigne un entier. L'élément $(a_1 a_2^u)^{\lambda_1} a_2$ est un élément de la classe $M^{(n)}_{\lambda_1 0}$ et cet élément est libre puisqu'en lui ajoutant l'élément $a_1 a_2^u$, on obtient un système de deux éléments générateurs de G. Or, un tel système est formé d'éléments libres.

On voit, de même, que si $\lambda_1 = 0$ et si $\lambda_2 > 0$, la classe $M^{(n)}_{0\lambda_2}$ contient des éléments libres. Supposons à présent qu'aucun des deux nombres λ_1, λ_2 n'est nul. Comme la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}$ envisagée n'est pas une p-classe, le p. g. c. d. des trois nombres n, λ_1, λ_2 est égal à 1.

Si $\lambda_1 = 1$, $a_1 a_2^{\lambda_2}$ est un élément libre de la classe $M^{(n)}_{1\lambda_2}$.

Si $\lambda_1 = n - 1$, $a_1^{-1} a_2^{\lambda_2}$ est un élément libre de la classe $M^{(n)}_{1\lambda_2}$.

De même si $\lambda_2 = 1$ ou $n - 1$, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}$ contient des éléments libres.

Supposons que $1 < \lambda_1 < n - 1$ et que $1 < \lambda_2 < n - 1$.

S'il existe un entier x, tel qu'on a l'une au moins des congruences

$$(\varphi) \qquad xn + \lambda_1 \equiv \pm 1 \pmod{\lambda_2}, \qquad xn + \lambda_2 \equiv \pm 1 \pmod{\lambda_1},$$

la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}$ contient des éléments libres. En effet, si

$$xn + \lambda_1 = \pm 1 + u\lambda_2,$$

où u désigne un entier, posons

$$c = a_1^{\pm 1} (a_1^u a_2)^{\lambda_2}$$

et si

$$xn + \lambda_2 = \pm 1 + v\lambda_1,$$

où v désigne un entier, posons

$$d = (a_1 a_2^v)^{\lambda_1} a_2^{\mp 1}.$$

Si l'on a la première des congruences (φ), c est un élément de la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}$ et cet élément est libre. En effet, les deux éléments c et $a_1^u a_2$ sont générateurs du groupe G puisque, par composition finie de ces deux éléments, on obtient sans peine les deux éléments a_1 et a_2. Or tout système de deux éléments générateurs de G est composé d'éléments libres. Et si l'on a la seconde des congruences (φ), d est un élément libre de la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}$.

Mais il n'existe pas toujours un entier x qui satisfasse l'une au moins des congruences (φ). Tel est, par exemple, le cas pour $n = 63$, $\lambda_1 = 9$ et $\lambda_2 = 14$.

Mais la classe $M^{(63)}_{9,14}$ contient néanmoins des éléments libres. Tel est, par exemple, l'élément

$$b_1 = [(a_1 a_2)^5 a_1 (a_1 a_2)^5]^{50} a_1 a_2 [(a_1 a_2)^5 a_1 (a_1 a_2)^5]^8$$

qui appartient à cette classe et qui est libre puisqu'il forme avec l'élément

$$b_2 = (a_1 a_2)^5 a_1 (a_1 a_2)^5$$

un système générateur du groupe G. Or tout système générateur d'un groupe libre de rang 2 est formé, comme on sait, d'éléments libres.

Si le nombre $\lambda_1 - \lambda_2$ est premier avec n, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}$ contient également des éléments libres. En effet, envisageons le système des deux congruences

$$(+) \qquad xy + y + 1 \equiv \lambda_1 \pmod{n}, \qquad xy + 1 \equiv \lambda_2 \pmod{n}.$$

Montrons qu'il existe des valeurs entières de x et de y qui satisfont ces deux congruences. En effet, il résulte de $(+)$ que $y \equiv \lambda_1 - \lambda_2 \pmod{n}$ et il suffit de poser $y = \lambda_1 - \lambda_2$ pour satisfaire à cette congruence. Remplaçons y par cette valeur dans la seconde congruence $(+)$. Il vient

$$x(\lambda_1 - \lambda_2) \equiv \lambda_2 - 1 \pmod{n}$$

et il existe des valeurs entières de x qui satisfont cette congruence, puisque $\lambda_1 - \lambda_2$ et n, sont premiers entre eux. Envisageons un couple de valeurs de x et y qui satisfont les congruences $(+)$ et soient m_1, n_1, m_2, n_2 quatre entiers tels que

$$m_1 + n_1 = x, \qquad m_2 + n_2 = y.$$

Il existe une infinité de tels entiers. Posons

$$b_1 = [(a_1a_2)^{m_1}a_1(a_1a_2)^{n_1}]^{m_2}a_1a_2[(a_1a_2)^{m_1}a_1(a_1a_2)^{n_1}]^{n_2}.$$

On vérifie sans peine que cet élément b_1 appartient à la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}$ et c'est un élément libre de G, car si on lui ajoute l'élément

$$b_2 = (a_1a_2)^{m_1}a_1(a_1a_2)^{n_1},$$

on obtient un système générateur du groupe G et un tel système est formé d'éléments libres, puisque G est de rang 2.

Soit à présent k un entier quelconque ≥ 2 et soit $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ une classe de $\Gamma^{(n)}$, telle que le p. g. c. d. des nombres $n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ est égal à 1.

Si un seul des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, soit λ_i, est $\neq 0$, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ contient des éléments libres. En effet, si $\lambda_i = 1$ ou $n-1$, l'élément a_i ou a_i^{-1} est un élément libre de la classe envisagée. Soit $\lambda_i \neq 1$, $n-1$ et soit $j \neq i$ un nombre de la suite $1, 2, \ldots, n-1$. Comme le p. g. c. d. de n et de λ_i est $= 1$, il existe donc un entier t, tel que $tn \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$. Soit $tn = 1 + u\lambda_i$, où u est entier, et soit $b = (a_i a_j^u)^{\lambda_i} a_j$. C'est un élément de la classe considérée et cet élément est libre, car si on lui associe les $k-2$ éléments de l'ensemble

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} - \{a_i, a_j\}$$

ainsi que l'élément $a_i a_j^u$, on obtient un système générateur de G qui est de rang k et, par suite, les k derniers éléments générateurs de G sont tous libres.

Si deux nombres au moins de la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont $\neq 0$ et si tous les nombres non nuls de cette suite sont égaux, leur valeur commune étant λ, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ contient des éléments libres. En effet, comme la classe envisagée

n'est pas une p-classe, le p. g. c. d. de n et de λ est $=1$. Il existe donc un entier t, tel que $tn \equiv 1 \pmod{\lambda}$. Soit $tn = 1 + u\lambda$, u entier. Soient $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq k)$ tous les indices de la suite $1, 2, \ldots, k$, tels que $\lambda_{i_l} = \lambda$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$. L'élément $(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{r-1}} a_{i_r}^{u+1})^{\lambda} a_{i_r}$ est un élément de la classe envisagée et cet élément est libre puisqu'en lui ajoutant les $k-2$ éléments de l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} - \{a_{i_{r-1}}, a_{i_r}\}$ ainsi que l'élément $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{r-1}} a_{i_r}^{u+1}$ on obtient un système de k éléments générateurs de G, dont, par conséquent, tous les éléments sont libres.

Quel que soit l'entier $k \geq 2$, si l'un au moins des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ est premier avec n, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ contient des éléments libres. En effet, supposons que λ_i est premier avec n. Soit j un indice $\neq i$ quelconque de la suite $1, 2, \ldots, k$. Puisque n et λ_i sont premiers entre eux, il existe un entier t, tel que $tn \equiv 1 - \lambda_j \pmod{\lambda_i}$. Soit $tn = 1 - \lambda_j + u\lambda_i$, où u désigne un entier, et soit $i_1, i_2, \ldots, i_{k-2}$ une suite comprenant tous les éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\} - \{i, j\}$. Alors l'élément $a_{i_1}^{\lambda_{i_1}} a_{i_2}^{\lambda_{i_2}} \ldots a_{i_{k-2}}^{\lambda_{i_{k-2}}} (a_i a_j^u)^{\lambda_i} a_j$ est un élément de la classe considérée et cet élément est libre puisqu'en lui ajoutant les $k-1$ éléments $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k-2}}$ et $a_i a_j^u$, on obtient un système générateur du groupe G qui est de rang k et dont tout système minimum d'éléments générateurs est formé d'éléments libres.

Supposons maintenant que $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ et que ces nombres ne sont pas tous égaux. Rangeons les k nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ par ordre de grandeur croissante et soit $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{ik}$ la suite ainsi obtenue. S'il existe dans cette suite deux nombres consécutifs dont la différence est égale à 1, la classe envisagée contient des éléments libres.

En effet, supposons que $\lambda_{i_{j+1}} - \lambda_{i_j} = 1$. Posons

$$\begin{aligned} c = {} & (a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k})^{\lambda_{i_1}} (a_{i_2} a_{i_3} \ldots a_{i_k})^{\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1}} \ldots \\ & \times (a_{i_{j+1}} a_{i_{j+2}} \ldots a_{i_k}) (a_{i_{j+2}} a_{i_{j+3}} \ldots a_{i_k})^{\lambda_{i_{j+2}} - \lambda_{i_{j+1}}} \ldots \\ & \times (a_{i_{k-1}} a_{i_k})^{\lambda_{i_{k-1}} - \lambda_{i_{k-2}}} (a_i)^{\lambda_{i_k} - \lambda_{i_{k-2}}} \quad (5). \end{aligned}$$

On voit sans peine que c'est un élément de la classe considérée. Et cet élément est libre, puisqu'en lui ajoutant $k-1$ éléments, notamment $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$, $a_{i_2} a_{i_3} \ldots a_{i_k}$, $\ldots$, $a_{i_j} a_{i_{j+1}} \ldots a_{i_k}$, $a_{i_{j+2}} \ldots a_{i_k}$, $\ldots$, a_{i_k}, si aucun des nombres $\lambda_{i_t} - \lambda_{i_{t-1}}$ $(t = 2, \ldots, k)$ n'est nul, et en prenant le seul élément a_{i_t} au lieu du produit $a_{i_t} a_{i_{t+1}} \ldots a_{i_k}$, si $\lambda_{i_t} - \lambda_{i_{t-1}} = 0$, on voit sans peine que les k éléments considérés forment un système générateur de G, puisque par composition finie de ces k éléments on obtient les k éléments $a_1, \ldots, a_k$. Et comme c fait partie d'un système de k éléments générateurs de G, il est bien libre.

On voit donc que si deux nombres au moins de la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ diffèrent d'une unité, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$ contient des éléments libres.

---

(5) Où il faut supprimer tout facteur $(a_{i_l} a_{i_{l+1}} \ldots a_{i_k})^{\lambda_{i_l} - \lambda_{i_{l-1}}}$ pour lequel $\lambda_{i_l} - \lambda_{i_{l-1}} = 0$.

D'autre part, s'il existe un entier t, tel que $tn+\lambda_i \equiv \pm 1 \pmod{\lambda_j}$ pour un couple au moins d'indices $\lambda_i, \lambda_j (i, j = 1, 2, \ldots, k)$, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ contient des éléments libres. En effet, soit $tn+\lambda_i = \pm 1 + u\lambda_j$, où u désigne un entier. Posons

$$c = \left(\prod_{t=1, t\neq i,j}^{n} a_t^{\lambda_t} \right) (a_j a_i^u)^{\lambda_j} a_i^{\pm 1}.$$

C'est un élément de la classe considérée et cet élément est libre puisque si on lui ajoute les $k-2$ éléments $a_t (1 \leqq t \leqq k, t \neq i, t \neq j)$ et $a_j a_i^u$ on obtient un système de k éléments générateurs de G et par suite, c est bien libre.

On peut démontrer que toute classe $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ qui n'est pas une p-classe contient des éléments libres, si $k \geqq 2$.

Proposition 14. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'éléments libres. Quel que soit l'entier $n \geqq 2$ et quel que soit le sous-groupe g de G qui n'est pas contenu tout entier dans la classe $M^{(n)}_{00\ldots0}$ (avec laquelle il a en tout cas en commun son élément neutre), les différentes classes $M^{(n)}$ qui contiennent des éléments de g ont en commun avec g des ensembles d'égale puissance.*

Démonstration. — Soient $M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}$ et $M^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}$ deux classes $M^{(n)}$ quelconques qui contiennent des éléments de g et soit

$$g_1 = g \cap M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}, \qquad g_2 = g \cap M^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}.$$

Soit ν_i le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui vérifie la congruence

$$\nu_i \equiv \mu_i - \lambda_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et soient c_1 un élément fixe quelconque de g_1 et c_2 un élément de g_2. Comme g est un groupe, il existe un élément c de g, tel que $c_1 c = c_2$. Et comme

$$c_1 \in M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k} \qquad \text{et} \qquad c_2 \in M^{(n)}_{\mu_1\mu_1\ldots\mu_k},$$

l'élément c fait partie de la classe $M^{(n)}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k}$, d'après la loi de composition des classes $M^{(n)}$. Et comme

$$M^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k} M^{(n)}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} = M^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k},$$

on a

$$g_1 c \subset M^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}.$$

Or $g_1 c \subset g$, puisque g est un groupe, et comme

$$g_2 = g \cap M^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k},$$

on a

(†) $$g_1 c \subset g_2$$

Or les ensembles g_1 et $g_1 c$ sont d'égale puissance et l'inclusion (+) montre que la puissance de l'ensemble g_1 n'est pas supérieure à celle de g_2.

D'autre part, $c_1 = c_2 c^{-1}$, $c^{-1} \in \mathrm{M}^{(n)}_{n-\nu_1, n-\nu_2, \ldots, n-\nu_k}$ et comme

$$\mathrm{M}^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \mathrm{M}^{(n)}_{n-\nu_1, n-\nu_2, \ldots, n-\nu_k} = \mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k},$$

on a

$$g_2 c^{-1} \subset \mathrm{M}^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}.$$

Or $g_2 c^{-1} \subset g$ et, par conséquent, $g_2 c^{-1} \subset g_1$. Il s'ensuit que la puissance de g_2 n'est pas supérieure à celle de g_1. Et comme elle ne lui est également pas inférieure d'après l'inclusion (+), les deux ensembles g_1 et g_2 sont bien d'égale puissance. C. Q. F. D.

« Longueur » d'un élément d'un groupe libre dans une base donnée. — Soit G un groupe libre engendré par une base $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, soit c un élément quelconque de G et soit $a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \ldots a_{i_r}^{j_r}$ la composition finie réduite d'éléments de A qui représente c. Le nombre $j_1 + j_2 + \ldots + j_r$ est appelé la « longueur » de l'élément c dans la base A. C'est le degré de c par rapport à l'ensemble des éléments de A.

Toute base de G est formée de k éléments libres. La base A — appelée base primitive — est formée d'éléments libres dont chacun est de longueur 1.

Nous allons montrer que, quel que soit l'entier N, il existe des bases de G dont chaque élément est de longueur $>$ N dans la base A et qu'on peut former des nouvelles bases dont les éléments sont de plus en plus « longs » à partir de n'importe quelle base de G.

Proposition 15. — *Soit G un groupe libre à base d'ordre fini k. Alors quelle que soit la base $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ de G, il existe une suite infinie $c_1, c_2, \ldots$ d'éléments de G dont les k premiers sont les éléments de la base B, telle que k éléments consécutifs quelconques de cette suite constituent une base de G.*

Démonstration. — Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ la base primitive de G, celle qui sert à définir ce groupe libre. Soit $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ une base connue quelconque du groupe G. Chaque élément de cette dernière base s'obtient par composition finie des éléments de la base primitive. Soit, par exemple,

$$b_1 = a_1, \qquad b_2 = a_2 a_1, \qquad \ldots, \qquad b_k = a_k a_{k-1} \ldots a_1,$$

Soit $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ une permutation quelconque des éléments de la base B et soit $c_j = b_{i_j} (j = 1, 2, \ldots, k)$.

Quel que soit l'entier $m > 1$, désignons par ε_m un nombre qui prend l'une des deux valeurs $+1$ ou -1 et soient u_m et v_m deux entiers quelconques qui ne sont pas nuls simultanément.

Posons

$$c_{k+1} = c_k^{u_{k+1}} c_1^{\varepsilon_1} c_k^{v_{k+1}}, \qquad c_{k+2} = c_{k+1}^{u_{k+2}} c_2^{\varepsilon_2} c_{k+1}^{v_{k+2}}, \qquad \ldots,$$
$$c_{2k} = c_{2k-1}^{u_{2k}} c_k^{\varepsilon_k} c_{2k-1}^{v_{2k}}.$$

Soit à présent n un entier quelconque ≥ 1 et supposons que nous ayons déjà défini les éléments $c_1, c_2, \ldots, c_{nk}$. Posons

$$c_{nk+1} = c_{nk}^{u_{nk+1}} c_{(n-1)k+1}^{\varepsilon_{(n-1)k+1}} c_{nk}^{v_{nk+1}}, \qquad c_{nk+2} = c_{nk+1}^{u_{nk+2}} c_{(n-1)k+2}^{\varepsilon_{(n-1)k+2}} c_{nk+1}^{v_{nk+2}}, \qquad \ldots,$$
$$c_{(n+1)k-1} = c_{nk+1}^{u_{(n+1)k-1}} c_{nk}^{\varepsilon_{nk}} c_{nk-1}^{v_{(n+1)k-1}}.$$

Cela étant quel que soit l'entier $n = 1, 2, 3, \ldots$, nous définissons la suite

$$(\pm) \qquad c_1, \quad c_2, \quad \ldots$$

formée d'une infinité d'éléments du groupe G. D'après la loi de composition des éléments d'un groupe libre, tous les éléments de la suite $(\pm)$ sont distincts.

Envisageons k éléments consécutifs quelconques de cette suite

$$(\pm\pm) \qquad c_m, \quad c_{m+1}, \quad \ldots, \quad c_{m+k-1}.$$

Montrons que ces k éléments constituent une base de G. A cet effet, il suffit de montrer que les k éléments de la base B peuvent être obtenus par composition finie des éléments $(\pm\pm)$.

Si $m = 1$, les éléments $(\pm\pm)$ forment la base B. Supposons que $m > 1$. Si $m \leq k$, on a

$$c_k^{-u_{k+1}} c_{k+1} c_k^{-v_{k+1}} = c_1, \qquad c_{k+1}^{-u_{k+2}} c_{k+2} c_{k+1}^{-v_{k+2}} = c_2 \qquad \ldots,$$
$$c_{m+k-2}^{-u_{m+k-1}} c_{m+k-1} c_{m+k-2}^{-v_{m+k-1}} = c_{m-1}$$

et, par suite, $(\pm\pm)$ est bien une base de G.

Supposons enfin que $m > k$. On a alors

$$c_{m+i}^{-u_{m+i+1}} c_{m+i+1} c_{m+i}^{-v_{m+i+1}} = c_{m+i-k+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-2),$$
$$c_{m-1}^{-u_m} c_m c_{m-1}^{-v_m} = c_{m-k}.$$

A partir de $c_{m-k}, c_{m-k+1}, \ldots, c_{m-1}$ on déduit de même $c_{m-2k}, c_{m-2k+1}, \ldots, c_{m-k-1}$, et ainsi de suite, et finalement on est ramené à k éléments consécutifs de la suite $c_1, c_2, \ldots$, dont l'un au moins appartient à l'ensemble $a_1, \ldots, a_k$ et alors, en raisonnant comme dans le cas $m \leq k$, on en déduit par composition finie les k éléments de la base B. Donc les éléments $(\pm\pm)$ forment bien une base de G.

C. Q. F. D.

Remarque 10. — Tous les éléments de la suite $c_1, c_2, \ldots$ sont des éléments libres du groupe G. Et comme u_i, v_i sont des entiers arbitraires pourvu qu'ils ne soient pas tous deux nuls et que $\varepsilon_i = \pm 1$ quel que soit $i = 1, 2, \ldots$, on dispose ainsi d'un procédé commode pour déterminer des infinités d'éléments libres du groupe G. On notera que, quel que soit l'entier $\mathfrak{N} > 1$, la « longueur » de c_m dans la base A peut être rendue $> \mathfrak{N}$ pour m suffisamment grand.

Appliquons l'algorithme trouvé à la base primitive $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elle-même. Soit $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ une permutation quelconque des éléments de cette base. Posons

$b_{1j} = a_j$, quel que soit $j = 1, \ldots, k$.

$$b_{21} = b_{11}^{u_{21}} b_{11} b_{11}^{v_{21}}, \qquad b_{22} = b_{21}^{u_{22}} b_{12} b_{21}^{v_{22}}, \qquad \ldots, \qquad b_{2k} = b_{2k-1}^{u_{2k}} b_{1k} b_{2k-1}^{v_{2k}},$$
$$b_{31} = b_{21}^{u_{31}} b_{21} b_{21}^{v_{31}}, \qquad b_{32} = b_{31}^{u_{32}} b_{22} b_{31}^{v_{32}}, \qquad \ldots, \qquad b_{3k} = b_{3k-1}^{u_{3k}} b_{2k} b_{3k-1}^{v_{3k}},$$

et ainsi de suite. Tous les éléments ainsi définis sont libres.

Les groupes libres de rang infini et les groupes libres de rang quelconque.

II. Soit à présent G un groupe libre engendré par un ensemble infini A d'éléments générateurs libres. Soit b un élément quelconque du groupe G. Il existe une composition finie réduite d'éléments de A qui représente b. Soit $b = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \ldots a_{i_r}^{j_r}$ et soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les divers éléments de A qui figurent dans cette composition. Soit u_{a_i} le degré de b par rapport à a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Nous dirons que b est de degré $u_a = 0$ par rapport à tout élément a de l'ensemble $A - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Les classes $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$. — Soit n un entier ≥ 2. Nous allons répartir les éléments du groupe G en classes de la façon suivante. Soit c un élément quelconque de G, a un élément de A et u_a le degré de c par rapport à a. Soit λ_a le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui satisfait la congruence

$$u_a \equiv \lambda_a \pmod{n}.$$

Nous dirons que c fait partie de la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$. Il existe pour toute classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$ ainsi définie un sous-ensemble fini ou vide $A^\star = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'éléments de A tels que $\lambda_a \neq 0$, si $a \in A^\star$, et que $\lambda_a = 0$, si $a \in A - A^\star$. Quels que soient les nombres λ_a de la suite $0, 1, \ldots, n-1$, dont un nombre au plus fini sont $\neq 0$, la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$ contient une infinité d'éléments de G. En effet, si $A^\star = \emptyset$, la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a \in A}$ — dite *classe nulle* — contient (entre autres) tous les éléments de la forme a^{mn}, où a est un élément quelconque de A et m un entier quelconque, elle est donc infinie. Et si $A^\star \neq \emptyset$, la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$ contient tous les éléments de la forme $a_1^{\lambda_{a_1} + m_1 n} a_2^{\lambda_{a_2} + m_2 n} \ldots a_k^{\lambda_{a_k} + m_k n}$, où $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sont des nombres entiers quelconques. Elle est donc également infinie.

On répartit ainsi tous les éléments de G en classes disjointes et l'on voit sans peine que chacune de ces classes contient avec tout élément b de G la classe entière des éléments de G conjugués à b.

Loi de composition des classes $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$. — Nous appelons *produit* de

deux classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et nous désignons par le symbole $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ l'ensemble des éléments du groupe G qui peuvent se mettre sous la forme d'un produit bc où

$$b\in \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} \qquad \text{et} \qquad c\in \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}.$$

Proposition 16. — *Quelles que soient les classes* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *et* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, *on a l'égalité*

$$(\varphi) \qquad \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A} = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A},$$

où ν_a *désigne le nombre de la suite* $0, 1, \ldots, n-1$ *qui satisfait la congruence*

$$\nu_a \equiv \lambda_a + \mu_a \pmod{n}$$

quel que soit l'élément a *de* A. *Avec cette loi de composition qui est commutative et associative, les classes* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *forment un groupe abélien* $\Gamma^{(n)}$ *dont l'élément neutre est la classe nulle et dont l'inverse d'une classe* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *est la classe* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ n-\lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$.

Démonstration. — En effet, soit b un élément quelconque de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et soit c un élément de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$. Soit u_a le degré de b et v_a le degré de c par rapport à un élément quelconque a de A. D'après la loi de composition des éléments d'un groupe libre, bc est de degré u_a+v_a par rapport à a, quel que soit $a\in A$. Soit ν_a le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui satisfait la congruence $\nu_a \equiv u_a + v_a \pmod{n}$. Comme

$$u_a \equiv \lambda_a \pmod{n} \qquad \text{et que} \qquad v_a \equiv \mu_a \pmod{n},$$

on a

$$\nu_a \equiv \lambda_a + \mu_a \pmod{n}.$$

Cela étant quel que soit l'élément a de A, il s'ensuit que

$$bc\in \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A}.$$

On a donc l'inclusion

$$(\dagger) \qquad \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A} \subset \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A}.$$

Soit maintenant d un élément quelconque de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et soit b un élément fixe d'ailleurs quelconque de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$. Soit $c = b^{-1}d$. C'est

un élément du groupe G qui fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \mu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ d'après la première partie de la démonstration, car b^{-1} est un élément de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ n-\lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$. Il existe donc pour tout élément d de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \nu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ un élément c de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \mu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ tel que $bc = d$. On a donc aussi l'inclusion

$$(++) \qquad \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \nu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A} \subset \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A} \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \mu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}.$$

Et des deux inclusions (+) et (++) résulte l'égalité (♀). Il s'ensuit que la loi de composition des classes $\mathrm{M}^{(n)}$ est associative et commutative, que la classe $\mathrm{M}^{(n)}$ nulle est neutre par rapport à cette loi de composition et que l'inverse d'une classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ est la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ n-\lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ et, par conséquent, les classes $\mathrm{M}^{(n)}$, avec cette loi de composition, forment bien un groupe abélien $\Gamma^{(n)}$.

C. Q. F. D.

Définition. — *Nous disons que le groupe abélien* $\Gamma^{(n)}$ *est* associé *au groupe libre* G. *En faisant varier* n, *on peut ainsi associer au groupe libre* G *une infinité de groupes abéliens.*

Remarque 11. — Il ressort de la définition des classes $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ qu'à tout sous-ensemble fini $A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de A correspondent n^k classes distinctes telles que $\lambda_a = 0$, $a \in A - A^*$, et que les classes $\mathrm{M}^{(n)}$ qui correspondent à deux sous-ensembles finis différents de A sont distinctes. Donc l'ensemble des classes $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ a la même puissance que l'ensemble A.

Proposition 17. — *Deux classes* $\mathrm{M}^{(n)}$ *quelconques sont des ensembles d'égale puissance.*

Démonstration. — En effet, soit $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ et $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \mu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ deux éléments quelconques du groupe $\Gamma^{(n)}$. Soit A^* l'ensemble des éléments de A, tels que l'un au moins des nombres λ_a, μ_a qui correspondent à tout élément a de A^* est $\neq 0$. Soit ν_a le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui satisfait la congruence $\nu_a \equiv \mu_a - \lambda_a \pmod{n}$, quel que soit $a \in A$. La classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \nu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ contient tout élément de la forme cb^{-1},

$$c \in \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \mu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}, \qquad b \in \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A},$$

alors que tout élément de la forme bc^{-1} fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ n-\nu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$. Soit d un élément quelconque de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \nu_a \end{smallmatrix}\right)_{a\in A}$ et soit d' un élément de

$\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ n-\nu_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}$. D'après (♀), on a les deux inclusions

$$d\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda} \subset \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \mu_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda} \qquad \text{et} \qquad d'\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \mu_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda} \subset \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda},$$

dont il découle que les classes $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}$ et $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \mu_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}$ sont bien des ensembles d'égale puissance. C. Q. F. D.

Proposition 18. — *Quel que soit le sous-groupe γ du groupe $\Gamma^{(n)}$, la réunion des classes $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}$ qui constituent les éléments de γ est un sous-groupe invariant de G.*

Démonstration. — Soit γ un sous-groupe quelconque du groupe $\Gamma^{(n)}$ et soit g la réunion des classes $\mathrm{M}^{(n)}$ qui sont les éléments de γ. Le produit de tout couple d'éléments de g fait partie de g, puisque le produit des classes $\mathrm{M}^{(n)}$ qui les contiennent fait partie du groupe γ. D'autre part, l'inverse de tout élément de g appartient à g puisque l'inverse de la classe $\mathrm{M}^{(n)}$ qui contient l'élément envisagé fait partie du groupe γ. Donc l'ensemble g est un groupe. Et ce groupe est un sous-groupe invariant de G puisqu'il est la réunion de classes $\mathrm{M}^{(n)}$ dont chacune contient avec tout élément b de G la classe entière des éléments de G conjugués à b. La proposition 18 est donc démontrée.

Corollaire 2. — *Quel que soit l'entier $n \geq 2$, la classe nulle $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}$ est un sous-groupe invariant de G.*

Démonstration. — En effet, la classe nulle qui est l'élément neutre du groupe $\Gamma^{(n)}$ forme à elle seule un sous-groupe de $\Gamma^{(n)}$, et par suite, d'après la proposition 18, cette classe nulle est un sous-groupe invariant du groupe G.

Comme la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}$ varie avec n, on en déduit l'existence d'une infinité de sous-groupes invariants dans tout groupe libre G.

Proposition 19. — *Quelle que soit la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}$, l'ordre de cette classe, considérée comme élément du groupe $\Gamma^{(n)}$ est égal à $\frac{n}{d}$ où d est le p. g. c. d. de n et de tous les nombres λ_a (dont un nombre fini seulement sont $\neq 0$).*

Démonstration. — En effet, soit m l'ordre de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}$. On a donc

$$\left[\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}\right]^m = \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}.$$

D'autre part, d'après (♈), on a

$$\left[\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}\right]^{\frac{n}{d}} = \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a\in\Lambda}, \qquad \text{puisque} \quad \frac{n}{d}\lambda_a \equiv 0 \pmod{n}$$

quel que soit $a \in A$. Donc $\frac{n}{d}$ est un multiple de m : $\frac{n}{d} = m'm$ et l'entier m' ne saurait être > 1, sinon le p. g. c. d. de n et de tous les nombres λ_a serait $> d$, ce qui contredit la définition de d. On a donc bien $m = \frac{n}{d}$.

C. Q. F. D.

Corollaire 3. — *Tout système irréductible d'éléments générateurs du groupe* $\Gamma^{(n)}$ *a la même puissance que le groupe* $\Gamma^{(n)}$.

Démonstration. — En effet, d'après la proposition 19, tout élément du groupe $\Gamma^{(n)}$ est d'ordre fini $\leq n$ et comme le groupe $\Gamma^{(n)}$ est abélien d'ordre infini, il ne saurait être engendré par un nombre fini de ses éléments, puisque quel que soit le nombre fini m, m éléments commutables d'ordre non supérieur à n chacun engendrent un groupe d'ordre fini $\leq n^m$. Or, on sait que tout groupe qui ne saurait être engendré par un nombre fini d'éléments possède la même puissance que tout ensemble irréductible de ses éléments générateurs.

Remarque 12. — Considérons l'ensemble $\mathfrak{M}$ des classes $M^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a \in A}$ pour chacune desquelles il existe un seul élément a de A, tel que $\lambda_a = 1$, alors que $\lambda_{a'} = 0$ quel que soit $a' \in A - \{a\}$. Comme nous le verrons plus loin, $\mathfrak{M}$ est un système irréductible d'éléments générateurs du groupe $\Gamma^{(n)}$. On notera que les ensembles $\mathfrak{M}$ et A sont d'égale puissance. Donc le groupe $\Gamma^{(n)}$ et chacun de ses systèmes générateurs irréductibles sont des ensembles de même puissance que A.

Remarque 13. — Quel que soit l'ensemble A_1 d'éléments libres générateur du groupe G, l'ensemble $\mathfrak{M}$ des classes $M^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a \in A}$ qui comprennent des éléments de A_1 est générateur du groupe $\Gamma^{(n)}$. En effet, nous avons vu que quel que soit le sous-ensemble fini A^* de A et quels que soient les nombres λ_a de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ ($a \in A^*$), alors que $\lambda_a = 0$, $a \in A - A^*$, la classe $M^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a \in A}$ comprend une infinité d'éléments du groupe G. Or si l'ensemble des classes $M^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a \in A}$ qui contiennent des éléments de A_1 n'était pas générateur du groupe $\Gamma^{(n)}$, il existerait des classes $M^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a \in A}$ faisant partie de ce groupe et dont aucun élément ne saurait être obtenu par composition finie des éléments de A_1. Donc A_1 ne serait pas générateur du groupe G, ce qui est contraire à notre hypothèse sur A_1. On voit donc bien que l'ensemble $\mathfrak{M}$ est générateur du groupe $\Gamma^{(n)}$.

Proposition 20. — *Soit* G *un groupe libre engendré par un ensemble infini* A *d'éléments générateurs libres. Soit* n *un entier* ≥ 2. *Les classes* $M^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda_a \end{smallmatrix}\right)_{a \in A}$ *ont un*

caractère intrinsèque, elles ne dépendent pas du système d'éléments générateurs A qui sert à les déterminer.

Démonstration. — En effet, soit B un second système quelconque générateur de G, formé d'éléments libres. Tout élément de G appartient à une classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et à une seule ainsi qu'à une classe unique $M^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B}$. Nous allons montrer que si les deux classes $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et $M^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B}$ ont un élément commun, elles sont confondues. Montrons d'abord que

$$M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A} = M^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}_{b\in B}.$$

Soit c un élément quelconque de la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$. Comme A est une base de G, c s'obtient par composition finie d'éléments de A. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_r$ les éléments de A dont une composition finie réduite $f(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ représente c et soit ϱ_i le degré de c par rapport à $a_i (i = 1, 2, \ldots, r)$. Comme B est aussi une base de G, chacun des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_r$ peut s'exprimer par une composition finie réduite d'éléments de B. Soient $b_1, b_2, \ldots, b_s$ les éléments de B qui figurent dans les compositions finies réduites d'éléments de B qui représentent les r éléments a_i et soit u_{ij} le degré de a_i par rapport à $b_j (j = 1, 2, \ldots, s; i = 1, 2, \ldots, r)$. Pour avoir l'expression réduite de c par composition d'éléments de B, il suffit de remplacer dans $f(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ chacun des éléments a_i par son expression réduite au moyen des éléments b_j et de procéder à des réductions en utilisant, au besoin, des relations triviales. Donc c est de degré

$$u_j \equiv \varrho_1 u_{1j} + \varrho_2 u_{2j} + \ldots + \varrho_r u_{rj} \quad \text{par rapport à } b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Et comme

$$\varrho_i \equiv 0 \pmod{n} \qquad \text{quel que soit} \quad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

puisque $c \in M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$, on a aussi

$$u_j \equiv 0 \pmod{n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

et, par suite, $c \in M^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}_{b\in B}$. Cela étant, quel que soit l'élément c de $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$, on a l'inclusion

$$M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{A\in A} \subset M^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}_{b\in B}.$$

Par un raisonnement tout à fait analogue, on démontre qu'on a aussi l'inclusion inverse et, par suite, on a bien

$$M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A} = M^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}_{b\in B}.$$

Soit maintenant c un élément de G commun aux deux classes non nulles $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in\mathrm{A}}$ et $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in\mathrm{B}}$. L'un au moins des nombres λ_a et l'un au moins des nombres μ_b sont $\not\equiv 0$. Par définition des classes $\mathrm{M}^{(n)}$, il existe un sous-ensemble fini $A^\star=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de A, tel que $\lambda_{a_i}\not\equiv 0 (i=1, 2, \ldots, k)$, alors que $\lambda_a = 0$ pour tout $a\in\mathrm{A}-\mathrm{A}^\star$. Et comme B est une base de G, il existe un ensemble fini $\mathrm{B}^\star=\{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ d'éléments de B, tel que tout élément a_i de $\mathrm{A}^\star$ est une composition finie réduite d'éléments de $\mathrm{B}^\star$. Soit u_{ij} le degré de a_i par rapport à $b_j (j=1, 2, \ldots, l;\ i=1, 2, \ldots, k)$. Dans la composition finie réduite d'éléments de A qui représente l'élément c figurent les k éléments a_i et éventuellement d'autres éléments de A (en nombre fini) par rapport auxquels c est de degré $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$ alors que le degré de c par rapport à a_i est $\equiv \lambda_{a_i} (\mathrm{mod}\, n)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, puisque $c\in\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in\mathrm{A}}$. Donc le degré u_j de c par rapport à b_j dans l'expression réduite de c au moyen des éléments de B satisfait la congruence

$$u_j \equiv \lambda_{a_1} u_{1j} + \lambda_{a_2} u_{2j} + \ldots + \lambda_{a_k} u_{kj} \pmod{n} \qquad (j=1, 2, \ldots, l),$$

alors que c est de degré $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$ par rapport à tout autre élément de B qui figure éventuellement dans son expression réduite au moyen d'éléments de B. Et comme c fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in\mathrm{B}}$ pour laquelle il existe un sous-ensemble fini non vide $\mathrm{B}'^\star=\{b'_1, b'_2, \ldots, b'_{l'}\}$ de B, tel que $\mu_{b'_j}\not\equiv 0 (j=1, 2, \ldots, l')$, alors que $\mu_b = 0$ quel que soit $b\in\mathrm{B}-\mathrm{B}'^\star$, il s'ensuit que $\mathrm{B}'^\star\subset\mathrm{B}^\star$, donc $l\geqq l'$, et si l'on choisit les notations de façon à avoir $b_j=b'_j (j=1, 2, \ldots, l')$ on doit avoir

$$\lambda_{a_1} u_{1j} + \lambda_{a_2} u_{2j} + \ldots + \lambda_{a_k} u_{kj} \equiv \mu_j \pmod{n} \qquad (j=1, 2, \ldots, l'),$$

alors que c est de degré $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$ par rapport à tout élément de l'ensemble $\mathrm{B}-\mathrm{B}'^\star$, donc aussi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i} u_{ij} \equiv 0 \pmod{n} \qquad \text{si} \quad j>l'.$$

Soit à présent d un élément quelconque de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in\mathrm{A}}$. La composition finie réduite d'éléments de A qui représente d contient donc nécessairement les k éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$, elle est de degré $\equiv \lambda_{a_i} (\mathrm{mod}\, n)$ par rapport à $a_i (i=1, 2, \ldots, k)$, alors qu'elle est de degré $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$ par rapport à tout élément de $\mathrm{A}-\mathrm{A}^\star$ qu'elle contient. Donc, d'après ce qui précède, la composition finie réduite d'éléments de B qui représente d est de degré $\equiv \mu_j (\mathrm{mod}\, n)$ par rapport à $b_j (j=1, 2, \ldots, l')$ et de degré $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$ par rapport à tout élément de $\mathrm{B}-\mathrm{B}'^\star$ qu'elle renferme. Donc $d\in\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in\mathrm{B}}$. Cela étant, quel que

soit l'élément d de $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, on a donc l'inclusion

$$\mathrm{M}^{(n}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} \subset \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B}.$$

Par un raisonnement tout à fait analogue, on établit l'inclusion inverse, ce qui démontre qu'on a bien

$$\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B},$$

si ces deux classes ont un élément commun. Et comme tout élément de G est commun à une classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et à une classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B}$, il s'ensuit que l'ensemble des classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ coïncide avec l'ensemble des classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B}$ et, par suite, que les classes $\mathrm{M}^{(n)}$ ont bien un caractère intrinsèque, elles sont indépendantes de la base de G à partir de laquelle elles sont déterminées.

C. Q. F. D.

Corollaire 4. — *Quel que soit le groupe libre G, la répartition des éléments de G en classes $\mathrm{M}^{(n)}$ varie avec $n = 2, 3, \ldots$. On peut donc répartir d'une infinité de façons les éléments d'un groupe libre en classes d'équivalence $\mathrm{M}^{(n)}$ qui ont un caractère intrinsèque et caractérisent les propriétés de structure du groupe libre.*

Remarque 14. — Il ressort de la démonstration de la proposition 20, que si A et B sont deux systèmes d'éléments générateurs libres du groupe libre G, quel que soit l'entier $n \geqq 2$, il existe entre les classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et les classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B}$ une correspondance biunivoque, telle que deux classes homologues dans cette correspondance coïncident. On a toujours $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A} = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}_{b\in B}$. Quel que soit le nombre premier p, diviseur de n, l'ensemble des p-classes relatives à A se confond avec celui des p-classes relatives à B (6).

Remarque 15. — Il ressort du fait que les classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ ont un caractère intrinsèque, indépendant du système d'éléments générateurs libres A qui servent à les déterminer, que la répartition des éléments de G en classes $\mathrm{M}^{(n)}$ dépend essentiellement du nombre n ainsi que de la structure du groupe G. Aussi peut-on parler de répartition des éléments de G en classes M relatives à un entier $n \geqq 2$.

Proposition 21. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'élé-*

(6) *Voir* définition des p-classes à la page 48.

ments générateurs libres. Quel que soit l'entier $n \geq 2$, aucun élément du groupe G qui fait partie de la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$ n'est libre.

Démonstration. — En effet, il ressort de la définition des classes $M^{(n)}$ qu'aucun élément de A ne fait partie de la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$. Soit à présent B, un autre système quelconque d'éléments générateurs libres du groupe G. Comme $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A} = M^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}_{b\in B}$, aucun élément de B ne fait également partie de la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$, ce qui démontre la proposition 21.

Corollaire 5. — *Quel que soit l'élément libre a de G et quel que soit l'entier n, l'élément a^n n'est pas libre, puisqu'il fait partie de la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$, où A est un système d'éléments générateurs libres de G comprenant l'élément a.*

D'autre part, quels que soient les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$, en nombre fini k, de G qui font partie d'un même ensemble A d'éléments générateurs libres de G, et quel que soit l'entier $n \geq 2$ aucun élément de G qui s'obtient par composition finie de $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et qui est de degré $\equiv 0 \pmod{n}$ par rapport à chacun de ces éléments n'est libre. En effet, un tel élément appartient à la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$ qui ne contient aucun élément libre.

Soit par, exemple, $k = 3$, $n = 5$ et soit $c = a_1^2 a_2^3 a_1^3 a_3^2 a_1^4 a_3^3 a_1$. Cet élément du groupe libre G qui est de degré 10 par rapport à a_1 et de degré 5 par rapport à chacun des deux éléments a_2 et a_3 n'est pas libre. Il ne fait partie d'aucune base de G.

Proposition 22. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres. Soit A^* un sous-ensemble propre de A et soit G^* le groupe libre qu'il engendre. Alors tout élément libre de G^* est aussi un élément libre de G.*

Démonstration. — Le groupe G est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de A et G^* est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de A^*. Soit c un élément libre quelconque de G^*. Il existe donc un ensemble B^* d'éléments libres de G^*, qui comprend l'élément c et qui est générateur de G^*. Comme les ensembles A^* et B^* sont deux systèmes d'éléments libres générateurs du groupe libre G^*, chacun de ces ensembles est irréductible et si l'on remplace dans A l'ensemble A^* par l'ensemble B^* on obtient un nouveau système d'éléments générateurs de G. Soit G' le groupe libre engendré par l'ensemble $A - A^*$. G est le produit libre de G' et de G^*. Comme B^* est un système d'éléments générateurs libres de G^*, G^* est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de B^*. Et si l'on rem-

place dans l'égalité $G = G' \star G^*$ (7), G' par le produit libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de $A - A^*$ et G^* par le produit libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de l'ensemble B^*, G est, comme on sait, le produit libre de tous les groupes cycliques en question. Mais ceci prouve que l'ensemble $(A - A^*) \cup B^*$ est un système d'éléments générateurs libres de G, système qui comprend l'élément c de G^*. Donc c qui, par hypothèse, est un élément libre de G^* est aussi un élément libre de G. C. Q. F. D.

Proposition 23. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments libres et soit G^* le groupe libre engendré par un sous-ensemble fini $A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de A. Soit b un élément commun à G et à G^*. Si b est un élément libre de G, il est aussi un élément libre de G^*.*

Démonstration. — Soit B un système d'éléments générateurs libres de G qui contient l'élément b. Comme les éléments du système générateur B sont libres, G est le produit libre des groupes cycliques infinis engendrés par les éléments de B. C'est aussi le produit libre du groupe libre G' engendré par l'ensemble des éléments $B - \{b\}$ et du groupe cyclique G'' engendré par l'élément b. Les groupes G' et G'' ont en commun le seul élément 1. Soit $G^{**} = G' \cap G^*$ Le groupe G^* est le produit libre des deux groupes G^{**} et G''. En effet, on a l'inclusion $G^{**} \star G'' \subset G^*$ puisque le groupe G^* est libre et que G'' et G^{**} sont des sous-groupes de G^* qui ont en commun le seul élément 1. D'autre part, tout élément de G^* peut être obtenu en faisant le produit libre de G^{**} et de G''. En effet, le produit libre de G' et de G'' donne le groupe G tout entier, et comme G^* est un sous-groupe de G, on a $G^* \subset G' \star G''$, Or un élément $\neq 1$ du produit libre $G' \star G''$ est, comme on sait, de la forme (1) $c_1 d_1 c_2 d_2 \ldots e_r$ ou de la forme (2) $c_1 d_1 c_2 d_2 \ldots c_r d_r$, où r est un entier ≥ 1, c_i fait partie de $G'(G'')$, d_i fait partie de $G''(G')$ quel que soit $i = 1, 2, \ldots, r$. Comme G' et G'' ont en commun le seul élément 1 et que $G'' \subset G^*$, un élément de la forme (1) ou (2) ne peut faire partie du groupe G^* que si tous les éléments de chacun des deux ensembles $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\} \{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$ sont des éléments de G^*. Et comme les éléments de l'un de ces deux ensembles sont aussi des éléments de G', ils font partie de G^{**}. On a donc bien $G^* = G^{**} \star G''$. Et comme G^* est un groupe libre de rang k (il est engendré par k éléments libres), il s'ensuit que G^{**} qui est à son tour un groupe libre, en tant que sous-groupe du groupe libre G^*, est un produit libre de groupes cycliques infinis. Ces groupes cycliques sont en nombre fini (appelons ce nombre k') puisque G^* est le produit libre de ces groupes cycliques et de G'' et que G^* est de rang fini k. Et comme le rang est un invariant du groupe libre, on a $k' + 1 = k$. Soit B^{**} une base quelconque du groupe libre G^{**}. Alors l'ensemble $B^* = B^{**} \cup \{b\}$ constitue une base de G^*, base qui contient l'élément b. On voit donc bien que b est aussi un élément libre de G^*. C. Q. F. D.

(7) Le signe $\star$ sert à désigner le produit libre.

Corollaire 6. — *Quel que soit le groupe libre G engendré par un ensemble (fini ou infini) A d'éléments libres, étant donné un élément quelconque c du groupe G, pour savoir si cet élément est libre, il suffit de considérer le groupe libre G^* engendré par les éléments de A, en nombre fini, figurant dans la composition finie réduite des éléments de A qui représente c et de voir si c qui est un élément de G^* est libre ou non dans G^*. S'il est libre dans G^* il est libre aussi dans G.*

Cela simplifie beaucoup la recherche des éléments libres d'un groupe libre. En voici quelques exemples. Soit c un élément de G qui s'obtient par une composition finie de deux éléments a_1, a_2 de A : $c = f(a_1, a_2)$. Pour savoir si c est un élément libre de G ou non il suffit de voir s'il est libre ou non dans le groupe libre G^* engendré par les deux éléments a_1 et a_2. Pour démontrer que c est libre, il suffit de montrer qu'il existe un second élément d de G^* qui engendre avec c le groupe G^* puisque tout couple d'éléments générateurs d'un groupe libre de rang 2 est formé, comme on sait, d'éléments libres. Et pour prouver que deux éléments c et d sont générateurs de G^*, il suffit de prouver que les deux éléments a_1 et a_2 s'obtiennent par composition finie de c et de d. On établit ainsi aisément les critères suivants :

Critère 1. — *Soit $\varepsilon = \pm 1$ et soient m et n deux entiers quelconques. Alors l'élément $c = a_1^m a_2^{\varepsilon} a_1^n$ est libre. En effet, il suffit de lui associer l'élément a_1, pour obtenir un couple d'éléments générateurs de G^*.*

Critère 2. — *Soit $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, 3)$ et soit n un entier quelconque. Alors l'élément $c = (a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2})^n a_3^{\varepsilon_3}$ ainsi que l'élément $d = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2}$ sont libres. En effet, on a $d^{-n} c = a_1^{\varepsilon}$ et les deux éléments a_1, a_2 s'obtiennent par composition finie de c et d qui sont donc tous les deux libres. En particulier, l'élément $a_1 a_2$ est libre.*

Critère 3. — *Soit $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2)$ et soit n un entier $\neq 1, -1$. L'élément $c = (a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2})^n$ n'est pas pas libre. En effet, d'après le critère 2, l'élément $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2}$ est libre et c ne saurait être libre, en tant que puissance $\neq 1, -1$ d'un élément libre, car une telle puissance appartient à la classe $M^{(n)}$ nulle, dépourvue d'éléments libres.*

Critère 4. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres. Quel que soit le sous-ensemble fini $A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de A et quels que soient les entiers non nuls $n_1, n_2, \ldots, n_k$ dont l'un au moins n_i est égal à $+1$ ou à -1, l'élément $c = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$ est libre. En effet, soit G^* le groupe libre engendré par A^*. L'ensemble A_1 obtenu en remplaçant dans A^* l'élément a_i par c est générateur de G^* puisque a_i s'obtient aisément par composition finie de c et des autres éléments de A_1 et que $A_1 \supset A^* - \{a_i\}$. Donc c est un élément libre de G^* et, par suite, il est aussi un élément libre de G.*

Remarque 16. — Si une classe $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a \in A}$ contient au moins un élément

libre c de G, elle en contient une infinité. En effet, cette classe contient, en même temps que c, la classe entière des éléments de G conjugués à c, classe qui est infinie. Or tous les éléments de cette classe sont libres puisque, quelle que soit la base B de G et quel que soit l'élément d de G, l'ensemble B^* composé de tous les éléments de la forme dbd^{-1}, $b \in B$, est à son tour une base de G.

COROLLAIRE 7. — *Toute classe* $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, *où l'un au moins des nombres* λ_a *est égal à* 1, *contient une infinité d'éléments libres.*

Démonstration. — En effet, soit $A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ le sous-ensemble (fini) de A, tel que $\lambda_a > 0$ si $a \in A^*$ et $\lambda_a = 0$ si $a \in A - A^*$. Soit $\lambda_i = 1$. L'élément $c = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_k^{\lambda_k}$ de G fait partie de la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et, d'après le critère 4, c'est un élément libre de G^* et de G. Or, d'après la remarque 16, si la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ contient un élément libre, elle en contient une infinité.

PROPOSITION 24. — *Une classe* $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *ne contient aucun élément libre si le p. g. c. d. de n et de tous les nombres* λ_a *est* > 1.

Démonstration. — Soit $A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ le sous-ensemble fini de A, tel que $\lambda_a > 0$, si $a \in A^*$ et $\lambda_a = 0$, si $a \in A - A^*$. Le p. g. c. d. de n et de tous les nombres λ_a est égal à celui de n et des nombres $\lambda_{a_i} (i = 1, 2, \ldots, k)$. Soit $d = D(n, \lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \ldots, \lambda_{a_k})$. Si $d > 1$, on a l'inclusion

$$M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} \subset M^{(d)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}.$$

Or, aucune classe nulle ne contient, comme nous savons, d'éléments libres. Donc la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ est, elle aussi, dépourvue d'éléments libres.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 25. — *Quel que soit le groupe libre G engendré par un ensemble A (fini ou infini) d'éléments générateurs libres et quel que soit l'entier* $n \geq 2$, *toute classe* $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *contient des éléments non libres.*

Démonstration. — Envisageons une classe quelconque $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$. Soit $A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ le sous-ensemble fini de A, tel que $\lambda_{a_i} > 0 (i = 1, 2, \ldots, k)$, alors que $\lambda_a = 0$ quel que soit $a \in A - A^*$. Parmi les éléments de la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ figure l'élément

$$c = (a_1)^{\lambda_{a_1} + m_1 n} (a_2)^{\lambda_{a_2} + m_2 n} \ldots (a_k)^{\lambda_{a_k} + m_k n},$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sont des entiers quelconques. Supposons d'abord que

$n > 2$, et soit $n' = n - 1$. Montrons qu'on peut choisir les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_k$ de façon que $c \in \mathrm{M}^{(n')}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a \in A}$. En effet, il suffit de poser

$$m_i = n' - \lambda_{a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Alors

$$\lambda_{a_i} + (n' - \lambda_{a_i})\, n = n'(n - \lambda_{a_i}) \equiv 0 \pmod{n'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Donc pour ces valeurs de $m_1, m_2, \ldots, m_k$, l'élément c n'est pas libre.

Soit à présent $n = 2$. Alors $\lambda_{a_i} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Posons

$$n' = 3 \qquad \text{et} \qquad m_1 = m_2 = \ldots = m_k = 1.$$

Alors

$$\lambda_{a_i} + m_i n = 3 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad \text{et, par suite,} \quad c \in \mathrm{M}^{(3)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a \in A}.$$

Donc dans ce cas aussi l'élément c n'est pas libre et la proposition est démontrée.

Corollaire 8. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *un ensemble irréductibles de classes* $\mathrm{M}^{(n)}$, *générateur du groupe* Γ^n. *Choisissons un élément et un seul dans chaque classe* $\mathrm{M}^{(n)}$ *faisant partie de* $\mathfrak{M}$ *et soit* A^* *l'ensemble des éléments ainsi choisis. Tout système d'éléments générateurs libres de* G *peut être obtenu de cette façon, mais l'ensemble* A^* *n'est pas forcément générateur de* G. *Il suffit qu'il contienne un seul élément non libre de* G (*ce qui est possible, puisque d'après la proposition* 25 *toute classe* $\mathrm{M}^{(n)}$ *contient des éléments non libres de* G) *pour qu'il engendre un sous-groupe propre de* G.

Proposition 26. — *Quel que soit le groupe libre* G *engendré par un ensemble* A *d'éléments générateurs libres et quel que soit l'entier* $n \geq 2$, *toute classe* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$ *contient une infinité d'éléments non libres.*

Démonstration. — En effet d'après la proposition 25, toute classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$ contient au moins un élément non libre. Or si elle en contient un, elle en contient une infinité puisque cette classe contient avec tout élément c de G la classe entière des éléments de G conjugués à c. Or cette classe est infinie et si c n'est pas libre, dcd^{-1} n'est également pas libre, quel que soit l'élément d de G. La proposition 26 est donc démontrée.

Remarque 17. — Si $n = 2$, toute classe non nulle $\mathrm{M}^{(2)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$ d'éléments d'un groupe libre G engendré par un ensemble A (fini ou infini) d'éléments générateurs libres contient aussi bien des éléments libres que des éléments non libres.

En effet, soit $\mathrm{A}^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ l'ensemble fini (non vide) formé de tous les éléments a de A, tels que $\lambda_a > 0$. On a $\lambda_{a_i} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. L'élément $a_1 a_2 \ldots a_k$ appartient à la classe $\mathrm{M}^{(2)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a \in A}$ envisagée, et comme il est de la

forme $a_i f(a_2, \ldots, a_k)$, il est, comme on sait, un élément libre de G. D'autre part, quel que soit l'entier positif m, l'élément $a_1^{1+2m} a_2^{1+2m} \ldots a_k^{1+2m}$ qui fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(2)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a \in A}$ n'est pas libre, car il fait partie de la classe nulle $\mathrm{M}^{1+2m}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a \in A}$, classe qui est dépourvue d'éléments libres.

Remarque 18. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres. Soit n un entier quelconque ≥ 3, soit $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a \in A}$ une classe non nulle et soit $A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ l'ensemble (fini, non vide) formé de tous les éléments a de A, tels que $\lambda_a > 0$. Soit $n' = n - 1$ et soit $m_i = (n' - \lambda_{a_i}) n^{r_i} (i = 1, 2, \ldots, k)$, où r_i désigne un nombre entier quelconque. L'élément

$$c = a_1^{\lambda_{a_1} + m_1 n} a_2^{\lambda_{a_2} + m_2 n} \ldots a_k^{\lambda_{a_k} + m_k n}$$

de G est alors un élément non libre de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a \in A}$. En effet, par définition des classes $\mathrm{M}^{(n)}$,

$$c \in \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a \in A}.$$

Or

$$\lambda_{a_i} + m_i n = \lambda_{a_i} + (n' - \lambda_{a_i}) n^{r_i + 1} = n' n^{r_i + 1} - (n - 1) \lambda_{a_i} (n^{r_i} + n^{r_i - 1} + \ldots + 1) \equiv 0 \pmod{n'},$$

puisque $n - 1 = n'$. Donc $c \in \mathrm{M}^{n'}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a \in A}$ et, par suite, il n'est pas libre.

Proposition 27. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres. Soit c un élément quelconque de G. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les éléments de A qui figurent dans la composition finie réduite d'éléments de A qui représente c et soit ν_i le degré de c par rapport à a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.*

La condition nécessaire et suffisante pour que c appartienne à une classe $\mathrm{M}^{(n)}$ nulle, c'est que le p. g. c. d. d des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ soit > 1. En effet, si cette condition est satisfaite, $c \in \mathrm{M}^{(d)}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a \in A}$. Donc la condition est suffisante. Elle est aussi nécessaire. En effet, supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$, tel que $c \in \mathrm{M}^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a \in A}$. Mais alors, par définition de cette dernière classe, $\nu_i \equiv 0 \pmod{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ et, par suite, $d \geq n > 1$. La condition est donc aussi nécessaire.

C. Q. F. D.

Proposition 28. — *Tout groupe libre G engendré par un ensemble infini A d'éléments générateurs libres possède une infinité indénombrable de sous-groupes invariants.*

Démonstration. — L'ensemble A est au moins dénombrable. Soit $\mathfrak{m}$ sa puissance. On a $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$. Soit n un entier quelconque ≥ 2. Considérons le groupe $\Gamma^{(n)}$ associé au groupe G. Soit A^* un sous-ensemble quelconque de A et soit γ_{A^*} le sous-ensemble de $\Gamma^{(n)}$ formé de toutes les classes $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, telles que $\lambda_a = 0$ si $a \in A^*$, alors que $\lambda_{a'}$ peut prendre l'une quelconque des valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, si $a' \in A - A^*$. D'après (♀), le produit de deux éléments de γ_{A^*} fait partie du même ensemble et l'inverse de tout élément de γ_{A^*} fait également partie de γ_{A^*}. Donc l'ensemble γ_{A^*} est un groupe, sous-groupe propre de $\Gamma^{(n)}$ puisqu'il ne contient aucune des classes $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ pour lesquelles $\lambda_a > 0$ pour un élément au moins a de A^*. Soient A^* et A^{**} deux sous-ensembles distincts quelconques de A. Les sous-groupes correspondants γ_{A^*} et $\gamma_{A^{**}}$ sont distincts. En effet, comme $A^* \neq A^{**}$, il existe au moins un élément de l'un de ces deux ensembles qui ne fait pas partie de l'autre. Soit, pour fixer les idées, a^* un élément de A^* qui $\notin A^{**}$. Alors le groupe $\gamma_{A^{**}}$ contient la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, où $\lambda_{a^*} = 1$ alors que $\lambda_a = 0$ quel que soit $a \in A - \{a^*\}$, classe qui ne fait pas partie du groupe γ_{A^*}. Donc les deux groupes γ_{A^*} et $\gamma_{A^{**}}$ sont bien distincts. Comme l'ensemble A est infini de puissance $\mathfrak{m}$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de A est de puissance $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$. Donc l'ensemble des sous-groupes γ_{A^*} de $\Gamma^{(n)}$ est aussi de puissance supérieure à $\mathfrak{m}$. Or, d'après la proposition 18, la réunion g_{A^*} des classes M^n qui constituent les éléments du groupe γ_{A^*} est un sous-groupe invariant du groupe G. Et comme $g_{A^*} \neq g_{A^{**}}$, si A^* et A^{**} sont deux sous-ensembles différents de A, on voit bien que G possède une infinité indénombrable de sous-groupes invariants.

C. Q. F. D.

Remarque 19. — Quel que soit le nombre premier $p \geq 2$, l'ensemble G_p des éléments de G qui sont de degré $u_a \equiv 0 \pmod{p}$ par rapport à tout élément a d'un système A d'éléments générateurs libres de G est un sous-groupe invariant de G. En effet, soient b et c deux éléments quelconques de G_p et soit $u_a(v_a)$ le degré de $b(c)$ par rapport à a quel que soit $a \in A$. On a

$$u_a \equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{et} \qquad v_a \equiv 0 \pmod{p} \qquad (a \in A),$$

D'après la loi de composition des éléments d'un groupe libre, bc est de degré $u_a + v_a$ par rapport à a, quel que soit $a \in A$. Or

$$u_a + v_a \equiv 0 \pmod{p}.$$

Donc $bc \in G_p$. D'autre part, quel que soit l'élément b de G_p, de degré $u_a \equiv 0 \pmod{p}$ par rapport à tout $a \in A$, l'élément b^{-1} est de degré $-u_a \equiv 0 \pmod{p}$ par rapport à a et, par suite, $b^{-1} \in G_p$. Donc G_p est un groupe et ce groupe est un sous-groupe invariant de G puisque, quel que soit l'élément b de G_p et quel

que soit l'élément c de G, les deux éléments b et cbc^{-1} sont de même degré par rapport à tout élément de A.

Les p-classes. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble infini A d'éléments générateurs libres, soit n un entier ≥ 2, soit $\Gamma^{(n)}$ le groupe abélien associé à G et soit p un nombre premier quelconque ≥ 2, diviseur de n. Nous disons qu'une classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, élément de $\Gamma^{(n)}$, est une p-classe si $\lambda_a \equiv (\mathrm{mod}\, p)$, quel que soit $a \in A$. Comme $n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p)$, les p-classes forment un sous-groupe du groupe $\Gamma^{(n)}$ et leur réunion forme un sous-groupe invariant de G.

Proposition 29. — *Aucun élément d'une p-classe n'est un élément libre de G.*

Démonstration. — En effet, soit n est un multiple de p. Tout élément d'une p-classe est de degré $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ par rapport à chaque élément d'un ensemble A de générateurs libres de G. Il fait donc partie de la classe $M^{(p)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$ et, par suite, il n'est pas libre.

C. Q. F. D.

Corollaire 9. — *Si n est un nombre composé, il existe une infinité de classes* $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *qui sont dépourvues d'éléments libres de G. En effet, quel que soit le nombre premier p, diviseur de n, toute p-classe est dépourvue d'éléments libres d'après la proposition 29. Or le nombre de ces classes est infini. En effet, à tout sous-ensemble fini* A^* *de A correspond la p-classe* $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, *où*

$$\lambda_a = p \quad \text{si } a \in A^* \qquad \text{et} \qquad \lambda_a = 0 \quad \text{si } a \in A - A^*.$$

Les p-classes qui correspondent ainsi à deux sous-ensembles distincts finis de A sont distincts et comme A est infini et possède une infinité de sous-ensembles finis distincts, on voit bien qu'il existe une infinité de p-classes. Et chacune de ces classes est dépourvue d'éléments libres.

C. Q. F. D.

Remarque 20. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres. Considérons tous les groupes abéliens $\Gamma^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ associés à G. Montrons que les éléments neutres de ces groupes sont tous distincts. En effet, soient n et $n' < n$ deux nombres quelconques de la suite $2, 3, \ldots$ et soit d le p. g. c. d. de n et de n'. Si $d = n'$, la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$ est un sous-ensemble de $M^{(n')}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$. En effet, la classe $M^{(n')}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$ comprend tous les éléments de G qui sont de degré $\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, n')$ par rapport à tout élément de A et cet ensemble comprend tous les éléments de G qui sont de degré $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$

par rapport à chaque élément de A. Mais l'élément a'' fait partie de $M^{(n')}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$, alors qu'il fait défaut dans la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$. Donc les deux classes nulles envisagées sont distinctes. Et si $d < n'$, chacun des éléments a^n, $a^{n'}(a\in A)$ fait partie de l'une des deux classes nulles considérées alors qu'il fait défaut dans l'autre. Les deux classes nulles considérées sont donc bien distinctes.

Proposition 30. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble infini A d'éléments générateurs, soit n un entier* ≥ 2 *et soit* $\Gamma^{(n)}$ *le groupe abélien associé au groupe G. Soit* $\mathfrak{M}$ *l'ensemble comprenant toutes les classes* $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *pour chacune desquelles il existe un seul élément* $a^\star$ *de l'ensemble A, tel que* $\lambda_{a^\star} = 1$, *alors que* $\lambda_a = 0$ *pour tout* $a \in A - \{a^\star\}$. *L'ensemble* $\mathfrak{M}$ *est générateur du groupe* $\Gamma^{(n)}$.

Démonstration. — En effet, soit $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ un élément quelconque du groupe $\Gamma^{(n)}$. Soit $A^\star$ le sous-ensemble (fini ou vide) de A, tel que $\lambda_a > 0$, si $a \in A^\star$, alors que $\lambda_a = 0$ pour tout $a \in A - A^\star$. Soit $A^\star = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ et soit M_i la classe de l'ensemble $\mathfrak{M}$ pour laquelle $\lambda_{a_i} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. On a

$$M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} = (M_1)^{\lambda_{a_1}}(M_2)^{\lambda_{a_2}}\ldots(M_k)^{\lambda_{a_k}}.$$

On voit donc bien que tout élément du groupe $\Gamma^{(n)}$ peut être obtenu par composition finie des éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}$ qui est donc bien générateur du groupe $\Gamma^{(n)}$. On voit immédiatement que cet ensemble est irréductible et qu'il a la puissance de l'ensemble A.

Proposition 31. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A (fini ou infini) d'éléments générateurs libres. Soit n un entier* ≥ 2, *soit* $\Gamma^{(n)}$ *le groupe abélien associé à G et soit g un sous-groupe quelconque du groupe G. Alors l'ensemble* γ *des classes* $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *qui contiennent des éléments de g forment un sous-groupe du groupe* $\Gamma^{(n)}$.

Démonstration. — En effet, soit $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ un élément quelconque de l'ensemble γ. Cette classe contient un élément b du groupe g. Or l'élément b^{-1} de g appartient à la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ n - \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$. Donc l'ensemble γ, contient, avec tout élément de $\Gamma^{(n)}$, son inverse. D'autre part, considérons deux éléments quelconques de l'ensemble γ : $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$. Soit b un élément de g qui appartient à la première de ces classes et c un élément de g qui fait partie de la seconde. L'élément bc de g appartient à la classe $M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} M^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et, par suite, l'ensemble γ contient avec tout couple d'éléments du groupe $\Gamma^{(n)}$ aussi le

produit de ces éléments. L'ensemble γ est donc bien un sous-groupe du groupe $\Gamma^{(n)}$.

C. Q. F. D.

Proposition 32. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres. Soit B la réunion des classes* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$ $(n=2, 3, \ldots)$. *L'ensemble B est générateur du groupe G.*

Démonstration. — En effet, quel que soit l'élément a de A et quel que soit l'entier $m>2$, l'élément a^m fait partie de la classe nulle $\mathrm{M}^{(m)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$, alors que l'élément a^{-m+1} appartient à la classe $\mathrm{M}^{(m-1)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A}$. Donc le produit $a^{-m+1}a^m=a$ fait partie du groupe engendré par B. Cela étant quel que soit l'élément a de A, l'ensemble B est bien générateur de G.

C. Q. F. D.

Proposition 33. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres et soit n un entier $\geqq 2$. Aucune classe* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *ne saurait contenir plus d'un élément d'un même système d'éléments générateurs libres de G.*

Démonstration. — En effet, tout élément a^* de A appartient à la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, où $\lambda_{a^*}=1$ et $\lambda_a=0$, $a\in A-\{a^*\}$, classe qui ne contient que le seul élément a^* de A. Il existe d'ailleurs de nombreuses classes $\mathrm{M}^{(n)}$, dont la classe nulle, qui ne contiennent aucun élément de A. Soit à présent B un autre système quelconque formé d'éléments libres générateurs de G. Tout élément b^* de B appartient à la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B}$, telle que $\mu_{b^*}=1$, alors que $\mu_b=0$, quel que soit $b\in B-\{b^*\}$ et la classe en question ne contient pas d'antre élément de B. Or, les classes $\mathrm{M}^{(n)}$ ayant un caractère intrinsèque, indépendant du système d'éléments générateurs libres de G à partir duquel elles ont été définies, la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} b \\ \mu_b \end{pmatrix}_{b\in B}$ se confond avec une classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et, par suite, aucune des classes $\mathrm{M}^{(n)}$ ne contient plus d'un élément de n'importe quel système d'éléments générateurs libres du groupe G.

Il s'ensuit qu'aucun système d'éléments générateurs libres de G ne saurait contenir deux éléments d'une même classe $\mathrm{M}^{(n)}$, quel que soit $n=2, 3, \ldots$.

Classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ dépendantes et indépendantes. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble infini A d'éléments générateurs libres, soit n un

entier ≥ 2 et soit $\Gamma^{(n)}$ le groupe abélien associé à G et comprenant toutes les classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$.

Soit d'abord $\mathfrak{M}_t$ un sous-ensemble fini de $\Gamma^{(n)}$ composé des classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a^i \end{pmatrix}_{a\in A}$ $(i=1, 2, \ldots, t)$. Nous disons que ces t classes sont indépendantes si l'égalité

$$\text{(I)} \qquad \left[\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a^1 \end{pmatrix}_{a\in A}\right]^{\alpha_1}\left[\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a^2 \end{pmatrix}_{a\in A}\right]^{\alpha_2}\cdots\left[\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a^t \end{pmatrix}_{a\in A}\right]^{\alpha_t} = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{a\in A},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ sont des entiers, implique que $\alpha_i \equiv 0 \pmod{n}$ $(i=1, 2, \ldots, t)$ et nous disons que les t classes considérées sont dépendantes ou liées s'il existe un système d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ dont l'un au moins n'est pas congru à 0 modulo n et qui satisfont l'égalité (I).

Soit $\mathrm{A}^\star = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ le sous-ensemble fini de A, comprenant tous les éléments a de A, tels que l'un au moins des nombres $\lambda_a^i (i=1, 2, \ldots, t)$ est >0. Soit $\mathrm{G}^\star$ le groupe libre engendré par $\mathrm{A}^\star$. Répartissons les éléments de $\mathrm{G}^\star$ en classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A^\star}$. On a

$$\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A^\star} \subset \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}.$$

Il ressort aussitôt de la loi de composition des classes $\mathrm{M}^{(n)}$ que la condition nécessaire et suffisante pour que les t classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a^i \end{pmatrix}_{a\in A^\star}$ soient indépendantes est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que les t classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a^i \end{pmatrix}_{a\in A}$ soient indépendantes et *vice versa*. Les propositions 5-7 permettent donc de décider si les classes de $\mathfrak{M}_t$ sont indépendantes ou si elles sont liées.

Soit maintenant $\mathfrak{M}$ un sous-ensemble infini de $\Gamma^{(n)}$. Nous dirons que les classes de cet ensemble $\mathfrak{M}$ sont indépendantes si, quel que soit le sous-ensemble fini $\mathfrak{M}_t$ de $\mathfrak{M}$, il est formé de classes indépendantes dans le sens précisé plus haut.

On démontre sans peine que quel que soit l'ensemble B formé d'éléments libres, générateur de G, et quel que soit l'entier $n \geq 2$, l'ensemble des classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ qui contiennent des éléments de B est formé de classes indépendantes. De même, tout ensemble irréductible de classes $\mathrm{M}^{(n)}$, générateur du groupe $\Gamma^{(n)}$ est formé de classes $\mathrm{M}^{(n)}$ indépendantes.

Proposition 34. — *Quel que soit le sous-groupe g du groupe libre G engendré par l'ensemble A d'éléments générateurs libres et quelles que soient les classes* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *et* $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ *qui contiennent des éléments de g, les deux ensembles*

$$\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} \cap g \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A} \cap g$$

sont d'égale puissance.

Démonstration. — Soit g un sous-groupe quelconque du groupe libre G et soient $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ deux classes $\mathrm{M}^{(n)}$ qui contiennent l'une et l'autre au moins un élément de g. Montrons que les ensembles

$$g_1 = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} \cap g \qquad \text{et} \qquad g_2 = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A} \cap g$$

sont d'égale puissance. En effet, soit c un élément quelconque de G qui fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$, où ν_a est le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui satisfait la congruence

$$\nu_a \equiv \mu_a - \lambda_a \pmod{n},$$

quel que soit l'élément a de A. Soit d_1 un élément de g qui fait partie de l'ensemble g_1 et d_2 un élément de l'ensemble g_2. Comme g est un groupe, l'élément $d_3 = d_1^{-1} d_2$ fait partie de g. Or cet élément fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$. Donc, d'après la loi de composition des classes $\mathrm{M}^{(n)}$,

$$\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A} \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A} = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble $g_1 d_3$ est contenu dans la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$. Et comme tous les éléments de $g_1 d_3$ font partie de g, puisque g est un groupe qui contient g_1 et d_3, et que la partie commune à $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et à g est l'ensemble g_2, on a l'inclusion

$$(+) \qquad g_1 d_3 \subset g_2.$$

Soit $d_4 = d_2^{-1}$. C'est un élément du groupe g qui fait partie de la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ n - \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A}$ et comme

$$\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \mu_a \end{pmatrix}_{a\in A} \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ n - \nu_a \end{pmatrix}_{a\in A} = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A},$$

l'ensemble $g_2 d_4$ est contenu dans la classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} a \\ \lambda_a \end{pmatrix}_{a\in A}$. Et comme il est composé uniquement d'éléments de g, on a aussi l'inclusion

$$(++) \qquad g_2 d_4 \subset g_1.$$

Or les deux inclusions $(+)$ et $(++)$ montrent que les deux ensembles g_1 et g_2 sont d'égale puissance.

C. Q. F. D.

Proposition 35. — *Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A de puissance $\mathfrak{m}$ d'éléments générateurs libres. Alors G possède une infinité de puissance supérieure à $\mathfrak{m}$ de sous-groupes qui ne sont ni invariants, ni maxima.*

Démonstration. — En effet, quel que soit le sous-ensemble A^* de A, il engendre un sous-groupe propre G^* de G et à deux sous-ensembles distincts A^* et A^{**} de A correspondent évidemment deux sous-groupes distincts G^* et G^{**} de G. Le sous-groupe G^* engendré par un sous-ensemble propre A^* de A n'est pas invariant. En effet, quel que soit l'élément a de l'ensemble $A - A^*$, le transmué d'un élément non neutre quelconque de G^* par a ne fait pas partie de G^* puisque A est formé d'éléments libres. D'autre part, G^* n'est pas un sous-groupe maximum de G puisque, quel que soit l'élément a de $A - A^*$ et quel que soit l'entier $m \neq 0, 1, -1$, l'ensemble $A^* \cup a^m$ engendre un groupe G_1 qui contient G^* et qui ne saurait être confondu avec G puisqu'il ne contient pas l'élément a. La proposition est donc démontrée.

Remarque 21. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments libres. Soit n un entier quelconque > 1, mais ne dépassant pas le nombre d'éléments de A, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n éléments quelconques de A et soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ n entiers quelconques, $\neq 0$, $+1$ ou -1. Alors l'élément $a = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}$ du groupe G n'est pas libre, il ne fait partie d'aucun système d'éléments générateurs libres de G.

En effet, soit $A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et soit G^* le groupe libre engendré par A^*. D'après la proposition 23, pour prouver que l'élément a n'est pas libre dans G, il suffit de prouver que a est un élément non libre du groupe G^*. Or G^* est un groupe libre à un nombre fini n d'éléments générateurs libres, et l'on sait (*voir*, par exemple, Kurosh, *Théorie des groupes*, 2e édition russe, p. 252 et suiv.) que quel que soit le système $b_1, b_2, \ldots, b_n$ formé de n éléments générateurs de G^*, ces n éléments sont à leur tour libres, et que le groupe G^* ne saurait être engendré par moins de n éléments. On le démontre en prouvant que si les éléments $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont générateurs de G^*, chacun des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ peut être obtenu à partir de l'ensemble $B^* = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ en effectuant un nombre fini d'opérations de deux types. L'opération du premier type consiste à remplacer un élément c dans l'ensemble considéré de générateurs de G^* par son inverse c^{-1}. L'opération du second type consiste à remplacer un élément quelconque c de l'ensemble considéré par fc ou par cf, f étant une composition finie quelconque d'éléments $\neq c$ du système envisagé de générateurs de G^*. Or il est clair que si un ensemble $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ formé de n éléments de G^* comprend parmi ses éléments l'élément a, par application finie des deux procédés que nous venons de décrire, il est impossible d'en déduire au moins un des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et, par suite, l'ensemble B ne saurait être générateur de G^*, ce qui démontre que a ne saurait faire partie d'aucun ensemble formé de n éléments générateurs de G^* et, par suite, qu'il n'est pas libre. N'étant pas libre dans G^*, il ne saurait également pas être libre dans G.

Remarque 22. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres. Soit A^* un sous-ensemble propre de A et soit G^* le

groupe libre qu'il engendre. Soit B un second système d'éléments générateurs libres de G. Chaque élément de A^* peut être obtenu par composition finie d'éléments de B, mais l'ensemble d'éléments de B nécessaire à former, par composition finie, tous les éléments de A^*, peut être de puissance supérieure à celle de A. Il peut même se confondre avec l'ensemble B tout entier. En voici un exemple. Soit G le groupe libre engendré par les cinq éléments libres de l'ensemble $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, soit $A^* = \{a_1, a_2, a_3\}$ et soit $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, où

$$b_1 = a_1^6 a_2, \qquad b_2 = a_1^5 a_4, \qquad b_3 = a_1^4 a_4, \qquad b_4 = a_3^6 a_5, \qquad b_5 = a_3^5 a_5.$$

L'ensemble B ne contient aucun sous-ensemble formé de trois éléments générateurs du groupe G^* engendré par A^*. On a

$$b_2 b_3^{-1} = a_1, \qquad a_1^{-6} b_1 = a_2, \qquad a_1^{-5} b_2 = a_4, \qquad b_4 b_5^{-1} = a_3 \qquad \text{et} \qquad a_3^{-5} b_5 = a_5.$$

Pour obtenir par composition finie les trois éléments de A^* à partir de B, il faut utiliser les cinq éléments de B.

L'élément b_1 fait partie de G^* et c'est un élément libre de G^*.

Remarque 23. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A de puissance $\mathfrak{m}$ d'éléments générateurs libres. Alors l'ensemble des automorphismes extérieurs de G est de puissance $\geqq 2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$. En effet, soit A_1 un sous-ensemble quelconque de A. Remplaçons dans A chaque élément de A_1 par son inverse. On obtient de nouveau un système A^* d'éléments générateurs libres de G. Faisons correspondre à tout élément a de A l'élément $a^* = a^{-1}$ si $a \in A_1$, ou l'élément $a^* = a$ si $a \in A - A_1$ et faisons correspondre à toute composition finie $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ d'éléments de G la même composition $f(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*)$ des éléments correspondants de A^*. Cette correspondance est un automorphisme extérieur de G et à deux sous-ensembles différents de A correspondent ainsi deux automorphismes distincts de G. L'ensemble des automorphismes extérieurs du groupe G est donc bien de puissance supérieure à $\mathfrak{m}$.

C. Q. F. D.

Remarque 24. — Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A d'éléments générateurs libres, de puissance $\mathfrak{m}$. Il existe alors un ensemble de puissance $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$ de sous-groupes propres de G qui sont holoédriquement isomorphes au groupe G. En effet, soit A_1 un sous-ensemble quelconque de A. Faisons correspondre à tout élément a_1 de A_1 un entier $m_{a_1} \neq 0, +1, -1$, mais à part cela quelconque et remplaçons dans l'ensemble A tout élément a_1 de A_1 par l'élément $a_1^{m_{a_1}}$. Soit A^* l'ensemble ainsi obtenu à partir de A et soit $G_{A_1}^*$ le groupe qu'il engendre. G est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de A alors que $G_{A_1}^*$ est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les éléments de A^*. $G_{A_1}^*$ est un sous-groupe propre de G, puisque aucun élément de l'ensemble A_1 contenu dans G ne fait partie de $G_{A_1}^*$. Or les

groupes G et $G^*_{A_1}$ sont (holoédriquement) isomorphes. Pour établir un isomorphisme entre ces deux groupes libres, il suffit de faire correspondre à tout élément a_1 de A_1 l'élément $a_1^{m_{a_1}}$ de A^*, à tout élément a de $A - A_1$ le même élément a de A^*, et à toute composition finie d'éléments de A la même composition des éléments correspondants de A^*. Et comme à deux sous-ensembles distincts A_1 et A_2 de l'ensemble A correspondent deux sous-groupes propres distincts $G^*_{A_1}$ et $G^*_{A_2}$ de G, notre assertion est démontrée.

Généralisations.

III. Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A fini ou infini, d'éléments générateurs libres. Soit A^* un sous-ensemble propre quelconque (fini ou infini) de A et soit n un entier ≥ 2. On peut répartir les éléments de G en classes $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$ comme suit. Soit c un élément quelconque du groupe G, soit u_a son degré par rapport à l'élément a de A^* et soit λ_a le nombre de la suite 0, 1, ..., $n-1$ qui satisfait la congruence $u_a \equiv \lambda_a \pmod n$, quel que soit $a \in A^*$. Nous dirons que c fait partie de la classe $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$. On répartit ainsi tous les éléments de G en classes d'équivalence disjointes deux à deux, dont chacune est infinie et contient avec tout élément c de G la classe entière des éléments de G conjugués à c. Si l'on appelle produit de deux telles classes $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$ et $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \mu_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$ l'ensemble des éléments de G de la forme bc,

$$b \in M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}, \qquad c \in M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \mu_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*},$$

on démontre sans peine que

$$M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*} M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \mu_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*} = M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \nu_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*},$$

où ν_a désigne l'élément de la suite 0, 1, ... $n-1$ qui satisfait la congruence

$$\nu_a \equiv \lambda_a + \mu_a \pmod n,$$

quel que soit $a \in A^*$.

Avec cette loi de composition, les classes $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$ forment un groupe abélien $\Gamma^{(n)*}$ dont l'élément neutre est la classe nulle $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$, l'inverse de la classe $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$ étant la classe $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ n-\lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$. Les groupes $\Gamma^{(n)*}$ sont également associés au groupe libre G et permettent de déceler de nombreux sous-groupes invariants de G. La plupart des résultats établis pour les groupes $\Gamma^{(n)}$ subsistent pour les groupes $\Gamma^{(n)*}$, mais les classes $M^{(n)}\left(\begin{matrix} a \\ \lambda_a \end{matrix}\right)_{a\in A^*}$ n'ont

plus un caractère intrinsèque et la classe nulle $M^{(n)}\left(\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right)_{a\in A}$ peut contenir des éléments libres de G.

IV. Soit G un groupe libre engendré par un ensemble A (fini ou infini) d'éléments générateurs libres. Faisons correspondre à tout élément a de A un entier $n_a \geq 2$. Soit c un élément quelconque de G, soit u_a son degré par rapport à l'élément a de A et soit λ_a le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n_a - 1$ qui satisfait la congruence $\lambda_a \equiv u_a \pmod{n_a}$ quel que soit $a \in A$. Nous dirons que l'élément c fait partie de la classe $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A}$. On répartit ainsi les éléments de G en classes disjointes, dont chacune est infinie et contient avec tout élément c de G la classe entière des éléments de G conjugués à c. Appelons produit de deux classes $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A}$ et $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \mu_a\end{matrix}\right)_{b\in A}$ l'ensemble des éléments de G de la forme bc,

$$b \in M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A}, \qquad c \in M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \mu_a\end{matrix}\right)_{a\in A}.$$

On a

$$M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A} M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \mu_a\end{matrix}\right)_{a\in A} = M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \nu_a\end{matrix}\right)_{a\in A},$$

où ν_a est le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n_a - 1$ qui satisfait la congruence

$$\nu_a \equiv \lambda_a + \mu_a \pmod{n_a},$$

quel que soit $a \in A$. Avec cette loi de composition les classes $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A}$ forment un groupe abélien $\Gamma^{\{n_a\}}$ qui est également associé au groupe libre G, dont l'élément neutre est la classe nulle $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ 0\end{matrix}\right)_{a\in A}$, l'inverse d'une classe $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A}$ étant la classe $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ n_a-\lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A}$. Les groupes $\Gamma^{\{n_a\}}$ possèdent des propriétés analogues à celles des groupes $\Gamma^{(n)}$ et permettent à leur tour de déceler de nombreux sous-groupes invariants du groupe libre G. Mais les classes $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A}$ n'ont pas un caractère intrinsèque et la classe nulle $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ 0\end{matrix}\right)_{a\in A}$ contient des éléments libres de G.

Si, au lieu de A, on considère un sous-ensemble quelconque A^* de A et si l'on fait correspondre à tout élément a de A^* un entier $n_a \geq 2$, cet entier pouvant varier d'un élément à l'autre de A^*, en employant les mêmes notations que ci-dessus, on peut répartir les éléments de G en classes $M^{\{n_a\}}\left(\begin{matrix}a\\ \lambda_a\end{matrix}\right)_{a\in A^*}$ disjointes deux à deux dont chacune contient avec tout élément c de G la classe entière des éléments de G conjuguée à c et l'on peut définir pour ces classes une loi de composition commutative et associative qui conduit à de nouveaux groupes abéliens associés au groupe G.

V. Soit G un groupe libre non cyclique, engendré par un ensemble A (fini ou infini) d'éléments générateurs libres. Soit n un entier ≥ 2, soit t un entier fixe ≥ 2, mais non supérieur au nombre d'éléments de A, soit c un élément quelconque du groupe G, soit $A_t = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ un système quelconque formé de t éléments distincts de A, soit u_{A_t} le degré de c par rapport à l'ensemble des éléments de A_t et soit λ_{A_t} le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui satisfait la congruence $\lambda_{A_t} \equiv u_{A_t} \pmod{n}$. Nous dirons que c est de classe $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \lambda_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A}$. On répartit ainsi à nouveau l'ensemble des éléments de G en classes d'équivalence, disjointes deux à deux, dont chacune est infinie et contient, avec tout élément c de G la classe entière des éléments de G conjugués à c. Appelons produit de deux classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \lambda_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A}$ et $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \mu_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A}$ l'ensemble des éléments de G de la forme bc,

$$b \in \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \lambda_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A} \quad \text{et} \quad c \in \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \mu_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A}.$$

On a

$$\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \lambda_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A} \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \mu_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A} = \mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \nu_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A},$$

où ν_{A_t} est le nombre de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ qui satisfait la congruence

$$\nu_{A_t} \equiv \lambda_{A_t} + \mu_{A_t} \pmod{n}$$

quel que soit le système A_t formé de t éléments distincts de A. Avec cette loi de composition, les classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \lambda_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A}$ forment à leur tour un groupe abélien $\Gamma_t^{(n)}$ dont l'élément neutre est la classe nulle $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ 0 \end{pmatrix}_{A_t \subset A}$. En faisant varier n et t, on associe ainsi au groupe libre G encore une infinité de groupes abéliens qui permettent de déceler de nombreux sous-groupes invariants de G. Ici encore les classes $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \lambda_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A}$ n'ont pas un caractère intrinsèque et la classe nulle $\mathrm{M}^{(n)}\begin{pmatrix} A_t \\ \lambda_{A_t} \end{pmatrix}_{A_t \subset A}$ peut contenir des éléments libres de G.

En prenant, au lieu de A un sous-ensemble propre quelconque Λ^* de A, on peut encore répartir d'une infinité de façons en classes d'équivalences les éléments de G en se donnant un entier fixe quelconque $n \geq 2$ et en considérant le degré de tout élément c de G par rapport aux systèmes de t éléments de A^*. Chacune de ces classes contient, avec tout élément c de G la classe entière des éléments de G conjugués à c et l'on peut définir pour ces nouvelles classes une loi de composition commutative et associative qui conduit à un nouvel ensemble de groupes abéliens associés à G.

Tous ces groupes abéliens sont intimement liés à la structure d'un groupe

libre, ils permettent de déceler une infinité indénombrable de sous-groupes invariants dans tout groupe libre engendré par un ensemble infini A d'éléments générateurs libres, ils facilitent la recherche des éléments libres de G et ils permettent d'établir l'existence de classes très étendues d'éléments non libres.

ESQUISSE D'UNE THÉORIE

DE LA

MULTIPLICATION DES VARIABLES ALÉATOIRES

PAR M. PAUL LÉVY.

(DÉDIÉE A LA MÉMOIRE D'AUREL WINTNER.)

1. INTRODUCTION. — L'addition de deux ou plusieurs variables aléatoires (v. a.) est un des problèmes les plus classiques du calcul des probabilités. Par contre leur multiplication ne semble pas avoir été étudiée d'une manière systématique. L'objet du présent travail, où nous nous bornons à considérer le produit $X = UV$ de deux variables aléatoires indépendantes, est de commencer à combler cette lacune. Peut-être certaines parties, et notamment les formules fondamentales rappelées au n° 2, paraîtront-elles triviales. Nous pensons que, dans l'ensemble, la plupart des résultats sont nouveaux.

Il est entendu une fois pour toutes que U *et* V *sont indépendants.* Nous ne le répéterons pas chaque fois. Quand nous ne préciserons pas le contraire, leurs valeurs seront supposées réelles.

Au n° 2, nous indiquons les formules qui, dans le cas réel, permettent d'exprimer la loi dont dépend X en fonction des lois de U et V. Au n° 3, après avoir défini une fonction $G(x)$ qui définit la dissymétrie de X, nous l'exprimerons en fonction des fonctions analogues relatives à U et V.

Au n° 4, nous énonçons les problèmes précis qui seront considérés dans la suite. Les deux premiers (A et B) sont ceux qui, par l'introduction des logarithmes, se ramènent formellement aux problèmes fondamentaux de l'arithmétique classique des lois de probabilité. Le problème D se ramène de même à celui des lois indéfiniment divisibles, problème dont la solution est bien connue. Quant au problème C, c'est la recherche des cas où la loi de X est symétrique.

Si nous venons de parler de réduction *formelle* à des problèmes connus, c'est que, sauf dans le cas où U, V et par suite X, sont des nombres réels positifs ou nuls, leurs logarithmes sont des nombres complexes définis $\mathrm{mod}\, 2\pi i$. Le cas de

l'addition des variables aléatoires complexes définies mod $2\pi i$ n'ayant pas été spécialement étudié, c'est à l'étude de ce cas que nous conduisent tout naturellement les problèmes relatifs au produit $X = UV$.

Les n^{os} 4 à 8 contiennent l'étude des problèmes ainsi posés. Certains sont complètement résolus. D'autres appellent de nouvelles recherches. Nous utilisons souvent la méthode, reposant sur l'emploi des logarithmes, qui vient d'être indiquée. Mais au n° 6 nous appliquons une autre méthode, qui repose sur la relation bien connue qui existe entre les moments de U, V et X.

Enfin le n° 9 est consacré à l'analyse du Mémoire de A. Wintner [4] qui semble avoir été le dernier travail de cet éminent savant, décédé subitement quand il était encore en pleine activité. C'est ce Mémoire qui m'a donné l'idée du présent travail, bien qu'il n'y soit pas question de variables aléatoires. Mais, si Wintner part d'un problème tout mis en équations, un probabiliste ne peut pas ne pas y voir l'énoncé sous-jacent : *définir les v. a. de la forme* $X = UV$, *où* U *est une v. a. laplacienne réduite, qui dépendent de lois indéfiniment divisibles* (i. d.). C'est donc un problème qui se rattache à notre sujet.

Malheureusement il y a dans ce Mémoire, à côté de quelques inadvertances faciles à corriger, une lacune qui conduit à douter du théorème fondamental. La condition que Wintner a cru nécessaire et suffisante pour que X ait à la fois les deux propriétés qu'il considère est manifestement suffisante. Mais il n'est pas prouvé qu'elle soit nécessaire. Il y a donc un problème qui reste ouvert, et qui semble intéressant. De toute façon il y a un point qui reste acquis : la découverte d'une importante classe de lois de probabilité qui sont des solutions du problème de Wintner.

2. Notations et formules fondamentales. — Nous désignerons par $F(x)$, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ les fonctions de répartition des v. a. réelles X, U et V, par x_h, u_k, $v_l (h, k, l = 1, 2, \ldots)$ les valeurs de ces variables ayant des probabilités positives, et par a_h, b_k, c_l les probabilités correspondantes. Si $X = UV$, on a

$$F(x-0) = \iint_{uv<x} dF_1(u)\, dF_2(v) \tag{1}$$

et

$$F(x+0) - F(x-0) = \sum_{u_k v_l = x} b_k c_l. \tag{2}$$

D'autre part, en introduisant les fonctions caractéristiques $F^*(t)$, $F_1^*(t)$ et $F_2^*(t)$, c'est-à-dire les transformées de Fourier-Stieltjes de $F(x)$, $F_1(u)$ et $F_2(v)$, on a

$$F^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(vt)\, dF_2(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2^*(ut)\, dF_1(u). \tag{3}$$

Ces trois formules sont valables dans tous les cas, et, si les discontinuités de

$F_1(u)$ et $F_2(v)$ sont connues, la seconde définit celles de $F(x)$. Les x_h sont les produits $u_k v_l$, et, pour ces valeurs, la formule (2) détermine a_h qui est, par définition, le premier membre de cette formule.

Si les lois de U et V sont absolument continues, celle de X l'est aussi, et, les dérivées de $F(x)$, $F_1(u)$ et $F_2(v)$ étant désignées par $f(x)$, $f_1(u)$ et $f_2(v)$, on a

$$(4) \qquad f(x) = \int f_1(u) f_2\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u} = \int f_1\left(\frac{1}{u'}\right) f_2(xu')\frac{du'}{u'},$$

formule dans laquelle on peut évidemment intervertir f_1 et f_2. Dans le cas le plus général, $f_1(u)$ et $f_2(v)$ sont définis presque partout, et les intégrales qui figurent dans la formule (4) représentent une fonction sommable, qui n'est qu'une partie de $f(x)$, dont on a ainsi une borne inférieure. Il faut noter que, même si $f_1(u)$ et $f_2(v)$ sont presque partout nuls, il peut arriver que $f(x)$ soit partout positif.

Il est enfin évident que si, pour n entier et α réel, on pose

$$(5) \quad \begin{cases} E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, dF(x), & E'_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, dF_1(x), & E''_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, dF_2(x), \\ \overline{E}_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha\, dF(x), & \overline{E}'_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha\, dF_1(x), & \overline{E}''_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha\, dF_2(x), \end{cases}$$

on a

$$(6) \qquad E_n = E'_n E''_n, \qquad \overline{E}_\alpha = \overline{E}'_\alpha \overline{E}''_\alpha.$$

On sait que, pour $n > 0$, E_n, E'_n et E''_n sont les *moments d'ordre n* de X, U et V, et $\overline{E}_n$, $\overline{E}'_n$, $\overline{E}''_n$ sont ceux de $|X|$, $|U|$ et $|V|$. Les premiers sont majorés par les seconds, auxquels ils sont égaux, soit si n est pair, soit si la v. a. considérée est presque sûrement (pr. s.) ≥ 0.

Il peut arriver que l'expression (6) de E_n soit de la forme $0 \times \infty$. Sauf si le facteur nul correspond à une v. a. pr. s. nulle, $\overline{E}_n$ est alors infini, et si, $\alpha = n$ est un entier impair, E_n est indéterminé.

3. Symétrie et dissymétrie. — Nous allons introduire une fonction $G(x)$, définie pour $x \geq 0$, qui caractérisera la dissymétrie de la loi de X, et qui sera identiquement nulle si cette loi est symétrique et dans ce cas seulement. Dans le cas absolument continu, la dérivée $g(x)$ de $G(x)$ sera définie par la formule

$$(7) \qquad g(x) = f(x) - f(-x),$$

c'est-à-dire que $\frac{g(x)}{2}$ est la partie impaire de $f(x)$. Il suffit évidemment de la connaître pour $x > 0$. Cela nous conduit pour $G(x)$ à la définition

$$(8) \qquad G(0) = 0, \qquad dG(x) = d[F(x) + F(-x)] \qquad (x > 0).$$

Il est évident que cette fonction a bien la propriété que nous voulions réaliser. Elle est à variation bornée, mais, en général, n'est pas monotone.

Si nous désignons par α, α' et α'' les sauts de $G(x)$, $F(x)$ et $F(-x)$ au point x, on a évidemment $\alpha = \alpha' - \alpha''$. Si nous désignons par ξ_h $(h = 1, 2, \ldots)$ les points où $G(x)$ est discontinu, et par α_h les sauts qui leur correspondent, il en résulte que les ξ_h sont tous des $|x_h|$, mais ils peuvent n'être qu'une partie des $|x_h|$. En particulier, si $F(x)$ a un saut à l'origine, c'est-à-dire si

$$\Pr(X = 0) > 0,$$

cela n'a aucun effet sur $G(x)$, sinon de donner pour sa variation totale la borne supérieure $1 - \Pr(X = 0) < 1$.

S'il s'agit de la v. a. U, nous écrirons $G_1(u)$, η_k, β, β_k au lieu de $G(x)$, ξ_h, α, α_h; s'il s'agit de V, nous écrirons $G_2(v)$, ζ_l, γ, γ_l. Si un nombre positif x a une représentation et une seule de la forme $\eta_k \zeta_l$, il résulte de (2) que

$$\alpha' = \beta'_k \gamma'_l + \beta''_k \gamma''_l, \qquad \alpha'' = \beta'_k \gamma''_l + \beta''_k \gamma'_l, \tag{9}$$

et par suite

$$\alpha = \alpha' - \alpha'' = (\beta'_k - \beta''_k)(\gamma'_l - \gamma''_l) = \beta_k \gamma_l. \tag{10}$$

On en déduit que dans le cas général

$$\alpha = G(x+0) - G(x-0) = \sum_{\eta_k \zeta_l = x} \beta_k \gamma_l, \tag{11}$$

formule qui définit parfaitement les discontinuités de $G(x)$ en fonction de celles de $G_1(u)$ et $G_2(v)$.

En partant de la formule (1), et de la définition (7) de $G(x)$, on obtient de même la formule

$$G(x-0) = \iint_{u,\, v>0;\, uv<x} dG_1(u)\, dG_2(v) \qquad (x > 0), \tag{12}$$

qui dans le cas le plus général donne $G(x)$ en fonction de $G_1(u)$ et $G_2(v)$. En effectuant l'intégration par rapport à v, il vient

$$G(x) = \int_0^\infty G_2\left(\frac{x}{u}\right) dG_1(u), \tag{13}$$

formule où x peut être $x - 0$ ou $x + 0$. On peut déduire de ces formules une vérification de la formule (11); inversement, en partant de (11), on peut vérifier ces formules dans le cas totalement discontinu et, par un passage à la limite, arriver au cas général.

Si les fonctions $G_1(u)$ et $G_2(v)$ sont absolument continues, $G(x)$ l'est aussi, et l'on a entre leurs dérivées $g(x)$, $g_1(u)$, $g_2(v)$ la relation

$$g(x) = \int_0^\infty g_1(u) g_2\left(\frac{x}{u}\right) \frac{du}{u} = \int_0^\infty g_1\left(\frac{1}{u'}\right) g_2(xu') \frac{du'}{u'}. \tag{14}$$

Enfin, en introduisant les moments

$$\mathcal{E}_n = \int_0^\infty x^n \, dG(x), \qquad \overline{\mathcal{E}}_n = \int_0^\infty x^n \, |dG(x)|, \tag{15}$$

on a évidemment

$$|\mathcal{E}_n| \leq \overline{\mathcal{E}}_n \leq \overline{E}_n, \tag{16}$$

et les moments analogues relatifs à $G_1(x)$ et $G_2(x)$ étant désignés par $\mathcal{E}'_n$, $\overline{\mathcal{E}}'_n$, $\mathcal{E}''_n$, $\overline{\mathcal{E}}''_n$,

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}'_n \mathcal{E}''_n, \qquad \overline{\mathcal{E}}_n \leq \overline{\mathcal{E}}'_n \overline{\mathcal{E}}''_n. \tag{17}$$

On remarque l'analogie entre toutes ces formules et celles du n° 2. Mais ici, x étant positif, $dG(x)$ et $g(x)$ sont de signes quelconques, et, pour l'étude des moments, il n'y a pas à distinguer le cas où l'indice n'est pair et celui où il est impair. Le produit $\mathcal{E}'_n \mathcal{E}''_n$ peut être indéterminé aussi bien pour n pair que pour n impair. Si pour fixer les idées $\mathcal{E}'_n = 0$, $\overline{\mathcal{E}}''_n = \infty$, $\mathcal{E}''_n$ est infini ou indéterminé, et $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}'_n \mathcal{E}''_n$ l'est aussi, sauf toutefois dans le cas où $G_1(x)$ est identiquement nul; dans ce cas $G(x)$ l'est aussi et $\mathcal{E}_n = 0$.

Il faut remarquer que, d'après un théorème connu de T. Carleman que nous utiliserons plus loin, il y a des fonctions non constantes $G_1(x)$ dont tous les moments sont nuls. Il ne suffit donc pas que tous les $\mathcal{E}'_n$ soient nuls pour qu'on puisse conclure que $G_1(x)$ est identiquement nul et que les $\mathcal{E}_n$ sont nuls aussi, même si $\overline{\mathcal{E}}''_n$ est infini.

4. Problèmes posés par la multiplication des variables aléatoires. — Sauf au 5° du n° 7, où nous poserons de nouveaux problèmes, et au n° 9, dont nous avons indiqué l'objet spécial, nous nous bornerons à l'étude des problèmes suivants :

Problème A. — Les lois de X et de U étant données, reconnaître si X est de la forme UV, et dans ce cas déterminer la loi de V ou l'ensemble des lois possibles.

Problème B. — La loi de X étant seule donnée, reconnaître si X admet des représentations de la forme UV dans lesquelles aucun facteur ne soit un nombre certain.

Problème C. — Déterminer les conditions que doivent vérifier les lois de U et V pour que celle de X soit symétrique.

Problème D. — Déterminer les *lois indéfiniment divisibles de l'arithmétique multiplicative* (lois i. d. m.), c'est-à-dire celles pour lesquelles, ε et ε' étant des nombres positifs arbitrairement petits, la v. a. X dépendant d'une telle loi peut être mise sous la forme d'un produit de facteurs indépendants U_ν tels que

$$\Pr\{|U_\nu - 1| > \varepsilon\} < \varepsilon'. \tag{18}$$

5. Problèmes A et B. La première méthode : réduction a une somme par l'emploi des logarithmes. — 1° Une v. a. X peut toujours se mettre sous la forme $\eta X'$, les deux facteurs étant indépendants, X' étant presque sûrement (pr. s.) $\neq 0$, et η n'ayant pas d'autres valeurs possibles que 0 et 1. La probabilité de la valeur 0 est $\alpha = \Pr(X = 0)$. Si $\alpha < 1$, la représentation de X par la formule $X = \eta X'$ est unique; la loi de X' est la loi conditionnelle dont dépend X dans l'hypothèse $X \neq 0$. Si au contraire $\alpha = 1$, la loi de X' est absolument quelconque.

Si U et V sont mis de même sous les formes $\eta_1 U'$ et $\eta_2 V'$, la relation $X = UV$ se décompose et $\eta = \eta_1 \eta_2$, et $X' = U'V'$, et l'on peut étudier séparément ces deux relations. L'étude de la première se résume dans la formule

$$(19) \qquad 1 - \alpha = \Pr(\eta = 1) = \Pr(\eta_1 = 1) \Pr(\eta_2 = 1) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2),$$

qui résout immédiatement, pour les v. a. considérées, les problèmes A, B et D. On remarque en particulier que, sauf si $\alpha = 0$, le problème B a une infinité de solutions, $\Pr(\eta_1 = 1)$ étant quelconque dans $[1 - \alpha, 1]$, et que la loi de η est i. d. m. On est ainsi ramené à l'étude de la relation $X' = U'V'$, ce qui revient à dire que : *on peut supposer* $\alpha = \Pr(X = 0) = 0$, *ce que nous ferons maintenant*. On a alors aussi nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2° Supposons d'abord $\Pr(X > 0) = 1$. Cette condition ne pouvant pas être réalisée si le signe de U est effectivement aléatoire, U et V sont pr. s. tous les deux positifs ou tous les deux négatifs. Le second cas se ramenant au premier, nous ne chercherons que les représentations de X par un produit de facteurs positifs. Alors la formule $X = UV$ se ramène à la formule d'addition

$$(20) \qquad \log X = \log U + \log V,$$

les logarithmes étant réels, et $\log U$ et $\log V$ étant indépendants. Les problèmes A, B et D sont alors ramenés à des problèmes classiques, dont on sait qu'ils se ramènent eux-mêmes à l'étude de la relation

$$(21) \qquad \varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$$

entre les fonctions caractéristiques de $\log X$, $\log U$ et $\log V$.

On sait que, sauf dans un cas particulier; cette formule résout le problème A. Les lois de X et U étant données, on en déduit $\varphi(t)$ et $\varphi_1(t)$, donc $\varphi_2(t)$. On sait, par la formule qui résout l'équation

$$(22) \qquad \varphi_2(t) = \int_0^\infty e^{it \log v} \, dF_2(v),$$

reconnaître si $\varphi_2(v)$ est bien une fonction caractéristique, et dans ce cas évidemment exceptionnel on a ainsi $F_2(v)$.

Le cas particulier, signalé d'abord par A. Khintchine, où $\varphi_2(t)$ est indéterminé, est celui où $\varphi(t)$ et $\varphi_1(t)$, tous les deux égaux à l'unité pour $t=1$, sont tous les deux nuls en dehors d'un certain intervalle $(-\tau, +\tau)$. Un exemple beaucoup plus général que celui de Khintchine se déduit d'un vieux théorème bien connu de G. Pólya : *pour qu'une fonction* $\varphi(t)$, *réelle, paire, toujours* $\geqq 0$, *et égale à* 1 *pour* $t=0$, *soit une fonction caractéristique* (et alors celle d'une loi symétrique), *il suffit qu'elle soit convexe dans* $(0, \infty)$. Prenons alors pour $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ des fonctions vérifiant ces conditions, et de plus telles que

$$\varphi_1(\tau)=0, \qquad \varphi_2(\tau)>\varphi_2(\infty)\geqq 0, \tag{23}$$

d'où $\varphi_1(t)=0$ pour $t\geqq\tau$. Il existe une famille infinie non dénombrable de fonctions $\varphi_2^*(t)$, vérifiant aussi les conditions de Pólya, et égales à $\varphi_2(t)$ dans $(0, \tau)$. On a alors, sur tout l'axe des t,

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\varphi_2^*(t), \tag{24}$$

de sorte que la donnée de $\varphi_1(t)$ et de $\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ ne détermine pas $\varphi_2(t)$; il y a une infinité non dénombrable de fonctions $\varphi_2^*(t)$ possibles.

Nous ne savons pas si l'attention a déjà été attirée sur le fait que dans ces conditions le problème A n'est pas complètement résolu. $\varphi_2(t)$ est défini dans $(-\tau, +\tau)$, et, si c'est une fonction de Pólya, on saura que son prolongement est possible, et même d'une infinité de manières, si $\varphi_2(t)>0$. Mais, en multipliant $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ par des fonctions caractéristiques complexes, on voit que la même indétermination peut se produire pour des fonctions complexes, et si $\varphi_2(t)$, sans être du type de Pólya, est ainsi connu dans un intervalle fini $(-\tau, +\tau)$, il n'est pas aussi facile de savoir si les valeurs obtenues sont des valeurs acceptables pour une fonction caractéristique.

Le problème B est également ramené par la formule (20) à un problème classique de la théorie de l'addition des variables aléatoires. S'il n'est pas résolu dans tous les cas, les résultats connus sont trop nombreux pour qu'on puisse les résumer ici. Rappelons seulement qu'il y a des lois indécomposables, des lois i. d., et des lois qui, sans être i. d., ont une des représentations de la forme cherchée pouvant constituer une infinité non dénombrable (exemple : logX uniformément réparti dans un intervalle fini). Pour les lois discontinues, le cas général est celui où elles sont indécomposables.

Enfin, toujours pour les variables aléatoires X pr. s. positives, le problème D est ramené au problème de la définition des lois i, d., dont la solution est bien connue.

3° Supposons maintenant X réel, $\neq 0$, et ayant des valeurs possibles des deux signes. On peut définir cette v. a. en définissant d'abord deux v. a. positives, X′ et X″, et ensuite X par les formules

$$\Pr\{X=X'\}=\alpha_1, \qquad \Pr\{X=-X''\}=\alpha_2=1-\alpha_1 \qquad (0<\alpha_1<1). \tag{26}$$

Nous supposerons d'autre part $U > 0$; s'il s'agit du problème B, cela signifie que nous nous bornons à la recherche des solutions vérifiant cette condition. Alors V a le signe de X, et peut, comme X, être défini à l'aide de deux v. a. positives auxiliaires, que nous désignerons par V' et V'', telles que $V = V'$ ou $-V''$ suivant que $X = X'$ ou $-X''$. On devra donc avoir

$$X' \sim UV', \qquad X'' \sim UV'', \tag{26}$$

le signe $\sim$ représentant l'équivalence en loi. Comme il s'agit de v. a. > 0, ce problème se résout par les méthodes indiquées au 2°. Comme il y a deux conditions différentes à vérifier, le problème sera souvent impossible; bien entendu, si la loi de X est symétrique, ces deux conditions se réduisent à une, et l'on est exactement dans les mêmes conditions qu'au 2°.

En ce qui concerne le problème B, pour lequel la loi de U n'est pas donnée, si les lois de X' et X'' sont de natures analytiques différentes, il peut arriver qu'on puisse représenter séparément X' et X'' par des produits $U'V'$ et $U''V''$, mais sans qu'il soit possible de réaliser la condition $U' \sim U''$. Tel est le cas, par exemple, si $\log X'$ est une v. a. laplacienne, et si $\log X''$ est une v. a. bornée, ou à loi discontinue, donc sans composante laplacienne.

4° Étudions maintenant le problème A dans le cas des variables réelles les plus générales. Nous utilisons seulement la remarque faite au 1°, d'après laquelle on peut supposer que 0 n'est pas une valeur possible de X, U et V. Posons

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \Pr(X > 0) - \Pr(X < 0), \tag{27}$$

et désignons par β et γ les probabilités analogues relatives à U et V, de sorte que les probabilités respectives des signes $+$ et $-$ sont $\beta_1 = \frac{1+\beta}{2}$ et $\beta_2 = \frac{1-\beta}{2}$ pour U et $\gamma_1 = \frac{1+\gamma}{2}$ et $\gamma_2 = \frac{1-\gamma}{2}$ pour V. On a

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) = (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) = \beta\gamma. \tag{28}$$

Comme il faut que $|\gamma| \leq 1$, une condition nécessaire, pour le problème A, est $|\alpha| \leq |\beta|$, et, sauf si $\alpha = \beta = 0$ (cas où γ est quelconque dans $[-1, +1]$), γ est bien défini par la formule (27). Pour le problème B, $|\beta|$ est quelconque dans $[|\alpha|, 1]$.

Désignons maintenant par φ_1, φ_2, χ_1, χ_2, ψ_1, ψ_2 les fonctions caractéristiques de $\log X'$, $\log X''$, $\log U'$, $\log U''$, $\log V'$, $\log V''$ (V' et V'' étant à V ce que U' et U'' sont à U). On a

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \dfrac{\beta_1\gamma_1\chi_1(t)\psi_1(t) + \beta_2\gamma_2\chi_2(t)\psi_2(t)}{\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2}, \\ \varphi_2(t) = \dfrac{\beta_1\gamma_2\chi_1(t)\psi_2(t) + \beta_2\gamma_1\chi_2(t)\psi_1(t)}{\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1}. \end{cases} \tag{29}$$

Ces deux formules résolvent le problème A. Les coefficients numériques venant d'être déduits de $\alpha = \beta\gamma$, et les données du problème A définissant $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$, ces formules définissent $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$, et par suite, γ étant connu, la loi dont dépend V. Si la condition nécessaire $|\alpha| \leq |\beta|$ déjà mentionnée est vérifiée, pour que le problème A soit résoluble, il faut et il suffit que les déterminations obtenues pour $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ soient des fonctions caractéristiques.

Il y a d'ailleurs aussi des cas d'indétermination. Si les lois données pour X et U sont symétriques, la relation $X = UV$ équivaut à $|X| \sim |UV|$, et, même si $|V|$ est bien défini par cette relation, elle ne nous apprend rien sur le signe de V; la probabilité conditionnelle de $V > 0$, dans l'hypothèse $|V| = v$, peut être une fonction mesurable ≥ 0, ≤ 1, à cela près quelconque, de $\Pr(|V| < v)$. D'ailleurs, d'après le 2° dont les résultats s'appliquent ici à $|V|$, il peut arriver que la loi dont dépend ce module ne soit pas déterminée. Il y a alors une double indétermination.

5° Étudions enfin le cas des v. a. complexes. Si R et θ sont le module et l'argument de X, θ est défini à un multiple près de 2π, et

$$\log X = \log R + i\theta = \rho + i\theta$$

est défini à un multiple près de $2\pi i$. Ses valeurs possibles peuvent alors être représentées par les points d'un cylindre Ω, et la loi de X peut être définie par la donnée de la probabilité $P(\omega)$ que $\log X$ appartienne à une aire $\omega \subset \Omega$, ou par une fonction de répartition $F(\xi, \eta)$, définie pour ξ réel et $-\pi \leq \eta < \pi$, et égale à $P(\omega)$ calculé pour l'aire $\rho < \xi$, $-\pi \leq \theta < \eta$. On sait qu'on peut aussi la définir par la suite des fonctions caractéristiques

$$\varphi_n(t) = \iint_\Omega e^{i(t\xi + n\eta)}\, P(d\omega); \tag{30}$$

ξ, η est un point de l'élément $d\omega$; n parcourt la suite des nombres entiers réels. Des conditions triviales, nécessaires mais non suffisantes, vérifiées par ces fonctions, sont : $\varphi_0(0) = 1$; $|\varphi_n(t)| \leq 1$; continuité; caractère hermitien, c'est-à-dire que $\varphi_n(t)$ et $\varphi_{-n}(-t)$ sont imaginaires conjugués. Des formules connues permettent, ces fonctions étant données, de retrouver $F(\xi, \eta)$ et par suite $P(\omega)$, en passant par l'intermédiaire des fonctions

$$\omega_n(\xi) = \int_{-\pi-0}^{\pi-0} e^{in\eta}\, d_\eta F(\xi, \eta) \quad (1). \tag{31}$$

(1) La formule qui permet de passer de

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\omega_n(\xi)$$

Si on les applique en partant d'une suite de fonctions données d'une manière quelconque, les conditions de possibilité, nécessaires et suffisantes, sont que ces formules soient applicables, et conduisent pour $P(\omega)$ à une fonction additive de ω, non négative, et telle que $P(\Omega) = 1$ [condition qui équivaut à $\omega_0(0) = 1$].

Si l'on désigne de même par $\chi_n(t)$ et $\psi_n(t)$ les fonctions caractéristiques liées à $\log U$ et $\log V$, la relation $X \sim UV$ équivaut à

$$\varphi_n(t) = \chi_n(t)\psi_n(t) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{32}$$

formules qui résolvent en principe le problème A.

Pour que ce problème soit possible, il faut d'abord que $|\varphi_n(t)| \leq |\chi_n(t)|$ (puisque les conditions triviales indiquées tout à l'heure pour les φ_n doivent être vérifiées par les ψ_n). Des valeurs des $\psi_n(t)$ étant alors obtenues, il faut et il suffit que ces valeurs vérifient les conditions nécessaires et suffisantes indiquées pour les $\varphi_n(t)$.

Il y a naturellement des cas d'indétermination, notamment les cas de symétrie, sur lesquels nous reviendrons au n° 7. Observons seulement ici qu'il n'y indétermination que si au moins un des $\psi_n(t)$ est indéterminé, ce qui implique $\varphi_n(t) = \chi_n(t) = 0$, au moins sur une partie de l'axe des t et pour la valeur considérée de n.

6. Deuxième méthode pour le problème A : détermination de la loi de V par ses moments. — Le principe de cette méthode est bien simple : les lois de X et U étant données, les E_n et les E'_n sont connus, les E''_n s'en déduisent par la première

---

à $\omega_n(\xi)$ est bien connue; pour $n = 0$, elle donne la fonction de répartition de $\rho = \log R$. Pour passer de $\omega_n(\xi)$ à $F(\xi, \eta)$, observons d'abord que si $F(\eta)$ est la fonction de répartition d'une v. a. θ définie mod 2π, c'est-à-dire si

$$F(\eta + 2\pi) - F(\eta) = 1,$$

si dans un intervalle semi-ouvert i de longueur 2π elle est la fonction de répartition de la détermination de θ appartenant à i, et si l'on pose

$$\omega_n = \int_i e^{in\eta}\, dF(\eta) \qquad (n \text{ entier} \neq 0),$$

on a, moyennant certaines conditions de continuité,

$$2\pi F(\eta) - \eta = \sum{}' \frac{i\omega_n}{n}(e^{-in\eta} - 1) + c \qquad \left(\sum{}' = \sum_{-\infty}^{-1} + \sum_{1}^{\infty},\ c = \text{Cte}\right),$$

et dans tous les cas

$$\int_0^u [2\pi F(\eta) - \eta]\, d\eta = \sum{}' \left(\frac{1 - e^{-inu}}{n^2} - \frac{iu}{n}\right)\omega_n + cu,$$

formule qui, à une constante près, définit $F(\eta - 0)$ et $F(\eta + 0)$.

Ces formules se rattachent aux questions exposées dans [3], mais n'y ont pas été explicitement indiquées. En remplaçant ω_n par $\omega_n(\xi)$, elles donnent $F(\xi, \eta)$; il faut seulement remplacer aussi $\omega_0(0) = 1$ par $\omega_0(\xi)$. Ainsi la première de ces formules s'écrit

$$2\pi F(\xi, \eta) - \omega_0(\xi)\eta = \sum{}' \frac{i\omega_n}{n}(e^{-in\eta} - 1) + c.$$

des formules (6), et l'on sait que, dans des cas étendus, la loi de V est déterminée par ces moments. Mais il s'agit de discuter les conditions d'application de cette méthode.

1° Le cas des v. a. pr. s. nulles étant toujours écarté, la seule difficulté possible pour le calcul du moment majorant $\overline{E}''_n$ se présente si $\overline{E}_n$ ou $\overline{E}'_n$ sont infinis. Si $\overline{E}'_n$ est seul infini, le problème A n'admet pas de solution. Si $\overline{E}_n$ est seul infini, la seconde formule (6) donne $\overline{E}''_n = \infty$, et, si cela a lieu pour une valeur n_0 de n, il en est de même pour tout les $n > n_0$; dans ce cas la méthode des moments ne donne pas la solution de notre problème. Elle ne la donne évidemment pas non plus si, à partir d'une certaine valeur de n, $\overline{E}_n$ et $\overline{E}'_n$ sont tous les deux infinis; alors $\overline{E}''_n$, et par suite aussi E''_n, sont indéterminés.

La méthode des moments n'est donc applicable que si les $\overline{E}_n$ et les $\overline{E}'_n$ sont tous finis, ce que nous supposerons maintenant. Les E_n et les E'_n sont alors finis et bien déterminés. Mais il y a aussi impossibilité ou indétermination si, pour n impair, $E'_n = 0$; E''_n apparaît alors comme indéterminé si E_n s'annule en même temps que E'_n; dans le cas contraire le problème A n'a pas de solution.

Il peut d'ailleurs arriver que E'_n s'annule seulement pour certaines valeurs impaires de n. Si l'on peut trouver un entier impair p tel que tous les E'_{pq} ($q = 1, 2, \ldots$) soient différents de zéro, on pourra calculer tous les E''_{pq}, c'est-à-dire tous les moments de V^p. Il peut alors arriver que la loi de V soit bien déterminée, bien que certains des E''_n se soient présentés sous une forme indéterminée.

Si tous les E'_{2p+1} sont nuls, il faut que les E_{2p+1} le soient aussi, et dans ce cas la méthode des moments peut au plus déterminer la loi de $|V|$, sans donner aucun renseignement sur le signe de V. C'est ce qui a lieu notamment si les lois de X et U sont toutes les deux sont symétriques. Mais cette symétrie n'est pas nécessaire pour que tous les moments d'ordres impairs soient nuls. On peut en effet définir deux v. a. positives, X′ et X″, ayant les mêmes moments, mais ayant pourtant deux lois distinctes. Une variable X ayant une chance sur deux d'être égale à X′ et une chance sur deux d'être égale à $-X''$ a tous ses moments d'ordres impairs nuls; mais sa loi n'est pas symétrique.

2° Plaçons-nous maintenant dans le cas où, non seulement les $\overline{E}''_n$, mais aussi les E''_n, sont tous bien définis par les formules (6), On sait que les trois cas logiquement possibles sont effectivement possibles : il peut n'y avoir aucune loi admettant les moments E''_n; il peut y en avoir une et une seule; il peut enfin y en avoir plusieurs, ou même une infinité. Le premier cas apparaît comme le plus général : ainsi la condition nécessaire que les rapports $\frac{\overline{E}''_{n+1}}{\overline{E}''_n}$ (ou les rapports $\frac{E''_{2p+2}}{E''_{2p}}$, pour ne pas introduire les moments majorés) forment une suite non décroissante apparaît comme assez restrictive.

Notre but n'est pas ici de rappeler les travaux connus relatifs à la détermination d'une loi de probabilité par ces moments. Mais nous allons indiquer des cas où la seule donnée de la loi de X permet, sans rien savoir sur U, d'exclure le cas d'indétermination. Ils reposent sur la remarque que, l'hypothèse $\Pr(U=0)=1$ étant écartée si $\Pr(X=0)<1$, on a toujours pour les $\overline{E}'_n$ une borne inférieure de la forme ca^n $(c,\ a>0)$. On peut prendre pour a n'importe quel nombre tel que $\Pr(|U|\geq a)>0$, et prendre pour c la valeur correspondante de cette probabilité. On peut aussi observer que, les $\frac{\overline{E}'_{n+1}}{\overline{E}'_n}$ formant une suite non décroissante, on a toujours

$$(33)\qquad E'_n \geq E'_p \left(\frac{E'_{p+1}}{E'_p}\right)^{n-p}.$$

La meilleure des bornes obtenues, pour les grandes valeurs de n, s'obtient en prenant a aussi grand que possible. Si $|U|$ a une borne supérieure qui puisse être atteinte avec une probabilité positive, mais non dépassée, c'est cette borne qu'on prendra pour a. Dans le cas contraire, que la borne supérieure de $|U|$ soit finie ou infinie, on peut prendre pour a n'importe quel nombre inférieur à cette borne, et c'est la formule (33) qui permet d'associer à des valeurs de a arbitrairement voisines de cette borne le plus grand coefficient c.

De la seconde formule (5), on déduit alors

$$(34)\qquad E''_n \leq c' q^n \overline{E}_n \qquad \left(c'=\frac{1}{c},\ q=\frac{1}{a}\right),$$

formule qui donne pour $\overline{E}''_n$, et par suite pour E''_n, une majoration dans laquelle les coefficients numériques dépendent de la définition de U. Mais, sous la seule condition que X ne soit pas pr. s. $=0$, *sa forme* est indépendante de la loi de U; elle s'applique à V (et aussi à U) pour toutes les représentations de X par la formule $X \sim UV$.

3° Théorème I. — *Si la fonction caractéristique de* X *est analytique et non constante, il en est de même de celle de* V (pour $t=0$, donc sur l'axe réel). Donc : *si le problème* A *admet une solution, la loi de* V *est bien définie par la donnée des* E''_n.

En effet, pour que la fonction caractéristique de X soit analytique, il faut et il suffit que la série

$$\sum_0^\infty \frac{\overline{E}_n}{n!} t^n,$$

qui représente $E\{e^{t|X}\}$, soit convergente pour $|t|$ assez petit. D'après la formule (34), cette condition reste vérifiée si l'on remplace $\overline{E}_n$ par $\overline{E}''_n$. Le théorème énoncé en résulte.

4° La théorie des fonctions quasi analytiques conduit à une importante généralisation de ce théorème. Rappelons d'abord le théorème fondamental de A. Denjoy. Soit $\mathcal{S}$ une suite de nombres positifs $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, et soit $C(\mathcal{S})$ la classe des fonctions $f(t)$ de la variable réelle t, continues, indéfiniment dérivables, et telles que, sur tout l'axe réel, on ait

$$(35) \qquad |f^{(n)}(t)| \leq a_n \qquad \left[n = 0, 1, 2, \ldots ; f^{(0)}(t) = f(t) ; f^{(n+1)}(t) = \frac{d f^{(n)}(t)}{dt}\right].$$

On dit que c'est une *classe de fonctions quasi analytiques* si la différence de deux fonctions de cette classe ne peut pas s'annuler en un point en même temps que toutes ses dérivées sans être identiquement nulle. En d'autres termes, quel que soit t_0, $f(t)$ est bien déterminé sur tout l'axe réel si l'on connaît les $f^{(n)}(t_0)$.

Théorème (de A. Denjoy). — *Si la série* $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ *est divergente,* $C(\mathcal{S})$ *est une classe de fonctions quasi analytiques. Moyennant une condition de régularité imposée à la suite des* a_n*, cette condition suffisante est aussi nécessaire* (2).

Il est *a fortiori* suffisant que la série formée par les termes d'indices pairs soit divergente. Or, la fonction caractéristique $\varphi(t)$ de la v. a. X appartient à la classe $C(\mathcal{S})$ obtenue en prenant pour $\mathcal{S}$ la suite des $\overline{E}_n$. Comme $E_{2p} = \overline{E}_{2p}$, on voit que : si la série

$$(36) \qquad \sum \frac{1}{\sqrt[2p]{E_{2p}}}$$

est divergente, $\varphi(t)$ est bien défini par la suite des $\varphi^{(n)}(0) = i^n E_n$. Donc, dans ce cas, la loi de X est bien définie par ses moments. D'autre part, d'après la formule (34), la divergence de la série (36) entraîne la divergence de la série analogue formée avec les E''_{2p}, et la conclusion précédente s'étend à la v. a. V, et aussi à U. Donc :

Théorème 2. — *Si la série* (36) *est divergente, la loi de* X *est bien définie par ses moments. Sauf si* $\Pr(X = 0) = 1$, *si de plus* X *admet des représentations par la formule* $X \sim UV$ (U et V étant indépendants), *chacune des lois possibles pour les facteurs* U *et* V *est aussi bien déterminée par ses moments.*

La première partie de cet énoncé a d'ailleurs été indiquée par T. Carleman (*Voir* par exemple [1], p. 81), mais sous une forme différente, en ce sens que les moments E_n sont définis par les formules (5), en partant de la fonction de

(2) On ne change rien d'essentiel à ce théorème en remplaçant la définition de la classe $C(\mathcal{S})$ par la suivante : c'est la classe des fonctions continues et indéfiniment dérivables pour lesquelles il existe deux constantes c et q (positives et finies) telles que

$$|f^{(n)}(t)| \leq c q^n a_n.$$

répartition $F(x)$. Il est curieux que Carleman, ayant d'abord démontré le théorème de Denjoy, n'ait pas remarqué que le sien s'en déduisait bien simplement, et n'en ait donné qu'une démonstration indépendante de celle de Denjoy ([3]).

5° Le théorème 2 montre que la divergence de la série (36) est une condition suffisante pour que la conclusion de ce théorème soit applicable. Il est naturel de chercher une condition nécessaire et suffisante. Une condition nécessaire est évidemment que la loi de X soit elle-même bien déterminée par ses moments : parmi les représentations possibles de X par un produit UV figure en effet toujours la représentation triviale pour laquelle $U = X$, $V = 1$. Un problème qui se pose alors naturellement est le suivant : cette condition nécessaire n'est-elle pas aussi suffisante ? En d'autres termes :

Problème E. — *Si la loi de la v. a.* X *est déterminée par ses moments, et si* X *peut être mis sous la forme* UV (U et V étant indépendants), *peut-on affirmer que la loi de chaque facteur est déterminée par ses moments ?* ([4]).

Le problème précédent est lié aux suivants :

Problème F. — *Cela revient-il au même de dire que la v. a.* X *est déterminée par ses moments* E_n, *ou que* $|X|$ *est déterminé par les* $\overline{E}_n$, *ou enfin que* $|X|$ (ou, ce qui revient au même X^2) *est déterminé par* E_{2n} ?

La troisième propriété entraîne la seconde; mais la réciproque n'est pas évidente.

Problème G. — *Si les moments de* X'^2 *majorent ceux de* V^2, *et si* X'^2 *est déterminé par ses moments, peut-on affirmer que* V^2 *l'est aussi* ?

Supposons d'abord que les réponses à ces deux problèmes soient affirmatives, et montrons que, dans cette hypothèse, le problème E se résout aussi par l'affirmative. Les moments de V^2 sont en effet, d'après la formule (34), majorés par ceux de $X'^2 = q'^2 X^2$ où $q' = \mathrm{Max}(q, c'q)$. Si X est déterminé par ses moments, il en est de même de X^2, donc de X'^2, donc de V^2, donc enfin de V,

C. Q. F. D.

Nous n'avons d'ailleurs utilisé qu'en partie l'hypothèse que les réponses aux problèmes F et G sont affirmatives. Si une des hypothèses utilisées est fausse,

---

([3]) Il faut d'ailleurs se rappeler que le livre de Carleman est de 1926, et développe des leçons professées en 1923. Le fait qu'une fonction à variation bornée soit bien définie, à une constante près, par sa transformée de Fourier-Stieltjes, était connu, mais commençait à peine à être considéré comme un des théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités.

([4]) C'est par suite d'une erreur que, dans une Note présentée à l'Académie le 7 avril 1959, j'ai répondu à cette question par l'affirmative. Je voulais simplement énoncer le théorème 2 ci-dessus, et ai omis de mentionner qu'il supposait la divergence de la série (36) [la présente Note, et la fin du n° 6, 5°, ont été rajoutées à la correction des épreuves].

on ne peut rien dire pour le problème E. Il faut en effet remarquer qu'en ce qui concerne les E'_n nous n'avons utilisé que l'inégalité $E'_{2p} > ca^{2p}(a, c > 0)$. Une utilisation plus complète des propriétés des E'_n peut conduire à des conclusions que cette inégalité ne suffirait pas à justifier, et, peut-être, à une réponse affirmative au problème E.

Il y a ainsi plusieurs problèmes importants qui semblent n'être pas résolus actuellement. Les théorèmes de Denjoy et de Carleman sur les fonctions quasi analytiques ont d'ailleurs été complétés par S. Mandelbrojt qui a notamment donné une condition nécessaire pour la quasi-analyticité de $C(\mathcal{S})$: c'est la divergence de la série $\sum \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Mais toutes les difficultés ne sont pas pour cela résolues. Le fait que les fonctions caractéristiques qui appartiennent à $C(\mathcal{S})$ ne forment qu'une partie $C^*(\mathcal{S})$ de cette classe amène notamment à douter que la théorie des fonctions quasi analytiques conduise aisément à la solution des problèmes posés. D'ailleurs, dans la mesure où elle suggère une réponse, la forme de la condition de Denjoy peut faire penser que la réponse au problème G est affirmative; or, d'après la forme de la condition de Mandelbrojt, il semble qu'elle ne puisse l'être que grâce à la distinction entre $C(\mathcal{S})$ et $C^*(\mathcal{S})$.

7. Recherche des cas de symétrie (problème C). — 1° Nous avons déjà utilisé le fait que, si un au moins des facteurs U et V dépend d'une loi symétrique, il en est de même du produit X. Dans le cas réel, c'est une conséquence immédiate de la formule (13). Si la loi de U est symétrique, $G_1(u)$, et par suite $G(x)$, sont identiquement nuls. Donc la loi de X est aussi symétrique. On peut le voir aussi en observant que la symétrie de U peut s'exprimer par $U \sim -U$, ce qui entraîne

$$X = UV \sim (-U)V = -X,$$

de sorte que la loi de X est aussi symétrique.

Dans le cas de variables aléatoires complexes, $U \sim e^{i\theta}U$ entraîne de même $X \sim e^{i\theta}X$. Si cela est vrai pour tout θ réel, on voit ainsi que, si la loi d'un des facteurs U et V a la symétrie de révolution autour de l'origine, le produit X a la même symétrie. S'il n'en est ainsi que pour les valeurs de θ multiples de $\frac{2\pi}{n}$ (n étant un entier donné), on obtient le même énoncé pour la symétrie étoilée, qui, pour $n = 2$, se réduit à la symétrie simple par rapport à l'origine.

2° La réciproque de ces énoncés n'est pas vraie. Dans le cas complexe, cela résulte d'un théorème sur l'addition des arguments que nous avons indiqué autrefois dans [3]. Si les arguments Θ, Θ' et Θ'' de X, U et V dépendent de lois absolument continues définies par les densités de probabilité

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{nix}, \qquad f_1(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n e^{nix}, \qquad f_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} a''_n e^{nix},$$

avec nécessairement $a_0 = a'_0 = a''_0 = 1$, la formule d'addition

$$\Theta = \Theta' + \Theta'' \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

s'exprime par la relation $a_n = a'_n a''_n$. Il peut naturellement arriver qu'on ait $a'_n = 0$ pour certains n non nuls et $a''_n = 0$ pour les autres. Alors Θ sera uniformément réparti dans $(0, 2\pi)$ sans que ce soit le cas ni pour Θ', ni pour Θ''. Ce sera le cas par exemple si

$$(37) \qquad f_1(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2\pi}, \qquad f_2(\theta) = \frac{1 + \cos 3\theta}{2\pi}.$$

Si alors les modules de U et V sont indépendants de leurs arguments, X aura la symétrie de révolution autour de O sans qu'aucun des facteurs ait cette symétrie. Dans l'exemple précédent, et d'une manière générale s'il y a au moins un a'_p et un a''_p d'indices impairs qui ne soient pas nuls, on obtient le même résultat sans qu'aucun des facteurs ait la symétrie par rapport à l'origine. En prenant pour $f_1(\theta)$ et $f_2(\theta)$ des séries effectivement infinies, on peut même s'arranger pour que X ait la symétrie de révolution sans qu'aucun des facteurs ait de symétrie étoilée.

3° Même dans le cas réel, la réciproque du théorème énoncé au 1° n'est pas vraie non plus. C'est L. Schwartz qui a le premier attiré mon attention sur ce point. La démonstration est d'ailleurs très simple grâce à des remarques faites plus haut. Nous avons vu que, U, V_1 et V_2 étant des variables aléatoires positives, on peut avoir $UV_1 \sim UV_2$ sans $V_1 \sim V_2$. Prenons alors pour V une variable égale à $-V_1$ ou à V_2 suivant le résultat d'un tirage au sort à pile ou face; $X = UV$ dépend d'une loi symétrique, mais ni U, ni V, ne dépendent d'une telle loi.

4° Il peut tout de même être utile d'indiquer, dans le cas réel, des classes de lois assez étendues pour que leur fermeture soit l'ensemble de toutes les lois possibles, et pour lesquelles la loi de X ne peut être symétrique que si au moins un des facteurs U et V dépend d'une loi symétrique.

Exemple. — Utilisant toujours les notations des n^{os} 2 et 3, *supposons que les* $|x_h|$, *rangés par ordre de grandeur croissante* (ou au contraire décroissante) *forment un ensemble bien ordonné*. Il en est alors de même des $|u_k|$ et des $|v_l|$ $\left[\text{puisque } \bigcup(|u_k|) \subset \bigcup\left(\left|\frac{x_h}{v_1}\right|\right)\right]$, et évidemment des ξ_h, η_{lk} et ζ_l. L'indice 1 correspondra toujours au premier élément (c'est-à-dire le plus petit, ou au contraire le plus grand) des ensembles considérés.

Nous allons montrer que : *dans les conditions considérées, si la fonction* $G(x)$ *est continue, une au moins des fonctions* $G_1(u)$ *et* $G_2(v)$ *l'est aussi. Dans le cas des lois totalement discontinues*, cela revient à dire que : *toujours sous la même condition, si* X *dépend d'une loi symétrique, il en est de même pour au moins un des facteurs* U *et* V.

Supposons en effet que les fonctions $G_1(u)$ et $G_2(v)$ soient toutes les deux discontinues, c'est-à-dire que η_{i_1} et ζ_{i_1} existent. Comme ce sont tous les deux les plus petits (ou tous les deux les plus grands) des nombres η_k et ζ_l, le nombre $\xi_1 = \eta_{i_1} l_{i_1}$ n'admet pas d'autre représentation de la forme $\eta_k \zeta_l$. Pour $h = 1$, la formule (11) se réduit donc à $\alpha_1 = \beta_{i_1} \gamma_{i_1} \neq 0$, et la fonction $G(x)$ n'est pas continue, C. Q. F. D.

On remarque que, notre énoncé partant d'une hypothèse relative à la variable aléatoire X, si cette variable a plusieurs représentations de la forme UV, la conclusion est valable pour toutes ces représentations.

Généralisation. — Le raisonnement précédent repose essentiellement sur l'existence d'un nombre x ayant une représentation et une seule de la forme $\eta_k \zeta_l$. Il est clair que cette condition peut être réalisée dans des cas plus généraux. Si par exemple les suites (finies ou infinies) des $|u_k|$ et des $|v_l|$ sont choisies au hasard d'après des lois continues, il est presque sûr que les $|u_k v_l|$ sont tous différents les uns des autres; donc les $\eta_{i_k} \zeta_{j_l}$, qui sont tous des $|u_k v_l|$ sont tous différents les uns des autres, et sont tous effectivement des ξ_h, c'est-à-dire des points de discontinuité de $G(x)$.

Il est d'ailleurs aussi presque sûr que les produits $\eta_{i_k} \eta_{i_{k'}} \zeta_{j_l} \zeta_{j_{l'}}$ sont tous différents. S'il en est ainsi, un produit tel que $\xi_h \xi_{h'} = \eta_{i_k} \zeta_{j_l} \times \eta_{i_{k'}} \zeta_{j_{l'}}$ est égal à $\xi_{h'} \xi_l = \eta_{i_k} \zeta_{j_{l'}} \times \eta_{i_{k'}} \zeta_{j_l}$, et n'est égal à aucun autre produit analogue $\xi_j \xi_{j'}$. La donnée des $\xi_h = \eta_{i_k} \zeta_{j_l}$ permet donc de disposer ces nombres dans un tableau à double entrée où k définira la ligne et l la colonne, ou inversement, et les η_{i_k} d'une part, les ζ_{j_l} d'autre part, sont bien définis en partant des ξ_h, à cela près qu'on peut les intervertir, ou les multiplier par des facteurs c et $\frac{1}{c}$ indépendants des indices k et l.

Bornons-nous alors au cas des lois totalement discontinues et considérons le produit $X = UV$ obtenu dans ces conditions. Il n'a pas d'autre décomposition en facteurs que $X = cU \times \frac{V}{c}$, et le résultat obtenu en considérant $X = UV$ s'applique à toutes ses décompositions possibles. En nous bornant au cas des lois totalement discontinues, nous obtenons ainsi une classe étendue de lois qui ne peuvent être symétriques que si un au moins des facteurs U et V dépend d'une loi symétrique.

8. Les lois indéfiniment divisibles au point de vue de la multiplication (abréviation : loi i. d. m.; il s'agit du problème D du n° 4). — 1° Le cas d'une variable X presque sûrement positive est trivial. Pour qu'elle ait le caractère cherché, il faut et il suffit que $\log X$ soit indéfiniment divisible au sens habituel (i. d.).

Comme une variable η ayant les valeurs 1 et 0 avec des probabilités $\alpha > 0$ et $1 - \alpha$ est évidemment i. d. m., le produit ηX est i. d. m. en même temps que X. Cette remarque s'étend au cas où X est, soit une v. a. réelle avec valeurs possibles des deux signes, soit une v. a. complexe. Nous pouvons donc toujours, pour la suite, supposer $\Pr(X = 0) = 0$.

2° *Cas d'une v. a. réelle et non nulle.* — Mettons alors $\log X$ sous la forme $\xi + i\eta$, $\eta = 0$ ou $\pi \pmod{2\pi}$. Il faut évidemment que $\xi + i\eta$ dépende d'une loi i. d., de sorte qu'on peut définir un processus additif et homogène, $\xi(t) + i\eta(t)$, tel que $\xi + i\eta$ soit l'accroissement de $\xi(t) + i\eta(t)$ pendant un intervalle de temps de longueur égale à 1.

Nous ne cherchons pour le moment que les décompositions de X en facteurs réels, de sorte que $\eta(t)$ ne peut varier que par sauts, que ces sauts sont tous égaux à $\pi \pmod{2\pi}$, et que leur nombre, en un temps fini, est une v. a. de Poisson à valeur probable θ finie. Les probabilités qu'il soit pair ou impair sont respectivement

$$e^{-\theta} \operatorname{ch} \theta = \frac{1 + e^{-2\theta}}{2}, \qquad e^{-\theta} \operatorname{sh} \theta = \frac{1 - e^{-2\theta}}{2},$$

de sorte que la loi dont dépend η est assujettie à la seule condition, nécessaire et suffisante

$$\Pr\{\eta = 0 \pmod{2\pi}\} > \frac{1}{2}. \tag{38}$$

Bien entendu, le résultat ne serait pas le même si, comme nous le ferons au 3°, nous admettions pour X les facteurs complexes; alors la valeur π serait la somme d'un nombre suffisamment grand de termes certains arbitrairement petits, et qu'il n'y aurait pas lieu d'exclure, et il faudrait seulement exiger que les deux valeurs possibles pour $\eta \pmod{2\pi}$ n'aient pas la même probabilité (*cf.* P. Lévy, [3], p. 39).

En ce qui concerne ξ, c'est naturellement une v. a. dépendant d'une loi i. d. quelconque. Mais il reste à préciser la corrélation qui peut exister entre ξ et η. A cet effet nous distinguerons dans $\xi(t)$ la somme $\xi_1(t)$ des sauts coïncidant dans le temps avec ceux de $\eta(t)$, et la différence $\xi_2(t) = \xi(t) - \xi_1(t)$, dont les sauts sont indépendants de ceux de $\xi_1(t)$ et de $\eta(t)$. Ainsi η est une somme de deux termes η_1 et η_2; le second dépend d'une loi i. d. absolument quelconque et indépendante de ξ et η_1. Quant à la loi de η_1, elle s'obtient en associant à chaque saut de ξ un saut de $\xi(t)$ dépendant d'une loi absolument quelconque [la valeur 0 n'étant pas exclue; $\xi(t) + i\eta(t)$ peut avoir des sauts purement imaginaires aussi bien que des sauts réels].

Nous reviendrons, après l'étude du cas où la variable X est complexe, sur la traduction analytique de ces résultats.

3° *Cas d'une v. a. complexe.* — La recherche des cas où une telle variable X dépend d'une loi i. d. m. se ramène à l'étude de ceux où $\log X = \xi + i\eta$, où η est toujours défini $\bmod 2\pi$, mais peut prendre n'importe quelle valeur dans $[0, 2\pi]$, dépend d'une loi i. d. Sans la restriction que η ne soit défini que $\bmod 2\pi$, on sait (*cf.* P. Lévy, [3], n° 62) que cette loi serait bien définie

par la fonction

$$(39)\qquad \psi(z, z') = \log \mathrm{E}\{e^{i(z\xi + z'\eta)}\} = i(\mu z + \mu' z') - \mathrm{Q}_2(z, z') + \iint \left[e^{i(zu+z'v)} - 1 - \frac{i(zu+z'v)}{1+u^2+v^2} \right] \mathrm{N}(d\mathrm{S}),$$

formule où μ et μ' sont des nombres réels quelconques; Q_2 est une forme quadratique non négative; $d\mathrm{S}$ est l'élément d'aire du plan des uv, et $\mathrm{N}(\mathrm{S})$ est une fonction d'aire, additive, bornée dans toute aire où u^2+v^2 est borné inférieurement, et vérifiant la condition

$$\iint \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \mathrm{N}(d\mathrm{S}) < \infty$$

qui assure la convergence de l'intégrale double (l'intégration étant étendue à tout le plan, sauf l'origine).

Dans l'expression (39) de $\psi(z, z')$, le premier terme représente une constante non aléatoire; le second un système laplacien de variables aléatoires, et l'intégrale la somme compensée des sauts du processus additif associé à $\xi + i\eta$ (comme au 2° ci-dessus). Dans les cas où le terme compensateur $\frac{i(zu+z'v)}{1+u^2+v^2}$ peut être supprimé sans que l'intégrale cesse d'être convergente, l'intégrale est simplement la somme des sauts; on se trouve supprimer un terme de la forme $i(\mu_1 z + \mu'_1 z)$, ce qu'on compensera en changeant en conséquence les valeurs de μ et μ'.

D'autre part, le fait que η soit défini seulement $\bmod 2\pi$ entraîne les conséquences suivantes (*cf.* P. Lévy, [3]) : il suffit de connaître $\psi(z, n)$, la variable continue z' étant remplacée par l'entier n, réel, à cela près quelconque; z reste une variable réelle quelconque. En outre, pour définir $\psi(z, n)$, on n'intègre par rapport à v que dans une période, par exemple $(-\pi, +\pi]$ ou $[0, 2\pi)$; en d'autres termes on se limite à une bande, $(-\pi < v \leq \pi)$ par exemple, du plan des uv.

4° Si nous revenons maintenant au *cas où* X *est réel*, de sorte que 0 et π sont $(\bmod 2\pi)$ les seules valeurs possibles de η, l'intégrale double de la formule (39) se réduit à deux intégrales simples étendues l'une à l'axe des u (dont l'origine doit être exclue), l'autre à la droite $v = \pi$. Nous avons d'ailleurs vu au 2° que $\eta(t)$ ne varie que par sauts, le nombre probable de ces sauts étant fini. Il en résulte que la formule (39) se réduit ici à

$$(40)\qquad \psi(z, n) = \mu i z - \sigma^2 \frac{z^2}{2} + \left[\int_{-\infty}^{-0} + \int_{0}^{\infty} \right] \left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right) d\mathrm{N}_0(u) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izu+ni\pi} - 1)\, d\mathrm{N}_1(u),$$

et qu'il suffit naturellement de connaître cette fonction pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (elle ne dépend que de la parité de n). Dans cette formule, μ est un nombre

réel quelconque : σ^2 (carré de l'écart type de la partie laplacienne de ξ) est ≥ 0. La fonction $N_1(u)$ est une fonction non décroissante bornée ; sa variation totale, de $-\infty$ à $+\infty$, est le nombre probable des sauts de $\eta_1(t)$ quand t varie de 0 à 1, donc $\eta_1(t)$ de 0 à η_1. Quant à la fonction $N_0(u)$, elle est non décroissante de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$, la discontinuité possible à l'origine ne jouant aucun rôle ; on sait enfin qu'elle doit vérifier la condition

$$\left(\int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{\infty}\right) \frac{u^2}{1+u^2}\, d\,N_0(u) < \infty$$

qui, compte tenu de la condition précédente, est nécessaire et suffisante pour que l'intégrale en $d\,N_0(u)$ qui figure dans la formule (40) soit convergente.

On peut d'autre part définir autrement la loi la plus générale dont dépend $\xi + i\eta_1$. Il n'y a qu'à se donner : 1° le nombre probable θ' des sauts purement imaginaires de $\xi(t) + i\eta_1(t)$; leur somme est alors le produit de πi par un facteur ayant (mod 2) les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $e^{-\theta'}\operatorname{ch}\theta'$ et $e^{-\theta'}\operatorname{sh}\theta'$; 2° la fonction $N_1^*(u)$ définissant la la loi des sauts de $\xi(t)$ associés à un saut de $\eta(t)$, ou, ce qui revient au même, la fonction

$$\psi_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izu} - 1)\, d\,N_1^*(u). \tag{41}$$

On remarque que la fonction $N_1^*(u)$ diffère de $N_1(u)$ parce qu'elle ne tient pas compte des sauts purement imaginaires de $\xi(t) + i\eta_1(t)$. Il en résulte, si l'on suppose ces deux fonctions nulles pour $u = -\infty$, que $N_1(u) - N_1^*(u)$ est $= 0$ pour $u < 0$ et $= \theta'$ pour $u > 0$. 3° On se donne enfin μ, σ^2 et la fonction $N_0(u)$, ou, ce qui revient au même, la somme $\psi_0(z)$ des termes de $\psi(z, n)$ déterminés par ces données.

On remarque que

$$\psi(z, 0) = \psi_0(z) + \psi_1(z), \tag{42}$$

et que cette somme définit parfaitement la loi de ξ. L'expression de $\psi(z, 1) - \psi_0(z)$ est moins simple, et dépend, non seulement de $\psi_1(z)$, mais de θ'. Rappelons qu'on déduit aisément $N_1^*(u)$ de $\psi_1(z)$ en appliquant la formule de M. Loève,

$$\int_0^1 [\psi_1(z+h) + \psi_1(z-h) - 2\psi_1(h)]\, dh = 2\frac{\sin h}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu}\, d\,N_1^*(u), \tag{43}$$

puis la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier-Stieltjes. On a alors

$$\psi(z, 1) = \psi_0(z) - \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izu} + 1)\, d\,N_1^*(u) - 2\theta', \tag{44}$$

le dernier terme provenant de ce que nous avons écrit $N_1^*(u)$ au lieu de $N_1(u)$ qui figure dans l'expression (40) de $\psi(z, n)$, et que la différence $N_1(u) - N_1^*(u)$ a à l'origine un saut égal à θ'.

Si inversement on se donne $\psi(z, n)$, on obtient $N_1(u)$ par la formule

d'inversion de l'intégrale

$$\psi(z, 0) - \psi(z, 1) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu}\, d\,\mathrm{N}_1(u),$$

on en déduit $\mathrm{N}_1'(u)$ et θ', et par suite $\psi_1(z)$; la formule (42) donne ensuite $\psi_0(z)$, d'où l'on déduit σ^2 [puisque, pour z infini, $\psi_0(z) \sim -\frac{\sigma^2 z^2}{2}$], puis $\mathrm{N}_0(u)$ par la méthode de Loève, et enfin μ. Si ces calculs sont possibles, et donnent bien des fonctions $\mathrm{N}_0(u)$ et $\mathrm{N}_1(u)$ vérifiant les conditions indiquées plus haut, et une valeur ≥ 0 pour σ^2, les fonctions $\psi(z, 0)$ et $\psi(z, 1)$ sont acceptables. Mais naturellement, les conditions de possibilité apparaissent mieux si l'on se donne μ, σ^2, $\mathrm{N}_0(u)$ et $\mathrm{N}_1(u)$, et ces données montrent aussi mieux les propriétés de la fonction $\xi(t) + i\eta(t)$ associée à la v. a. $\xi + i\eta$. Par contre, c'est en partant de $\psi(z, 0)$ et $\psi(z, 1)$ qu'on obtient le plus simplement la fonction de répartition de $\xi + in$; on en déduit ensuite celle de X.

9. Le dernier Mémoire d'Aurel Wintner [4]. — Comme nous l'avons dit, ce Mémoire à pour objet l'étude du problème suivant : U *étant une v. a. laplacienne réduite, et* V *une v. a.* ≥ 0 *indépendante de* U, *dans quels cas la loi du produit* $X = UV$ *est-elle indéfiniment divisible*? Ce n'est d'ailleurs pas une restriction de supposer $V \geq 0$; en tout cas, la loi de U étant symétrique, le signe de V n'intervient pas.

Wintner ne parle d'ailleurs pas de *v. a.*, mais introduit simplement une fonction qui n'est autre que la fonction de répartition de X, et en déduit sa transformée de Fourier-Stieltjes, c'est-à-dire la fonction caractéristique de X, qu'il représente par la formule

$$\text{(W.7)} \qquad \mathrm{F}(t) = \int_0^{\infty} e^{-x t^2}\, d\,\mu(x) \quad (^5),$$

où $\mu(x)$ est la fonction de répartition de $\frac{V^2}{2}$. Cela revient à dire que $g(t) = \mathrm{F}(\sqrt{t})$ est, dans $(0, \infty)$, une fonction absolument monotone au sens de S. Bernstein.

D'autre part, compte tenu de ce que la loi de X est symétrique, la condition que ce soit une loi i. d. peut se mettre sous la forme

$$\text{(W.14)} \qquad \log \mathrm{F}(t) = -\int_{-0}^{\infty} \frac{\sin^2 t.x}{x^2}\, d\,\mu^*(x) \qquad (-\infty < t < +\infty),$$

où $\mu^*(x)$ est non décroissant et borné dans $[0, \infty)$. Il s'agit donc de savoir quand $\mathrm{F}(t)$ est représentable à la fois par la formule (W.7) et par la formule (W.14).

A cet effet, Wintner utilise un théorème de I. J. Schönberg, d'après lequel, pour que $g^r(t)$ soit absolument monotone dans $(0, \infty)$ pour tout $r > 0$, il faut

---

(5) (W.7) désigne la formule (7) du Mémoire de Wintner. Nous conservons en outre les notations de cet auteur : les lettres F, g, notamment, n'ont pas la même signification que dans les nos 1 à 7 du présent travail.

et il suffit que $g(t)$ soit de la forme

$$g(t) = e^{-h(t)}, \tag{W.12}$$

$h(t)$ étant, dans $(0, \infty)$, une fonction continue, positive et à dérivée absolument monotone. Si cette condition est réalisée, si $F(t) = g(t^2)$, et sous réserve d'une condition de continuité à l'origine sur laquelle nous reviendrons, il résulte du théorème de S. Bernstein que $F^r(t)$ est de la forme (W.7). C'est donc une fonction caractéristique, et, puisqu'il en est ainsi pour tout $r > 0$, c'est celle d'une loi i. d. La fonction $F(t)$ vérifie donc les deux conditions du problème de Wintner.

Cet auteur a ainsi défini, par leurs fonctions caractéristiques, une importante classe de variables aléatoires X solutions de son problème. C'est un résultat très intéressant. On sait combien sont souvent décevants les problèmes posés en cherchant à réaliser en même temps deux circonstances *a priori* sans rapport apparent entre elles. Il faut parfois un peu de génie pour découvrir ceux de ces rapprochements qui sont féconds. Or il n'y avait *a priori* aucun rapport entre les deux conditions considérées par Wintner, et son problème semblait artificiel. Le résultat obtenu prouve au contraire son intérêt, et mérite d'être admiré.

2° Ceci dit, Wintner a cru démontrer que la solution, évidemment très générale, qu'il a obtenue, est la plus générale. Malheureusement il y a une lacune dans sa démonstration. Il part de la remarque que la forme (W. 14) est invariante si l'on remplace $F(t)$ par $F^r(t)$ $(r > 0)$; c'est simplement l'expression analytique de la propriété par laquelle on définit les lois i. d. (c'est du moins une des définitions possibles). Il en déduit qu'on peut appliquer le théorème de Schönberg, sans s'apercevoir qu'il faudrait démontrer que $F^r(t)$ est aussi de la forme (W.7).

Or, si l'on considère la condition (W.7) seule, il est bien évident qu'elle peut être vérifiée par $F(t)$ sans l'être par $F^r(t)$. Cela revient à dire que la fonction $F(t)$ de la forme (W.7) n'est pas nécessairement la fonction caractéristique d'une loi i. d.; l'exemple de la fonction $\frac{1+e^{-t^2}}{2}$ le prouve bien.

Cette remarque ne prouve bien entendu pas que l'énoncé de Wintner soit faux. Il est possible que, si $F(t)$ vérifie non seulement la condition (W.7), mais aussi la condition (W.14), la première, et naturellement aussi la seconde, soit aussi vérifiée pour $F^r(t)$ pour tout $r > 0$. Mais il faudrait le démontrer, ou bien montrer par un exemple que c'est faux. C'est un problème qui reste ouvert.

3° Il y a aussi dans Wintner une erreur, celle-là facile à corriger, au sujet des conditions de continuité à l'origine. Il introduit une fonction $g(t)$, qui s'identifiera ensuite avec la dérivée $h'(t)$, et qui est de la forme

$$g(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\, d\lambda(x) \qquad (t \geq 0), \tag{W.8}$$

$\lambda(x)$ étant non décroissant et borné dans $(0, \infty)$. On a d'ailleurs

$$g'(0) = h'(0) = \int_0^{\infty} d\lambda(x),$$

et, comme il suppose explicitement $h(t)$ continu dans $[0, \infty)$, cela confirme bien que $\lambda(x)$ est borné.

On ne s'explique pas alors qu'il introduise comme une condition plus restrictive la condition

$$\int_1^{\infty} \frac{d\lambda(x)}{x} < \infty, \tag{W.9}$$

où le premier membre est majoré par la variation totale de $\lambda(x)$.

C'est pourtant bien cette condition qui est essentielle pour la suite. L'erreur a consisté à supposer $g(t)$ continu à l'origine. Le problème de Wintner n'exclut pas l'hypothèse $g(0) = \lambda(\infty) = \infty$. La preuve en est donnée par l'exemple, que cet auteur indique plus loin, des lois symétriques stables pour lesquelles

$$F(\sqrt{t}) = e^{-h(t)} = e^{-t^{\alpha}} \qquad (t \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 1).$$

On a naturellement $h(0) = 0$; mais $h'(0)$ est infini si $\alpha < 1$.

4° Le n° 7 du Mémoire de Wintner est consacré à une application de son théorème fondamental. Il faut naturellement faire sur cette application les mêmes réserves que pour ce théorème. En outre l'auteur ne résout pas réellement son problème, mais le ramène à un autre problème; bien entendu l'équivalence des deux problèmes est tout de même un résultat intéressant.

Les mêmes remarques ne s'appliquent pas au n° **8** qui est au contraire une vérification dans le cas des lois stables, vérification qui est peut-être une présomption en faveur de l'exactitude du théorème fondamental. Signalons seulement une erreur, qui n'est sans doute qu'une faute d'impression. Dans la formule (W.36), et dans la formule non numérotée qui la précède, l'exposant de x doit être lu $-\left(1 + \frac{p}{2}\right)$.

5° Revenant aux v. a., posons $X = UV$, $Y = XV'$, U étant indépendant de V et X de V'. Ces hypothèses n'impliquent pas l'indépendance de V et V'. Mais une corrélation entre ces v. a. est sans influence sur la loi de Y, de sorte que, pour l'étude de cette loi, on ne restreint rien en supposant V' indépendant de U et V.

Si alors U est une variable laplacienne réduite, et si la v. a. Y dépend d'une loi i. d., il résulte de $Y = U(VV')$ qu'elle est solution du problème de Wintner. Si l'on se pose un problème analogue en remplaçant seulement la loi de Laplace par celle dont dépend X, on voit que : *une condition nécessaire pour que* Y *soit une solution de ce problème est que ce soit une solution du problème de Wintner.*

Donc : *toute condition nécessaire pour le problème de Wintner est une condition nécessaire pour le problème plus général que nous venons d'énoncer* (6).

Ces remarques suggèrent un problème plus général encore : on prendrait pour U, au lieu d'une v. a. laplacienne, une v. a. dépendant d'une loi i. d., symétrique, absolument quelconque. Nous avions pensé que le cas de la loi définie par

$$\log \mathrm{F}(t) = \cos t - 1,$$

qui est la plus simple des lois discontinues présentant le caractère indiqué, serait intéressant à étudier. Mais même ce cas simple est difficile. La méthode de Wintner ne peut s'étendre qu'aux lois stables symétriques. Cette extension est indiquée dans son n° 9. Nous n'avons pas trouvé de méthode simple pouvant s'appliquer à d'autres cas, et l'on ne voit pas de raison de s'attendre à des résultats simples. Si l'on admet que l'intérêt d'un problème dépend un peu du résultat obtenu, on ne peut pas affirmer *a priori* que l'étude des cas non traités par Wintner mérite d'être entreprise. Par contre, répétons-le, il y aurait intérêt à savoir si la condition suffisante obtenue par Wintner est aussi nécessaire ; c'est un problème qui reste ouvert.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1926, 116 pages.

[2] Paul Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, Gauthier-Villars, 1re éd., 1937, XVII + 328 pages, 2e éd., 1954, XVII + 385 pages.

[3] Paul Lévy, *L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 67, 1939, p. 1-41).

[4] Aurel Wintner, *Infinitely divisible symmetric laws and normal stratifications* (*Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, t. 6, 1957, p. 327-336).

(6) Le n° 7 de Wintner peut être rattaché à cette remarque générale.

CENTRE D'ÉTUDES MATHÉMATIQUES EN VUE DES APPLICATIONS

(Institut Henri POINCARÉ)

I. - MONOGRAPHIES

A. Applications des théories Mathématiques :

FORTET (R.). — *Éléments de calcul des Probabilités* ..... 1 200 F

PETIAU (G.). — *La théorie des Fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la Physique mathématique* (relié plein pellior rouge) ..... 2 500 F

DUMAS (M.). — *Les Épreuves sur échantillon* (relié plein pellior rouge) ..... 1 000 F

C. Physique Mathématique :

DESTOUCHES (J.-L.). — *Principes de la Mécanique classique* ..... 350 F

VOGEL (Th.). — *Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la Physique Mathématique* ..... 1 200 F

II. - LE FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES A L'USAGE DES PHYSICIENS ET DES INGÉNIEURS

rédigé par les membres du Centre d'Études Mathématiques en vue des applications

(*Sous la direction de* M. le Professeur FRÉCHET)

Fascicule VII. — *Équations aux dérivées partielles* ..... 800 F

Fascicule IX. — *Fonctions de la Physique mathématique* ..... 800 F

Fascicule XII. *Calcul des probabilités* ..... 600 F

Le Formulaire de Mathématiques comprendra 13 fascicules.

III. - COLLOQUES INTERNATIONAUX

Derniers parus :

LXIII. *Les botanistes français en Amérique du Nord avant 1850* ..... 2 400 F

LXIX. *Chimie et Biochimie des Hétérocycles oxygénés* ..... 2 500 F

LXVII. *Microphysiologie comparée des éléments excitables* ..... 2 500 F

NOTA : *Le Catalogue général* — dont ce qui précède est un extrait — est envoyé sur demande.

Renseignements et Vente au

SERVICE DES PUBLICATIONS DU *C. N. R. S.*

(3e Bureau)

13, Quai Anatole-France - PARIS (VIIe) — C. C. P. Paris 9061-11 — Téléphone : INV 45-95

SOMMAIRE

FASCICULE N° 1

Pages

Structure des groupes libres, par M^lle *Sophie Piccard*... .....

Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires, par M. *Paul Lévy* (dédiée à la mémoire d'Aurel Wintner)..... 5

TARIF D'ABONNEMENT D'UN AN POUR 1959

AUX

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Paris.....	5 000 F
Départements et Union Française.....	5 500 F
Étranger.....	$ 22,62

(ou valeur correspondante en francs)

GAUTHIER-VILLARS, Éditeur-Imprimeur-Libraire, 55, q. des Grands-Augustins, PARIS (6^e)

LECLERCQ (René), Ingénieur Civil, Directeur de Recherches à l'Union Chimique Belge. — **La Création Scientifique Complément au Guide théorique et pratique de la recherche expérimentale.** In-8 (16-25) VII-86 pages, 1959..... 950 F

LEFEBVRE (Éloi), Docteur ès sciences, Docteur ès lettres. — **Structure et objet de l'analyse mathématique.** In-8 (16-25), 284 pages; 1958..... 3 500 F

ROBIN (Louis), Ingénieur en Chef des Télécommunications. — **Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales** (Collection Technique et Scientifique du C. N. E. T.). In-8 (16-25) :

Tome I.	— Préface de M. H. VILLAT : XXXV-202 pages; 1957. Broché...	4 000 F.	Cartonné...	4 300 F
Tome II.	— VIII-384 pages, 34 figures; 1958. Broché.....	5 000 F.	Cartonné.....	5 300 F
Tome III.	— VIII-289 pages, 10 figures; 1959. Broché.....	5 500 F.	Cartonné.....	6 000 F

La reproduction par tous procédés est interdite.

L'Imprimerie Gauthier-Villars se réserve le droit de fournir les microfilms des volumes épuisés.

155167-59 Dépôt légal. — 1959. — Numéro d'ordre 1343. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Dépôt légal. — 1959. — Numéro d'ordre 831. — *Gauthier-Villars*, éditeur, Paris.

Imprimé en France

La Gérante : P. GAUTHIER-VILLAR

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SEIZIEME — ANNÉE 1959

FASCICULE N° 2

(AVRIL A JUIN)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

(Ce recueil paraît tous les trois mois.)

ÉDITIONS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

I. — *PUBLICATIONS PÉRIODIQUES*

LE BULLETIN SIGNALÉTIQUE

ABONNEMENT ANNUEL
(Y compris la table des auteurs)

	France.	Étranger
PREMIÈRE PARTIE. — *Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences de l'Ingénieur*..	10 000 F	12 000 F
DEUXIÈME PARTIE. — *Biologie, Physiologie, Zoologie, Agriculture*.....	10 000 F	12 000 F

Des Tirés à part sont également mis en vente par abonnement.

Pour tous renseignements s'adresser au
CENTRE DE DOCUMENTATION du C. N. R. S.
16, rue Pierre-Curie, PARIS-V^e^ — Tél. : DANton 87-20
C. C. P. Paris 9131-62

II. — *OUVRAGES*

ALLOITEAU (J.). — *Contribution à la systématique des Madréporaires Fossiles.*

Ouvrage relié au format 21-27, comprenant :

un volume de textes de 464 pages..... 4 500 F
— de planches de 107 pages..... 4 700 F

LEXIQUE STRATIGRAPHIQUE INTERNATIONAL réalisé en 7 volumes et plus de 125 fascicules.
Demander les renseignements spéciaux aux Éditions du C. N. R. S., 13, quai A.-France, Paris-7^e^

NAHMIAS. — *Le neutrino*..... 240 F

GRIVET. — *La résonance paramagnétique nucléaire* ..... 1 800 F

TERROINE. — *La Synthèse protéique*..... 3 200 F

ROSE & TREGOUBOFF. — *Manuel de Planctonologie méditerranéenne.*

Ouvrage format 21-27 relié, comprenant :

un volume de textes de 592 pages.....
— d'illustrations de 225 pages..... } 7 500 F

SUR LE CALCUL SYMBOLIQUE
DANS QUELQUES ALGÈBRES DE BANACH

PAR M. Y. KATZNELSON.

INTRODUCTION.

Un théorème bien connu de Wiener [26] et Lévy [18] affirme que si $f(x)$ est la somme d'une série de Fourier absolument convergente et si $F(z)$ est analytique sur l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$, la série de Fourier de $F(f(x))$ converge absolument. Lévy pose le problème inverse : caractériser les fonctions qui partagent cette propriété avec les fonctions analytiques. Ainsi conçu le problème est plutôt de variables réelles que de variables complexes : en effet, une généralisation facile de la méthode employée par Lévy [18] ou une application d'un théorème de Šilov [25] montrent qu'il suffit de supposer que $F(z)=F(x+iy)$ est analytique en tant que fonction des deux variables réelles x et y, pour que la conclusion du théorème cité soit valable. Il est naturel de se limiter d'abord au cas d'une seule variable. Nous désignons par $\mathcal{A}(T)$ l'algèbre des sommes de séries de Fourier absolument convergentes, par $\mathcal{A}_r$ l'ensemble des fonctions réelles de $\mathcal{A}(T)$ et nous cherchons à caractériser les fonctions $F(x)$ définies sur l'axe réel telles que

$$f(x)\in\mathcal{A}_r \Rightarrow F(f(x))\in\mathcal{A}(T)$$

Nous dirons qu'une telle fonction F « opère » dans $\mathcal{A}_r$.

Des recherches ont été faites dans deux directions opposées. Marcinkiewicz [20] et Kahane [9] ont montré qu'il existe des ensembles assez larges de fonctions dans $\mathcal{A}_r$ dont les itérées avec des fonctions suffisamment de fois dérivables appartiennent à $\mathcal{A}(T)$. D'autre part, un certain nombre de résultats « négatifs » a été découvert par Kahane et Rudin. Dans [9] et [10] Kahane construit une fonction $f\in\mathcal{A}_r$ telle $|f|\notin\mathcal{A}_r$. Rudin [23] a montré indépendamment qu'il existe une fonction non négative $f\in\mathcal{A}_r$, telle que $\sqrt{f}\notin\mathcal{A}_r$. Un autre résultat de Rudin [24] concernant les fonctions qui « opèrent » sur les coeffi-

cients de Fourier des fonctions sommables entraîne que les fonctions qui opèrent sont nécessairement Lipschitziennes d'ordre 1. Que cette condition n'est pas suffisante résulte d'une construction de Kahane. Enfin Kahane montre [12] que le théorème de Wiener-Lévy ne peut s'étendre en remplaçant la condition « F analytique » par « F appartenant à une classe donnée (non analytique) de fonctions infiniment dérivables ».

C'est Monsieur Mandelbrojt qui a attiré mon attention sur ce problème et m'a proposé d'examiner dans quelle mesure les fonctions « monogènes » opèrent dans $\mathfrak{A}_r$.

L'idée est la suivante : pour tout $a > 0$, la fonction $F_a(x) = (a - x^2)^{-1}$ est analytique sur l'axe réel et par conséquent opère dans $\mathfrak{A}_r$, est-il possible de choisir une suite $\{a_n\}$ tendant vers zéro et une suite $\{A_n\}$ décroissant suffisamment vite pour que $\sum A_n F_{a_n}(f)$ converge pour tout $f \in \mathfrak{A}_r$. Cette construction permet d'obtenir pour toute partie compacte ou σ compacte dans $\mathfrak{A}_r$ des fonctions non analytiques qui l'appliquent dans $\mathfrak{A}(T)$. Pour construire une telle fonction qui opère dans $\mathfrak{A}_r$ il fallait démontrer que la fonction $(1 + \rho^2)^{-1}$ reste bornée dans $\mathfrak{A}_r$ lorsque f y parcourt des parties bornées. Or il résulte du dernier théorème énoncé dans [12] que ce n'est pas le cas ; une fonction $F(x)$ qui est bornée sur les parties bornées de $\mathfrak{A}_r$ est nécessairement une fonction entière.

La solution du problème de Lévy est due à une collaboration heureuse lors d'une réunion consacrée à l'analyse harmonique qui s'est déroulée à Montpellier au mois de Juillet 1958. Une suite de notes [15] [5] [14] a été présentée à l'Académie des Sciences. Nous consacrons le deuxième chapitre de cette thèse à la démonstration de la réciproque du théorème de Wiener-Lévy. Nous y donnons également une classe d'algèbres quotients de $\mathfrak{A}(T)$ pour lesquelles cette réciproque est valable. Ce chapitre peut être lu indépendamment du chapitre I.

La théorie de Gelfand [8] montre que chaque algèbre de Banach B, commutative et semi-simple peut être représentée comme algèbre de fonctions continues sur un espace de Hausdorff (espace séparé) $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ est compact si B contient un élément unité.

Nous dirons qu'une fonction $F(z)$ opère dans B, si $F(f) \in B$ dès que $f \in B$ et pourvu que F soit défini sur l'ensemble des valeurs de f. Une généralisation du théorème de Wiener-Lévy due à Gelfand, assure que les fonctions analytiques opèrent toujours. Elles ne sont, en général, pas les seules à opérer. Le premier chapitre est dédié à l'étude de quelques propriétés générales des fonctions qui opèrent, et des rapports entre la structure de B et l'ensemble $\mathfrak{F}$ de ces fonctions. Quelques résultats obtenus sous l'hypothèse que $\mathfrak{F}$ admet une structure d'algèbre de Banach peuvent être obtenus sous des hypothèses moins restrictives — par exemple : $\mathfrak{F}$ métrisable ... — comne le lecteur verra de lui-même. Le premier chapitre contient également quelques résultats d'ordre plus particulier. Citons par exemple la généralisation du théorème de Beurling-Helson et Leibenson,

Le présent travail a été effectué sous la direction de Monsieur Mandelbrojt à qui je dois non seulement ma formation et l'initiation à la recherche mathématique, mais aussi l'affection paternelle et la compréhension qu'il m'a toujours montrée. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde gratitude.

Les publications de J.-P. Kahane, ses communications verbales, les conversations que j'ai eues avec lui et son encouragement constant m'ont été très précieux. Je veux lui témoigner ici de toute mon amitié et de ma reconnaissance.

Je tiens également à remercier Monsieur Choquet et Monsieur Salem, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie le Service des Relations Culturelles du Ministère des Affaires Étrangères pour la bourse dont j'ai bénéficié pendant deux années et qui m'a permis d'entreprendre ce travail.

CHAPITRE I.

Sur le calcul symbolique dans des algèbres commutatives, auto-adjointes de Banach.

1. Quelques définitions et notations. — Soit B une algèbre commutative de Banach. Dans tout ce qui suit, nous supposons que B est semi-simple, auto-adjointe et possède un élément unité. Soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(B)$ l'espace des idéaux maximaux de B. La tranformation de Fourier-Gelfand est un isomorphisme de B sur une algèbre $\hat{B}$ de fonctions définies sur $\mathfrak{M}$, l'image $\hat{f}$ de $f \in B$ étant définie par : $\hat{f}(M) \equiv f(\mathrm{mod}\, M)$ pour tout $M \in \mathfrak{M}$. La topologie faible induite sur $\mathfrak{M}$ par $\hat{B}$, c'est-à-dire, la topologie la moins fine rendant toutes les fonctions $\hat{f}(M)$ $(f \in B)$ continues, munit $\mathfrak{M}$ d'une structure d'espace de Hausdorff compact. La distinction entre B et $\hat{B}$ ne nous semble pas utile ; nous supposons que B est une algèbre de Banach de fonctions continues sur un espace de Hausdorff compact $\mathfrak{M}$, avec comme hypothèses :

1.*a*. $f(M) \equiv 1$ appartient à B
1.*b*. si $f(M) \in B$ $\overline{f(M)} \in B$
1.*c*. si $M_1 \neq M_2$ il existe $f \in B$ tel que $f(M_1) \neq f(M_2)$
1.*d*. si $f(M)$ ne s'annule pas, $(f(M))^{-1} \in B$.

L'hypothèse 1.*b*. signifie que B est auto-adjointe ; les hypothèses 1.*c*. et 1.*d* impliquent que $\mathfrak{M}$ est l'espace des idéaux maximaux de B.

M représente toujours un élément de $\mathfrak{M}$. Nous parlerons tantôt du point M, tantôt de l'idéal maximal M sans distinction.

Pour toute partie $G \subset \mathfrak{M}$, le noyau $k(G)$ est l'idéal $\bigcap_{M_\alpha \in G} M_\alpha$. $k(G)$ est l'ensemble

de tous les $f \in B$ tels que $f(M)$ s'annule sur G. Les fonctions $f(M)$ étant continues il est clair que, si $\overline{G}$ est l'adhérence de G dans $\mathfrak{M}$: $k(G) = k(\overline{G})$.

L'enveloppe $h(I)$ d'un idéal $I \subset B$ est l'ensemble des idéaux maximaux qui le contiennent.

Rappelons que l'algèbre B est *régulière* si pour tout fermé $G \subset \mathfrak{M}$: $G = h\{k(G)\}$; en d'autres termes, si pour tout $M_0 \notin G$ il existe $f \in B$ tel que $f(M_0) = 1$, $f(M)$ s'annulant sur G. On sait {voir [19] p. 84} que B est alors *normale* : si G_1 et G_2 sont deux ensembles fermés disjoints dans $\mathfrak{M}$, il existe $f \in B$ tel que $f(M) = 0$ sur G_1 et $f(M) = 1$ sur G_2.

Définition 1.1. — Une fonction $F(z)$, définie dans un ensemble Ω du plan complexe *opère dans* B si $F(f(M)) \in B$ pour tout $f \in B$ dont les valeurs prises sur $\mathfrak{M}$ sont dans Ω.

La condition 1.*b* pourra alors s'énoncer : $F(z) = \bar{z}$ opère dans B.

Fixons une fois pour toutes : $\Omega = R$ l'axe, réel. Le fait qu'une fonction opère ne dépend que des éléments réels de B. L'ensemble B_r de ces éléments est une algèbre de Banach réelle dont B est l'algèbre complexifiée (hypothèse 1.*b*)

Il est clair que l'ensemble des fonctions, définies sur l'axe réel, qui opèrent dans B est une algèbre (complexe) ; on la notera $\mathcal{F}_0(B)$ ou plus simplement $\mathcal{F}_0$. On désigne par $\mathcal{F}$ la sous algèbre de $\mathcal{F}_0$ formée de toutes les fonctions de période 2π. $\mathcal{F}$ est une algèbre de fonctions sur $T = \frac{R}{2\pi Z}$, Z étant le groupe des entiers, et comme telle satisfait aux conditions :

1.*a'*. $F(t) \equiv 1$ appartient à $\mathcal{F}$

1.*b'*. $F(t) \in \mathcal{F}$ implique $\overline{F(T)} \in \mathcal{F}$

1.*c'*, si $t_1 \neq t_2$ il existe une fonction $F(t) \in \mathcal{F}$ telle que $F(t_1) \neq F(t_2)$; t_1 et t_2 sont ici des éléments de T ; c'est-à-dire réduits modulo 2π.

1.*d'*. si $F(t)$ ne s'annule pas, $(F(t))^{-1} \in \mathcal{F}$.

1.*a'*, 1.*b'* et 1.*d'* résultent respectivement de 1.*a*, 1.*b* et 1.*d*. 1.*c'* résulte de ce que $e^{it} \in \mathcal{F}$. L'ensemble de ces conditions implique que l'espace des idéaux maximaux de $\mathcal{F}$ est T.

Pour $F \in \mathcal{F}_0$, on désigne par (F) l'application de B_r dans B définie par

$$(F)(f) = F(f(M)) = F(f). \tag{1.1}$$

Définition 1.2. — (F) *est localement bornée en* $f_0 \in B_r$ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'image de la boule $\{f ; \|f - f_0\| < \varepsilon\} \cap B_r$ par (F) soit bornée dans B.

(F) *est localement bornée* si elle est localement bornée en tout $f \in B_r$.

Définition 1.3. — (F) *est bornée* si l'image par (F) de toute boule dans B_r est bornée dans B.

Définition 1.4. — (F) est localement bornée en $f_0 \in B_r$ au voisinage de $M_0 \in \mathfrak{M}$

s'il existe un voisinage V de M_0 dans $\mathfrak{M}$ et un $\varepsilon > 0$ tels que l'image par (F) de l'ensemble

$$\{f_0 + g\,;\, g \in k(\mathfrak{M} - V),\ \|g\| < \varepsilon\} \tag{1.2}$$

soit borné dans B.

Définition 1.5. — Le spectre $\Lambda(f)$ d'un élément $f \in B$ est l'ensemble des valeurs prises par $f(M)$ $(M \in \mathfrak{M})$.

2. Continuité des fonctions qui opèrent. — Théorème 2.1. — *Si* B *est de dimension infinie toutes les fonctions de* $\mathfrak{F}_0$ *sont continues.*

Démonstration. — Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que l'espace des idéaux maximaux de B est métrisable. Ceci résulte du fait que si F opère dans B et si B est de dimension infinie on peut trouver une sous-algèbre $B_1 \subset B$, de dimension infinie, avec un espace d'idéaux maximaux métrisable, telle que F opère dans B_1. En effet, soit $f \in B$ un élément de spectre infini ; soit B_1 l'ensemble des fonctions de B qui sont constantes sur les lignes de niveau de f, c'est-à-dire

$$f_1 \in B_1 \Leftrightarrow \{f(M_1) = f(M_2) \Rightarrow f_1(M_1) = f_1(M_2)\}. \tag{2.1}$$

Il est clair que si F opère dans B, F opère également dans B_1, étant donné que $F(g)$ est constante sur les lignes de niveau de g.

Désignons par $\mathfrak{M}_1$ l'espace des idéaux maximaux de B_1. B et B_1 étant auto-adjointes, on sait que chaque $M \in \mathfrak{M}_1$ est de la forme $M^0 \cap B_1$ avec $M^0 \in \mathfrak{M}$; d'autre part il est clair que pour que $M^0 \cap B_1 = M^1 \cap B_1$ il faut et il suffit que $f(M^0) = f(M^1)$. Il en résulte que $\mathfrak{M}_1$ est identique, comme ensemble, à $\Lambda(f)$.

La topologie faible induite par B_1 sur $\Lambda(f)$ — considérée comme $\mathfrak{M}_1$ — est évidemment plus forte ou égale à celle induite par le plan complexe ; étant séparées et compactes toutes les deux, ces topologies sont identiques et $\mathfrak{M}_1$ est métrisable. Il est donc licite de limiter la démonstration au cas où $\mathfrak{M}$ est métrisable,

$\mathfrak{M}$ étant infini, compact et métrisable, il existe une suite $\{M_j\} \subset \mathfrak{M}$ qui converge vers $M_0 \in \mathfrak{M}$. Pour chaque j on peut trouver $f_j \in B$ tel que

$$f_j(M_k) = 0 \qquad \text{si} \quad k < j,$$
$$f_j(M_j) = 1.$$

On choisit une suite $\{\alpha_j\}$ dont la décroissance soit suffisamment rapide pour que $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j$ appartienne à B et que $\{f(M_j)\}$ prenne une infinité de valeurs différentes.

Soient A_0 réel et $\{a_n\}$ une suite convergeant vers a_0, il existe une fonction

entière $G(z)$ telle que

$$\{a_n\} \cap \{G(f(M_j))\} \tag{2.2}$$

soit infini et que $G(f(M_0)) = a_0$.

Soit $F \in \mathfrak{F}_0$; comme $G(f(M)) \in B$,

$$F[G(f(M))] \in B \quad \text{et} \quad F[G(f(M_j))] \to F[G(f(M_0))] = F(a_0).$$

De toute suite $\{a_n\}$ convergeant vers a_0, on peut donc extraire une sous suite infinie $\{a_{n_j}\}$ telle que $F(a_{n_j}) \to F(a_0)$ ce qui implique la continuité de F en a_0 ; a_0 étant quelconque le théorème est démontré.

Lorsque B est de dimension finie, elle est l'algèbre de toutes les fonctions sur un espace $\mathfrak{M}$ fini et toute fonction $F(x)$ opère dans B ; la condition du théorème 2.1 est donc nécessaire et suffisante.

3. Quelques propriétés de l'application (F). — Lemme 3.1. — *Soit* B *régulière. Pour que* (F) *soit localement bornée en* $f_0 \in B_r$ *il faut et il suffit qu'elle le soit au voisinage de tout* $M \in \mathfrak{M}$ (*cf. définition* 1.4).

Démonstration. — La condition est évidemment, nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

Pour tout $M \in \mathfrak{M}$, soit V_m un voisinage de M tel que l'image de (1.2) par (F), avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_M$, soit bornée dans B. $\mathfrak{M}$ étant compact, nous pouvons choisir $M_1, \ldots M_n \in \mathfrak{M}$ tels que $\{V_{M_1}, \ldots V_{M_n}\}$ soit un recouvrement de $\mathfrak{M}$. Dans chaque V_{M_j} choisissons un ouvert W_j tel que $\overline{W}_j \subset V_{M_j}$ de façon à ce que $\{W_j\}$ soit encore un recouvrement de $\mathfrak{M}$. B étant régulière, il existe des fonctions $\varphi_j \in B_r$ telles que $\varphi_j(M) = 1$ pour $M \in W_j$ et $\varphi_j(M) = 0$ pour $M \notin V_{M_j}$. Soit enfin $\{\psi_j\}$ une décomposition de l'unité dans B_r subordonnée à $\{W_j\}$.

$$F(f_0 + g) = \sum \psi_j F(f_0 + g) = \sum \psi_j F(f_0 + \varphi_j g) \tag{3.1}$$

(F) est donc bornée dans la boule $\{f_0 + g ; \|g\| < \mathcal{E}\}$ avec $\mathcal{E} = \inf_{j=1\ldots n} \left(\frac{\mathcal{E}_{M_j}}{\|\varphi_j\|} \right)$.

Soit $F \in \mathfrak{F}_0$. Nous surnommons « ordinaire par rapport à F » chaque idéal maximal $M \in \mathfrak{M}$ au voisinage duquel (F) est localement bornée à l'origine ; en d'autres termes M est un idéal maximal ordinaire par rapport à F s'il existe un voisinage V de M est un nombre positif $\mathcal{E}$, tels que l'image par (F) de $\{f ; f \in k(\mathfrak{M} - V), \|f\| < \mathcal{E}\} \cap B_r$ est bornée dans B. Ce surnom est justifié par le lemme suivant :

Lemme 3.2. — *Soit* B *régulière et* $F \in \mathfrak{F}_0$. *Il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux maximaux non ordinaires par rapport à* F.

Démonstration. — Sans restreindre la généralité on peut supposer $F(0) = 0$ étant donné que $(F(x))$ et $(F(x) + C)$ sont bornées sur les mêmes ensembles.

Supposons qu'il existe une suite infinie $\{M_j\} \subset \mathfrak{M}$ de points non ordinaires par rapport à F. En choisissant, si nécessaire, une sous-suite on peut supposer qu'il existe des voisinages de M_j, V_j et W_j tels que

$$\overline{W}_j \subset V_j,\ V_j \cap V_k = \emptyset \qquad \text{si} \quad j \neq k. \tag{3.2}$$

Soit $\varphi_j \in B_{\mathfrak{M}}$ satisfaisant $\varphi_j(M) = 1$ pour $M \in W_j$ et $\varphi_j(M) = 0$ pour $M \notin V_j$. M étant non-ordinaire par rapport à F, on peut trouver

$$f_j \in k(\mathfrak{M} - W_j) \cap B_{\mathfrak{M}}, \qquad \|f_j\| < 2^{-j}$$

tel que

$$\|F(f_j)\| > j \|\varphi_j\|.$$

Posons

$$f = \sum f_j \qquad F(f) \in B$$

$$\|F(f)\| > \frac{1}{\|\varphi_j\|} \|\varphi_j F(f)\| = \frac{1}{\|\varphi_j\|} \|\varphi_j F(f_j)\| = \|\frac{1}{\|\varphi_j\|} F(f_j)\| \geq j \tag{3.3}$$

d'où la contradiction recherchée.

Chaque automorphisme σ de l'algèbre B induit un homéomorphisme σ de $\mathfrak{M}$ sur lui-même, ce qui correspond à un changement de variables pour les fonctions de B.

On a $\sigma(f(M)) = f(\sigma M)$ et par conséquent

$$F(\sigma(f)) = F[\sigma(f(M))] = F[f(\sigma M)] = \sigma(F(f))$$

c'est-à-dire que (F) commute avec σ.

σ étant un opérateur borné, inversible sur B, M et σM sont simultanément ordinaires par rapport à F ou non. Il en résulte que si M_0 est non ordinaire par rapport à F, il n'existe que nombre fini d'idéaux maximaux qui lui sont homologues, c'est-à-dire qui sont de la forme σM_0 pour un automorphisme σ.

Nous dirons qu'une algèbre B est riche en automorphismes si chaque idéal maximal posséde une infinité d'idéaux maximaux homologues.

Nous avons ainsi démontré :

THÉORÈME 3.1. — *Si* B *est régulière et riche en automorphismes,* (F) *est localement bornée à l'origine pour toute* $F \in \mathfrak{F}_0$.

Exemple 3.1. — Soit $\mathfrak{M} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ avec la topologie induite par celle de l'axe réel. B est l'ensemble des fonctions $f(x)$ continues sur $\mathfrak{M}$ telles que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)| < \infty$$

avec

$$\|f\| = |f(0)| + \sum |f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)|.$$

Il n'est pas difficile de voir que $F \in \mathcal{F}_0$ si et seulement si $F(x)$ est Lipschitzienne d'ordre 1 en tout point, c'est-à-dire

$$|F(x_0+h)-F(x_0)| \leq K|h| \qquad \text{si} \quad |h| \leq 1 \tag{3.4}$$

Posons $K(x_0) = \inf K$, K satisfaisant (3.4); on voit immédiatement que pour que (F) soit localement bornée en f, il faut et il suffit que $K(x)$ soit bornée au voisinage de $f(0)$, c'est-à-dire qu'au voisinage de $f(0)$, $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction bornée. Pour que (F) soit bornée (voir définition 1.3) il faut et il suffit que F soit l'intégrale d'une fonction bornée sur tout intervalle fini. Ainsi $F_0(x) = x \sin \frac{1}{x}$ opère dans B, (F_0) est localement bornée en f_0 si et seulement si $f_0(0) \neq 0$ et n'est pas localement bornée à l'origine.

Définition 3.1. — Un idéal maximal $M \in \mathfrak{M}$ est ordinaire par rapport à une famille $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_0$ s'il est ordinaire par rapport à toute $F \in \mathcal{H}$.

Lemme 3.3. — *Soit* B *régulière et* $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_0$. *Supposons que pour chaque suite* $\{F_n\} \subset \mathcal{H}$ *il existe une suite* $\{a_n\}$ *de nombres positifs, telle que* $\sum \alpha_n F_n \in \mathcal{F}_0$ *dès que* $|\alpha_n| \leq a_n$. *Dans ces conditions l'ensemble des points non ordinaires de* $\mathfrak{M}$ *par rapport à* $\mathcal{H}$ *est fini.*

Démonstration. — S'il n'en était pas ainsi il existerait une suite infinie $\{M_j\}$ de points non ordinaires par rapport à $\mathcal{H}$ possédant des voisinages V_j disjoints (voir la démonstration du lemme 3.2), Pour chaque M_j il existe une fonction $F_j \in \mathcal{H}$ par rapport à laquelle M_j est non ordinaire. En vertu du lemme 3.2 on peut supposer que M_k est ordinaire par rapport à F_j si $k \neq j$. Soit $\{a_n\}$ la suite associée à $\{F_n\}$ dans les conditions de l'énoncé du lemme. Il est clair que $\sum a_n |F_n(0)| < \infty$. $\{a_n\}$ est associée à $\{F_n(x) - F_n(0)\}$ également et nous pouvons supposer que $F_n(0) = 0$.

On définit par récurrence α_j. W_j, φ_j, g_j de la façon suivante :

a. α_j est un nombre positif inférieur à a_j tel que

$$\|\alpha_j F_j(g_k)\| \leq 2^{-j} \qquad \text{pour} \quad k < j; \tag{3.5}$$

b. W_j est un voisinage de M_j $\overline{W}_j \subset V_j$, tel que (F_k) soit bornée au voisinage de l'origine dans $k(\mathfrak{M} - W_j)$ pour tout $k < j$; ici intervient l'hypothèse selon laquelle M_j est ordinaire par rapport à F_k si $k \neq j$.

c. $\varphi_j \in B_r$ $\varphi_j(M) = 1$ sur W_j et $\varphi_j(M) = 0$ hors de V_j.

d. $g_j \in B_r \cap k(\mathfrak{M} - W_j)$, $\|g_j\| \leq 2^{-j}$ tel que

$$\|\alpha_j F_j(g_j)\| > |\varphi_j| \left(j + 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k \|F_k(g_j)\| \right), \tag{3.6}$$

(3.6) est possible d'après b et l'hypothèse que M_j est non ordinaire par rapport à F_j.

Posons

$$F=\sum \alpha_j F_j \qquad \text{et} \qquad g=\sum g_j,$$

on a

$$F\in \mathcal{F}_0 \qquad \text{et} \qquad g\in B_r,$$

donc

$$F(g)\in B$$

or

$$(3.7)\qquad \left\{\begin{aligned} \|F(g)\| &\geqq \frac{1}{\|\varphi_j\|}\|\varphi_j F(g)\| = \frac{1}{\|\varphi_j\|}\|F(g_j)\| \\ &\geqq \frac{1}{\|\varphi_j\|}\left[\alpha_j\|F_j(g_j)\| - \sum_{k\neq j}\alpha_k\|F_k(g_j)\|\right] \geqq j \end{aligned}\right.$$

d'après (3.5) et (3.6). La formule (3.7) nous donne la contradiction cherchée.

4. Topologies sur $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}$. — On peut considérer $\mathcal{F}_0$ non seulement comme l'espace des fonctions F à variable réelle qui opèrent dans B, mais aussi comme l'espace des opérations (F), c'est-à-dire comme un certain espace de fonctions de B_r dans B. La topologie de la convergence simple des (F) munit $\mathcal{F}_0$ d'une structure localement multiplicativement convexe, donnée par la famille des semi-normes $N_f(F)=\|F(f)\|$ correspondant à l'ensemble de tous les éléments f de B_r.

La multiplicativité $N_f(F.G)\leqq N_f(F)N_f(G)$ résulte de

$$\|F(f)G(f)\|\leqq \|F(f)\|.\|G(f)\| \quad \text{dans B}$$

et implique la continuité de la multiplication dans $\mathcal{F}_0$, qui devient ainsi une algèbre topologique.

Nous appelons cette topologie sur $\mathcal{F}_0$ la topologie simple des opérations, ou bien la topologie simple tout court, réservant le terme topologie simple des fonctions pour la topologie de la convergence simple des fonctions numériques définies sur l'axe réel.

Il est clair que la topologie simple sur $\mathcal{F}_0$ est plus fine que la topologie simple des fonctions. Chaque filtre de Cauchy dans $\mathcal{F}_0$ converge donc simplement sur l'axe réel vers une fonction F qui opère, on le voit, dans B; F appartient ainsi à $\mathcal{F}_0$, où elle est la limite du filtre. $\mathcal{F}_0$ est par conséquent complet.

La topologie induite sur $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_0$ sera appelée encore la topologie simple des opérations ou bien la topologie simple tout court. $\mathcal{F}$, étant une sous-algèbre fermée dans $\mathcal{F}_0$, est une algèbre complète.

Lemme 4.1. — *Pour tout* $F_0\in\mathcal{F}_0$ ($F_0\in\mathcal{F}$ *resp.*) *l'application* $F\to F(F_0)$ *est un homomorphisme continu de* $\mathcal{F}_0$ *dans* $\mathcal{F}_0$ (*dans* $\mathcal{F}$ *resp.*).

Démonstration. — Le point de vue algébrique étant trivial démontrons la continuité. Pour cela il suffit de remarquer que les conditions assurant qu'une famille $\{F_\alpha(F_0)\}$ fait partie d'un voisinage de zéro, sont des cas particuliers des conditions pour que $\{F_\alpha\}$ fasse partie d'un tel voisinage.

$\mathfrak{F}$, muni de la topologie simple des opérations, n'est pas en général une algèbre de Banach. Pour qu'elle le soit il faut et il suffit qu'il existe un voisinage borné de l'origine, c'est-à-dire une suite finie $\{f_n\}_{n=1}^{M} \leq B_r$ telle que pour tout $f \in B_r$ et $F \in \mathfrak{F}$

$$N_f(F) \leq K(f) \sup_{n=1\ldots M} N_{f_n}(F) \tag{4.1}$$

soit

$$\|F(f)\| \leq K(f) \sup_{n=1\ldots M} \|F(f_n)\|. \tag{4.2}$$

Une telle suite, lorsqu'elle existe, est appelée suite majorante pour $\mathfrak{F}$.

Définition. — $\mathfrak{F}$ est quasi analytique (I), s'il existe une fonction $F \in \mathfrak{F}$, non identiquement nulle, qui s'annule sur un intervalle.

Comme $\mathfrak{F}$ est invariante par translation, il existe, quand elle est non quasi analytique (I), pour tout intervalle $I \subset T$, une fonction non nulle dans $\mathfrak{F}$ à support dans I.

Théorème 4.1. — *Si $\mathfrak{F}$ est non quasi analytique* (I) *et si, munie de la topologie simple, $\mathfrak{F}$ est une algèbre de Banach, il existe un élément $f \in B_r$ dont le spectre contient un intervalle. En particulier la puissance de $\mathfrak{M}$ est alors au moins celle du continu.*

Démonstration. — Soit $\{f_n\}_{n=1}^{M}$ la suite majorante pour $\mathfrak{F}$. $\bigcup_{n=1}^{M} \Lambda(f_n)$ est un ensemble compact dans T; s'il ne couvre pas T tout entier il existe un intervalle $I \subset T$ disjoint à $\bigcup \Lambda(f_n)$. Soit $F \in \mathfrak{F}$ non nulle à support dans I.

$F(f_n) = 0$ pour $n = 1 \ldots M$ sans que $F = 0$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\{f_n\}$ est une suite majorante.

Remarque 1. — La condition de non quasi analyticité qui figure dans l'énoncé du théorème est superflue. Nous verrons que si $\mathfrak{F}$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Banach, elle contient toutes les fonctions p $(p < \infty)$ fois dérivables pour un entier p.

Remarque 2. — Le théorème 4.1 concerne la topologie simple sur $\mathfrak{F}$ plutôt que l'algèbre $\mathfrak{F}$ elle-même. Il existe des algèbres B, avec $\mathfrak{M}$ dénombrable, telles que $\mathfrak{F}$ puisse être normée de manière à devenir une algèbre de Banach. Dans de tels cas, la topologie simple des opérations est plus faible que la topologie induite par la norme et n'entre évidemment pas dans la classe des topologies localement convexes pour lesquelles le théorème du graphe fermé est valable (*voir* l'exemple 4.1)

Exemples 4.1. — Soit X un exemple d'Hausdorff compact infini; $B = C(X)$ l'algèbre de toutes les fonctions continues sur X avec la norme :

$$\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |.$$

Une condition suffisante et nécessaire pour que $F(t)$ opère dans B est que $F(t)$ soit continue. $\mathfrak{F}$ est donc $C(T)$. La topologie simple sur $\mathfrak{F}$ coïncide avec celle induite par la norme de $C(T)$ si et seulement si il existe un $f \in B_r$ dont le spectre contient un intervalle.

4.2. Soit I un intervalle, $B = D_n(I)$ l'algèbre de toutes les fonctions n fois continuement dérivables sur I. On a $\mathfrak{M} = I$, $\mathfrak{F} = D_n(T)$ avec la topologie donnée par la norme.

4.3. Soit $\varphi(h)$ un module de continuité, c'est-à-dire une fonction non-négative sur $[0, 1]$, continue à l'origine, concave et non identiquement nulle.

Pour $n \geq 1$, désignons par $\Lambda_{n,\varphi}(I)$ le sous-espace de $D_n(I)$ des fonctions dont la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}$ satisfait à

$$| f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x+h) | \leq K\varphi(|h|) \tag{4.3}$$

pour $|h| \leq 1$ tel que x et $x+h \in I$.

$\Lambda_{n,\varphi}$ est une algèbre de Banach avec une norme équivalente à

$$\| f \| \sim \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sup_{x \in I} | f^{(m)}(x) | + K_\varphi(f).$$

$K_\varphi(f)$ étant égal à $\inf K$, K satisfaisant (4.3).

Si $B = \Lambda_{n,\varphi}(I)$ on a $\mathfrak{F} = \Lambda_{n,\varphi}(T)$, la topologie simple des opérations étant équivalente à celle induite sur $\mathfrak{F}$ par sa norme.

4.4. Soit G un groupe abélien, localement compact, infini. $B = L^1(G)$. Les fonctions qui opèrent dans B sont nécessairement analytiques (*voir* les références dans le chapitre II).

5. Cas où $\mathfrak{F}$ est une algèbre de Banach. — Supposons que $\mathfrak{F}$ en tant qu'algèbre possède une structure topologique d'algèbre de Banach. Une telle structure, lorsqu'elle existe est plus fine que la topologie simple des opérations. Ceci résulte en effet du théorème du graphe fermé, l'application $F \to F(f)$ de $\mathfrak{F}$ dans B ayant son graphe fermé pour tout $f \in B_r$ (B étant semi-simple par hypothèse). Nous désignons les normes de $\mathfrak{F}$ et de B de la même manière; il est clair que lorsque l'on parle de la norme d'un élément de B, cette norme est prise dans B et lorsque l'on parle de la norme d'une fonction qui opère la norme est prise dans $\mathfrak{F}$.

Posons $\omega_n = \| e^{inx} \|$. Nous appellerons la suite : $\{ \omega_n \}_{-\infty}^{\infty}$, « la suite associée à $\mathfrak{F}$ ». $\mathfrak{F}$ étant une algèbre de Banach il est clair que $\omega_{m+n} \leq \omega_m \omega_n$, ce qui implique

que l'ensemble $A\{\omega_n\}$ des séries trigonométriques $\sum a_n e^{inx}$, telles que $\sum |a_n| \omega_n < \infty$, est une algèbre de Banach, où la norme est définie par

$$\left\| \sum a_n e^{inx} \right\|_1 = \sum |a_n| \omega_n \tag{5.1}$$

$A\{\omega_n\}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{F}$; si $F(x) \in A\{\omega_n\}$

$$\| F(x) \| \leq \| F(x) \|_1 .$$

Nous verrons dans la suite que ces normes ne sont jamais équivalentes,

THÉORÈME 5.1. — *Si $\mathfrak{F}$ admet une structure d'algèbre de Banach, il existe un entier p tel que $\mathfrak{F}$ contienne toutes les fonctions p fois dérivables.*

Démonstration. — Pour tout $f \in B_r$, l'application $F \to F(f)$ est une application continue de $\mathfrak{F}$ dans B. Soit K_f la norme de cette application. Posons

$$K'(f) = \sup_n \left\{ \frac{\| e^{inf} \|}{\omega_n} \right\} \leq K_f . \tag{5.2}$$

$K'(f)$ est une fonction numérique définie sur B_r, et, comme elle est le supremum d'une suite de fonctions continues, elle appartient à la première classe de Baire et admet, par conséquent, un point de continuité f_0.

Il existe un $\eta > 0$ tel que $\| f - f_0 \| < \eta$ implique :

$$K'(f) \leq \overline{K}(f_0, \eta).$$

Pour $\| f - f_0 \| < \eta$ on a

$$\| e^{in(f-f_0)} \| \leq \| e^{inf} \| \, \| e^{-inf_0} \| \leq K'(f) K'(f_0) \omega_n \omega_{-n} \tag{5.3}$$

or

$$K'(f) \leq \overline{K}(f_0, \eta) \quad \text{et} \quad \omega_{-n} \sim \omega_n \quad (*).$$

et par conséquent

$$\| e^{in(f-f_0)} \| \leq C(\eta) \omega_n^2 . \tag{5.4}$$

L'application $F(x) \to F(2x)$ est un opérateur linéaire fermé dans $\mathfrak{F}$ et d'après le théorème du graphe fermé il existe un K tel que

$$\| F(2x) \| \leq K \| F(x) \|$$

et en particulier

$$\omega_{2n} \leq K \omega_n , \qquad \omega_{2^n} \leq K^n \omega_1 . \tag{5.5}$$

Soit $f \in B_r$ et m un entier quelconque. On a :

$$\| e^{imf} \| = \| e^{i 2^n t f} \|$$

avec $t 2^n = m$, n étant le plus petit entier tel que $t \| f \| < \eta$.

(*) Nous utilisons le signe $a \sim b$, a et b étant des variables, pour indiquer que le rapport $\frac{a}{b}$ est borné inférieurement et supérieurement par des nombres positifs.

D'après (5.4) et (5.5), il résulte que

$$|e^{imf}| \leq C(\gamma)\,\omega_{2^n}^2 \leq C(\gamma)\,K^{2n}\,\omega_1^2$$

et comme

$$n < \text{Const.} + \frac{\log m}{\log 2}$$

nous obtenons

$$\|e^{imf}\| \leq \text{Const.}\, m^{p-1}, \qquad p = 2\frac{\log K}{\log 2} + 1. \tag{5.6}$$

(5.6) implique évidemment que pour toute fonction F, p fois dérivable, $F(f) \in B$; f étant quelconque, le théorème est démontré.

Corollaire 1. — *$\mathcal{F}$ est non quasi analytique (justification de la remarque 1 à la suite du théorème 4.1).*

Corollaire 2. — *$\mathcal{F}$ est régulière et par conséquent* B *est régulière. En effet, soit* G *un ensemble fermé dans $\mathfrak{M}$ et $M_0 \in \mathfrak{M} - G$; il existe une fonction $\varphi(M)$ continue sur $\mathfrak{M}$, telle que $\varphi(M) = 0$ pour $M \in G$, $\varphi(M_0) = 1$. D'après le théorème de Stone Weierstrass il existe une fonction $f \in B_r$ telle que $|f(M)| - \varphi(M) \leq \frac{1}{4}$. Il existe une fonction $F(x)$ dans $\mathcal{F}$, nulle pour $|x| < \frac{1}{4}$ et égale à 1 pour $|x-1| \leq \frac{1}{4}$. $F(f) \in B$ et il est évident que $F(f(M)) = 0$ pour $M \in G$, et $F(f(M_0)) = 1$.*

Remarque. — La suite associée à $\mathcal{F}$ est une suite croissante comme nous le verrons plus loin. Ce résultat est basé sur le fait que $\mathcal{F}$ est une algèbre régulière, fait qui, a son tour, repose sur le théorème 5.1; mais, une fois acquis ce résultat montre à l'aide de (5.5) que nous pouvons prendre

$$p = 1 + \frac{\log K}{\log 2} \quad \text{au lieu de} \quad 1 + 2\frac{\log K}{\log 2}$$

Théorème 5.2. — *Si $\mathcal{F}$ admet une structure d'algèbre de Banach, il n'existe dans $\mathfrak{M}$ qu'un nombre fini de points non ordinaires par rapport à $\mathcal{F}$. Soit $G \subseteq \mathfrak{M}$ un fermé qui ne contient aucun de ces points; chaque fonction de $\mathcal{F}$ est bornée dans toute partie bornée de $k(\mathfrak{M} - G)$.*

Démonstration. — B étant régulière et $\mathcal{F}$ ayant une structure d'algèbre de Banach, le lemme 3.3 est applicable pour $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ ce qui démontre la première partie du théorème.

Il résulte du lemme 3.1 que pour toute $F \in \mathcal{F}$, (F) est bornée au voisinage de l'origine dans l'idéal $k(\mathfrak{M} - G)$. Si $f_n \in k(\mathfrak{M} - G)$, $f_n \in B_r$, $f_n \to 0$, $\{F(f_n)\}$ reste bornée pour toute $F \in \mathcal{F}$. Désignons par (f) l'application $F \to F(f)$ de $\mathcal{F}$ dans B. L'application $f \to (f)$ plonge B_r dans $\mathfrak{L}(\mathcal{F}, B)$ (l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{F}$ dans B) et il résulte du théorème de Banach-

Steinhaus que pour toute suite $\{f_n\}$ tendant vers zéro dans $k(\mathfrak{M}-G)\cap B_r$, la suite $\{(f_n)\}$ est bornée en norme dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}, B)$. On déduit de ceci qu'il existe toute une boule $\{\|f\|<\eta\}$ dans $k(\mathfrak{M}-G)\cap B_r$ qui est plongée dans un ensemble borné dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}, B)$.

Pour tout entier n, l'opérateur $(n) : F(x)\to F(nx)$ est un opérateur borné sur $\mathfrak{F}$. On a

$$F(nx)(f)=F(nf)=F(x)(nf)$$

c'est-à-dire

$$(nf)=(f)(n) \tag{5.7}$$

qui implique que la boule $\{\|f\|<n\eta\}$ dans $k(\mathfrak{M}-G)\cap B_r$ se plonge dans un ensemble borné dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}, B)$ [car $\{\|f\|<\eta\}$ le fait].

Corollaire. — *Si* B *est riche en automorphismes, toute partie bornée de* B_r *est plongée dans une partie bornée de* $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}, B)$. *En particulier,* (F) *est bornée pour toute* $F\in\mathfrak{F}$ (*voir la définition* 1.3). *On peut « remonter » à* $\mathfrak{F}_0$: *soit* $F\in\mathfrak{F}_0$, $F(k\sin x)\in\mathfrak{F}$; $(F(k\sin x))$ *est donc bornée, ce qui implique que* (F) *est bornée sur la boule* $\|f\|<\frac{k}{2}$ *dans* B_r; *k étant quelconque,* (F) *est bornée.*

L'algèbre $\mathfrak{F}$ étant une algèbre de Banach on peut chercher les fonctions qui opèrent dans $\mathfrak{F}$. Il est clair que l'on retrouve $\mathfrak{F}_0$ et $\mathfrak{F}$. L'espace des idéaux maximaux de $\mathfrak{F}$ est T, comme nous l'avons déjà remarqué, dont tous les points sont équivalents; nous pouvons appliquer le corollaire du théorème 5.2 pour obtenir que pour toute $F\in\mathfrak{F}_0$, l'opération (F) comme fonction de $\mathfrak{F}_r$ (les fonctions réelles de $\mathfrak{F}$) dans $\mathfrak{F}$, est une opération bornée, c'est-à-dire si $F\in\mathfrak{F}_0$ et $R>0$, il existe une constante $N=N_R(F)$ telle que

$$\sup_{\|F_\alpha\|\leq R}\|F(F_\alpha)\|=N_R(F).$$

Pour tout R, $N_R(F)$ est une semi norme multiplicative sur $\mathfrak{F}_0$. On peut choisir une suite $R_n\to\infty$ et considérer la topologie sur $\mathfrak{F}_0$, donnée par la suite (croissante) des semi normes $N_{R_n}(F)$. On voit immédiatement que cette topologie est une structure de Fréchet sur $\mathfrak{F}_0$.

La restriction de cette même structure à $\mathfrak{F}$ doit, à cause du théorème du graphe fermé, être équivalente à celle de $\mathfrak{F}$ en tant qu'algèbre de Banach et par conséquent il existe un R_0 tel que (5.8)

$$\|F\|\sim N_{R_0}(F)\qquad \text{pour}\quad F\in\mathfrak{F}. \tag{5.8}$$

Il en résulte que la suite ω_n est équivalente à une suite croissante (justification de la remarque qui suit le théorème 5.1). En effet :

$$\omega_n=\|e^{inx}\|\sim\sup_{\|F\|<R_0}\|e^{inF}\|=\sup_{\|F\|<nR_0}\|e^{iF}\|$$

Pour chaque $t\in T$, la translation $\tau_t : F(x)\to F(x+t)$ est un automorphisme de $\mathfrak{F}$.

LEMME 5.1. — *La famille* $\{\tau_t\}_{t\in T}$ *est uniformément bornée dans* $\mathcal{L}(\mathcal{F})$; $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ *étant l'espace des opérateurs linéaires continus sur* $\mathcal{F}$.

Démonstration. — Soit $F_j(x)\equiv(x)\,(\mathrm{mod.}\,2\pi)$ sur $I_j(j=1,2)$ ou I_j sont deux intervalles ouverts sur T dont la réunion couvre T. On peut choisir les F_j suffisamment de fois dérivables pour qu'elles appartiennent à $\mathcal{F}$.

Soit $G(x)=1$ sur $T-I_2$ et $G(x)=0$ sur $T-I_1$, on a

$$(5.9)\qquad \begin{cases} F(x)=G(x)F(F_1)+(1-G)F(F_2)\\ F(x+t)=G(x)F(F_1+t)+(1-G)F(F_2+t). \end{cases}$$

Or, l'ensemble $\{F_j+t;\ j=1,2 \text{ et } -\pi\leq t\leq\pi\}$ est borné dans $\mathcal{F}$ et le lemme résulte du fait que (F) en tant qu'opération sur $\mathcal{F}$ est bornée pour toute $F\in\mathcal{F}$ et du théorème de Banach-Steinhaus.

Remarque. — $\{\tau_t\}_{t\in T}$ est une représentation du groupe T dans $\mathcal{F}$. Si l'on pose

$$\beta(t)=\|\tau_t\|$$

on a

$$\beta(t_1+t_2)\leq\beta(t_1)\beta(t_2)$$

d'où il résulte directement que $\beta(t)$ est bornée *si elle est mesurable.*

Définition (5.1). — L'adhérence de l'ensemble des fonctions analytiques dans $\mathcal{F}$ sera notée par $\mathcal{F}^\star$.

Il est clair que $\mathcal{F}^\star$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$.

Les fonctions analytiques sont, on le sait, continues (et même analytiques) sur B_r. Si $\{f_n\}$ est une suite convergente dans B_r, la suite des applications $\{(f_n)\}$ (*voir* démonstration du théorème 5.2) converge donc sur l'ensemble des fonctions analytiques de $\mathcal{F}$, et si cette suite est bornée en norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}, B)$, elle converge fortement dans $\mathcal{F}^\star$.

THÉORÈME 5.3. — *Si l'on garde les hypothèses et les notations du théorème* 5.2, *les fonctions de* $\mathcal{F}^\star$ *opèrent continuement dans* $\mathcal{F}$; *il résulte de* (5.9) *que la restriction de* $\{\mathfrak{C}_t\}_{t\in T}$ *à* $\mathcal{F}^\star$ *est fortement continue.*

Définition 5.2. — On dit que l'algèbre B satisfait la condition D au point $M_0\in\mathfrak{M}$ si pour tout $f_0\in M_0$ il existe un f_1 aussi voisin que l'on veut de f_0 tel que $f_1(M)=0$ au voisinage de M_0.

La condition D pour tout $M\in\mathfrak{M}$ implique la régularité de B et le fait que B n'a pas d'idéaux primaires; en effet, chaque idéal primaire contenu dans M_0 contient toutes les fonctions de B qui s'annulent au voisinage de M_0, qui est dense dans M_0 d'après la condition D. L'implication réciproque est également valable, c'est-à-dire : si B est une algèbre régulière sans idéaux primaires. B satisfait à la condition D en tout $M\in\mathfrak{M}$.

THÉORÈME 5.4. — *Si* B *satisfait la condition* D *au point* $M_0 \in \mathfrak{M}$ *et si* M_0 *admet une base dénombrable* $\{V_n\}$ *de voisinages,* M_0 *est ordinaire par rapport à* $\mathfrak{F}^*$.

Démonstration. — Pour toute fonction F de $\mathfrak{F}^*$, (F) appartient à la première classe de Baire considérée comme fonction de $M_0 \cap B_r$ dans B, et admet par conséquent des points de continuité. Soit $f_0 \in M_0 \cap B_r$ un tel point. (F) est bornée dans une boule $\|f - f_0\| < 2\varepsilon$ dans M_0.

Soit f_1 l'élément donné par la condition D de distance inférieure à ε de f_0. (F) est encore bornée dans la boule $\|f - f_1\| < \varepsilon$ dans $M_0 \cap B_r$. Soit V_0 un voisinage de M_0 dans lequel $f_1(M) = 0$; (F) est bornée dans la boule de rayon ε autour de l'origine de $k(\mathfrak{M} - V_0) \cap M_0 \cap B_r$. Pour tout $F \in \mathfrak{F}^*$, (F) reste donc bornée sur toute suite $\{f_n\}$, $f_n \in M_0 \cap B_r$ telle que $f_n \to 0$, le support de f_n étant contenu dans V_n.

Du théorème de Banach-Steinhaus il résulte l'existence d'un voisinage V et de $\varepsilon > 0$ tel que la boule $\{\|f\| < \varepsilon,\ f \in k(\mathfrak{M} - V) \cap M_0 \cap B_r\}$ soit plongée dans une partie bornée de $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}^*, B)$ (*voir* la démonstration du théorème 5.2).

Du lemme 5.1 il résulte que si $F \in \mathfrak{F}^*$, (F) est bornée sur l'ensemble :

$$K(V, \varepsilon) = \{f + t,\ \|f\| < \varepsilon,\ f \in k(\mathfrak{M} - V) \cap M_0 \cap B_r,\ |t| < 1\}.$$

Soit W un voisinage de M_0 tel que $\overline{W} \subset V$, et $g \in B_r$ tel que $g(M) = 0$ sur W, $g(M) = 1$ hors de V. Si $f \in k(\mathfrak{M} - W) \cap B_r$, $\|f\| < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{3\|g\|}$ on a

$$f + f(M_0)g \in K(V, \varepsilon)$$

et le théorème résulte de l'identité

$$F(f) = F(f + f(M_0)g) - F(f(M_0)g) + F(0)$$

et du fait (impliqué par th. 5.3) que pour $F \in \mathfrak{F}^*$, $g \in B_r$, $F(\alpha g)$ comme fonction de α, est continue au voisinage de l'origine.

Remarquons que nous avons démontré non seulement que pour toute $F \in \mathfrak{F}^*$ il existe un voisinage V de M tel que (F) soit bornée au voisinage de l'origine dans $k(\mathfrak{M} - V) \cap B_r$, mais aussi qu'il existe un voisinage W commun à toutes les fonctions de $\mathfrak{F}^*$.

Il résulte de (5.7) que les opérations de $\mathfrak{F}^*$ sont bornées (voir définition 1.3) dans $k(\mathfrak{M} - W)$.

La condition que M_0 ait une base dénombrable de voisinages est remplie si $\mathfrak{M}$ est métrisable, ce qui est le cas si B est séparable. Dans ce cas nous pouvons améliorer le résultat du théorème 5.2 en nous restreignant à $\mathfrak{F}^*$. Nous savons en effet qu'il n'y a qu'un nombre fini de points $M_1 \ldots M_n$ non ordinaires par rapport à $\mathfrak{F}$ (à $\mathfrak{F}^*$). L'algèbre B étant régulière, chaque idéal maximal M_j contient un idéal primaire minimal P_j, qui n'est autre que l'adhérence de

l'ensemble des fonctions de B qui s'annulent au voisinage de M_j. Posons

$$P = \bigcap_{j=1}^{n} P_j.$$

P est une sous-algèbre de B. Nous lui ajoutons n éléments $g_1 \dots g_n$, tels que : $g_j(M) = 1$ au voisinage de M_j, $g_j(M) = 0$ au voisinage de M_k si $k \neq j$, et nous obtenons une algèbre B_1 avec $\mathfrak{M}$ comme espace d'idéaux maximaux. B_1 est une sous-algèbre de B sur laquelle toutes les opérations (F) pour $F \in \mathfrak{F}^*$ sont bornées. En effet, les points M de $\mathfrak{M}$ sont ordinaires dans B_1 par rapport à $\mathfrak{F}^*$, soit qu'ils l'étaient déjà dans B, soit, si $M = M_j$, comme conséquence du théorème 5.4.

Rappelons qu'une fonction $G(t)$ à valeurs vectorielles est « mesurable » sur T, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe dans T un ouvert E_ε de mesure inférieure à ε, tel que $G(t)$ soit continue sur $T - E_\varepsilon$.

LEMME 5.2. — *Soit* $F \in \mathfrak{F}$; *si* $\tau_t F = F(x+t)$ *est une fonction mesurable de* T *dans* $\mathfrak{F}$, *et si* $F(x) = \Sigma a_n e^{inx}$ *on a :*

$$|a_n| < K \omega_n^{-1} \tag{5.10}$$

Démonstration.

$$\| a_n e^{inx} \| = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x+t) e^{-int} dt \right\| \leq \sup \| F(x+t) \|$$

or $\sup \| F(x+t) \|$ est fini (lemme 5.1), et le lemme est démontré.

THÉORÈME 5.5. — *Si* F *remplit les conditions du lemme* 5.2 *elle est adhérente à* $A\{\omega_n\}$ *dans* $\mathfrak{F}$. F *appartient donc à* $\mathfrak{F}^*$ *et la fonction* $\tau_t F = F(x+t)$ *est par conséquent continue en tant que fonction de* T *dans* $\mathfrak{F}$.

Démonstration. — Soit $\eta_1 > 0$ et E_{η_1} de mesure inférieure à η_1 tel que $\tau_t F$ est continue sur $T - E_{\eta_1}$. Si t_0 est un point de densité de $T - E_{\eta_1}$, I un intervalle autour de t_0 tel que $\operatorname{mes}(I \cap E_{\eta_1}) \leq \varepsilon \operatorname{mes}(I)$ et $\Delta_1(t)$ la fonction triangulaire de support I dont l'intégrale est égale à 1, on a

$$\left\| F(x+t_0) - \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_1(t) F(x+t) dt \right\| \leq M\varepsilon + \alpha \tag{5.11}$$

avec $M = \sup_{t \in I} \| F(x+t) \|$ et $\alpha = \sup_{t \varepsilon I \cap E_{\eta_1}} \| F(x+t_0) - F(x+t) \|$.

Lorsque mes (I) tend vers zéro, ε et α tendent aussi vers zéro c'est-à-dire

$$F(x+t_0) = \lim_{I} \int \Delta_I(t) F(x+t) dt$$

or

$$\int \Delta_I(t) F(x+t) dt = \sum c_n \delta_n^{(1)} e^{inx} \in A\{\omega_n\}$$

étant donné que $|a_n| < K\omega_n^{-1}$ (lemme 5.2) et que $\sum |\hat{\sigma}_n^{1}| < \infty$, ce qui entraîne $F(x+t_0) \in \overline{A\{\omega_n\}}$, $A\{\omega_n\}$ étant invariante par $\mathfrak{S}_t$, $F(x) \in \overline{A\{\omega_n\}} = \mathfrak{F}^\star$ et le théorème est démontré.

Remarquons que dans la dernière démonstration il suffirait de supposer qu'il existe un ensemble de mesure positive sur lequel la restriction de $F(x+t)$ — comme fonction de t à valeurs vectorielles — est continue.

Il serait intéressant de montrer que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^\star$ (ou d'en donner un contre exemple); nous ne pouvons qu'indiquer quelques conditions entraînant cette identité.

L'intégrale $\int \Delta_I(t) F(x+t)\, dt$ a un sens si l'on considère $F(x+t)$ comme fonction de t à valeurs vectorielles dans $C(T)$ — l'espace des fonctions continues sur T avec $\|F\| = \sup |F(x)|$.

$$F_I(x) = \int \Delta_I(t) F(x+t)\, dt = \sum a_n \delta_n^{(I)} e^{inx} \in \mathfrak{F}^\star.$$

Cette intégrale est la limite, dans $C(T)$, de sommes de Riemann dont chacune a une norme dans $\mathfrak{F}$ inférieure à $M = \sup_{t \in I} \|F(x+t)\|$.

Si l'intersection de la boule unité de $\mathfrak{F}$ avec toute partie compacte de $C(T)$ est faiblement compacte dans $\mathfrak{F}$, $\|F_I\|_{\mathfrak{F}} \leq M$ et F est la limite faible d'une suite F_{I_n}. F appartient donc à l'adhérence faible de $A\{\omega_n\}$ et le théorème de Hahn Banach implique que $F \in \overline{A\{\omega_n\}}$. Ceci étant vrai pour tout $F \in \mathfrak{F}$, on a $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{F}$.

Une deuxième remarque concernant la continuité des opérations (F), $F \in \mathfrak{F}$, est la suivante : lorsque pour toute $F \in \mathfrak{F}$, (F) est bornée dans B_r (localement bornée à l'origine). L'ensemble :

$$M_0^c = \{F;\ F(0) = 0,\ (F) \text{ continue à l'origine}\}$$

est un idéal primaire dans $\mathfrak{F}$.

Soit p tel que toute fonction p fois dérivable opère dans B (Théorème 5.1); il résulte d'un théorème de Naimark (voir chapitre I, section 7) que si $F \in \mathfrak{F}$, $F(0) = 0$, $F^{p+1} \in M_0^c$, d'où le théorème :

Théorème 5.6. — *Si au voisinage de $t_0 \in T$, $F \in \mathfrak{F}$ est de la forme $F(t_0) + F_1^{p+1}$ avec $F_1 \in \mathfrak{F}$, (F) est continue au point t_0 (considéré comme fonction appartenant à B_r ayant comme valeur la constante t_0).*

Nous ne savons pas si l'hypothèse — admise implicitement dans l'énoncé du théorème 5.6 — selon laquelle pour toute $F \in \mathfrak{F}$, (F) est bornée, n'est pas superflue en ce sens qu'elle résulte simplement du fait que $\mathfrak{F}$ admet une stucture d'algèbre de Banach. En d'autres termes, nous ne savons pas si le

corollaire du théorème 5.2 est valable en l'absence d'hypothèses sur les automorphismes de B.

Nous allons terminer cette section avec un théorème sur les rapports entre l'algèbre $\mathcal{F}$ et les algèbres de type $A\{\Omega_n\}$ qui peuvent lui être associées. Ce théorème généralise un théorème de Beurling et Helson [2] ou plutôt une forme affaiblie de ce théorème due à Leibenson concernant les endomorphismes de l'algèbre $\mathfrak{A} = A\{1\}(= L^1(Z))$.

Le théorème de Beurling-Helson affirme que si la fonction $\alpha(t)$ est telle que

$$f(t) \in \mathfrak{A} \Rightarrow f(\alpha(t)) \in \mathfrak{A}$$

$\alpha(t)$ est nécessairement une fonction linéaire à pente entière. Leibenson [17] démontre le même résultat lorsque $\alpha(t)$ est supposée deux fois dérivable. Nous donnons l'analogue du théorème de Leibenson pour $A\{\Omega_n\}$.

THÉORÈME 5.7. — *Soit* $A\{\Omega_n\}$ *telle que*

$$F(x) \in A\{\Omega_n\} \Rightarrow F(2x) \in A\{\Omega_n\} \tag{5.12}$$

ou bien, ce qui revient au même, $\limsup \frac{\Omega_{2n}}{\Omega_n} < \infty$.

Soit $\alpha(x)$ deux fois continuement dérivable; supposons que

$$F(x) \in A\{\Omega_n\} \Rightarrow F(\alpha(x)) \in A\{\Omega_n\} \tag{5.13}$$

on a alors

$$\alpha(x) = Nx + \alpha_0$$

où N est un entier.

Démonstration. — Nons utilisons le lemme suivant dû à Kahane [10] :

Soit $\alpha(t)$ réelle, de période $2\pi \pmod{2\pi}$, deux fois dérivable sur un intervalle I où $\alpha''(t) \geq \rho > 0$.

Posons $\mathcal{E} = \frac{2}{\pi\sqrt{|n|\rho}}$ et choisissons K de façon à ce que

$$0 = 1 - \left(\frac{K}{K-1}\right)^2 \left(1 - \frac{|I|}{2\pi}\right) > 0$$

$|I|$ étant la longueur de I.

Posons

$$e^{in\alpha(t)} = \sum c_m^{(n)} e^{imt}.$$

On a dans ces conditions

$$\sum_{|c_m^{(n)}| < K\mathcal{E}} |c_m^{(n)}| \geq \frac{0}{K\mathcal{E}}. \tag{5.14}$$

(5.13) implique — théorème du graphe fermé — que :

$$\| F(\alpha(t)) \| \leq \text{Cte} \| F \|$$

la norme étant prise dans $A\{\Omega_n\}$; il résulte en particulier que :

$$\| e^{\ln \alpha(t)} \| \leq \text{Cte} \| e^{\text{int}} \| = \text{Cte}\, \Omega_n. \tag{5.15}$$

Supposons $\alpha''(t) \not\equiv 0$, il existe alors un intervalle I sur lequel $\alpha''(t) > \rho > 0$. En remplaçant si nécessaire $\alpha(t)$ par $2^m \alpha(t)$, remplacement possible en vertu de (5.12), on peut supposer que ρ est suffisamment grand pour que

$$\frac{0}{K^2 \mathcal{E}^2} = \frac{0\pi^2}{4K^2} \rho\, |n| \geq 5\, |n|. \tag{5.16}$$

Soit $j(n)$ l'indice de Ω_n dans la suite $\{\Omega_n\}$ ordonnée selon la grandeur des Ω_n [$j(n_1) \geq j(n_2)$ implique $\Omega_{n_1} \geq \Omega_{n_2}$], il est évident que pour une suite infinie de n, on a $4|n| > j(n)$; pour un tel n il résulte de (5.14) et de (5.16) :

$$\begin{aligned} \| e^{\ln \alpha(t)} \| = \sum |c_m^{(n)}|\, \Omega_m &\geq \sum_{|c_m^{(n)}| < K\mathcal{E}} |c_m^{(n)}|\, \Omega_m \\ &\geq \sum_{j(m)=1}^{5|n|} K\mathcal{E}\Omega_m > \sum_{(m)=4|n|}^{5|n|} K\mathcal{E}\Omega_m \\ &\geq K\mathcal{E}\, |n|\, \Omega_n = \text{Cte} \sqrt{|n|}\, \Omega_n. \end{aligned} \tag{5.17}$$

ce qui contredit (5.15) et démontre le théorème.

Corollaire. — *Si* $A\{\Omega_n\}$ *opère dans* $A\{\omega_n\}$ *on a :*

$$\limsup_{n=\infty} \Omega_n \omega_n^{-1} |n|^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

Si $\{\omega_n\}$ est une suite croissante, on a pour tout $k > 0$

$$\sqrt{|n|}\, \omega_{kn} = O(\Omega_n).$$

En effet

$$\alpha(t) = 2\rho \sin t \in A\{\omega_n\}$$

$F(x) \to F(\alpha(x))$ est une application linéaire continue de $A\{\Omega_n\}$ dans $A\{\omega_n\}$ et le corollaire résulte des formules analogues à (5.15) et (5.17).

Remarques. — *a.* L'exemple $\Omega_n = a^n$, $(a > 1)$, montre que l'hypothèse 5.12 n'est pas inutile.

$A\{a^n\}$ est, en effet, analytique; c'est-à-dire que si $F(x) = \sum a_n e^{inx} \in A\{a^n\}$, F peut être prolongée analytiquement dans la bande $|Im(z)| \leq \log a$, et vice-versa, si $F(z)$, de période 2π, est analytique dans la bande $|Im(z)| < b$ avec $b > \log a$, on a $F(x) \in A\{a^n\}$.

Il en résulte que si $\alpha(x)$, de période $2\pi (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ est analytique dans une bande $|Im(z)| < b$, $b > a$ et si l'image de cette bande par $\alpha(z)$ est contenue dans la bande $|Im(z)| < \log a$, $\alpha(x)$ est un changement de variable permis dans $A\{a^n\}$.

b. Le facteur $\sqrt{|n|}$ obtenu au corollaire est le meilleur possible, en ce sens que pour tout $\mathcal{E}>0$, $A\left\{|n|^{\frac{1}{2}+\mathcal{E}}\right\}$ opère dans $A\{|n|\}$.

Pour le voir, soit $F\in A\left\{|n|^{\frac{1}{2}+\mathcal{E}}\right\}$ et $f\in A\{|n|\}$: $\frac{d}{dx}F(f)=F'(f)f'$.

$F'(f)$ est lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{2}+\mathcal{E}$ et appartient, d'après le théorème de Bernstein à $\mathfrak{A}$: $f'\in\mathfrak{A}$ et par conséquent $\frac{d}{dx}F(f)\in\mathfrak{A}$ ce qui est équivalent à $F(f)\in A\{|n|\}$.

Ceci donne une limite, en un sens, au lemme de Kahane. Dans le même mémoire [10] il est démontré que si $\alpha(t)$ est analytique, on a aussi inégalité dans le sens inverse, à savoir

$$\|e^{in\alpha}\|=O\sqrt{|n|}$$

Ce résultat reste valable même si l'on remplace la condition « $\alpha(t)$ analytique » par « $\alpha'(t)\in L^2(T)$ » en vertu de l'inégalité de Carleson [3] (communication verbale de Kahane).

c. Si toutes les fonctions de $A\{\Omega_n\}$ sont deux fois continuement dérivables, la condition présente dans l'énoncé de théorème, selon laquelle $\alpha(t)$ l'est, est superflue.

6. Quelques théorèmes de structure pour B a partir de $\mathcal{F}$. — Lemme 6.1. — *S'il existe une fonction* $F\in\mathcal{F}$ *telle que* $F(t)=+\sqrt{t}$ *pour* $0\leq t\leq\delta$, *et si* (F) *est bornée localement à l'origine dans* B, *on a* $B=C(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — Les conditions du lemme impliquent l'existence d'un nombre positif η_1 tel que si $f\in B$ $f(M)\geq 0$ et $\|f\|<\eta_1$, $\sqrt{f}$ existe et $\|\sqrt{f}\|<K$. Comme $\sqrt{\lambda f}=\sqrt{\lambda}\sqrt{f}$ pour $\lambda>0$, il existe une constante $K_1>0$ telle que

$$\|f^2\|\geq K_1\|f\|^2$$

pour toute f positive, et par conséquent

$$\sup|f(M)|\geq K_1\|f\|. \tag{6.1}$$

Pour f réelle $|f|=+\sqrt{f^2}$, les parties positive et négative de f appartiennent donc à B, car

$$f^+=\frac{1}{2}(f+|f|),\qquad f^-=f-f^+$$

f est donc la différence de deux fonctions positives. On a

$$\sup|f(M)|=\sup\{f^+(M),-f^-(M)\},$$
$$\|f\|\leq\|f^+\|+\|f^-\|$$

ce qui joint à (6.1), implique :

$$f\in B_r\Rightarrow\|f\|\leq \text{Cte}\sup|f(M)|. \tag{6.2}$$

L'algèbre B étant supposée auto-adjointe, (6.2) entraîne

$$B_r = C_r(\mathfrak{M}) \qquad \text{et} \qquad B = C(\mathfrak{M}).$$

Remarquons qu'aucun usage n'a été fait de l'élément unité de B, ou, ce qui revient au même, du fait que $\mathfrak{M}$ est compact.

Théorème 6.1. — *Soit* B *régulière et supposons qu'il existe dans* $\mathfrak{F}^*$: $F(t)$, $F(t) = +\sqrt{t}$ *pour* $0 \leq t \leq \delta$ *avec* $\delta > 0$. *On a alors :* $B = C(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — Pour $M_0 \in \mathfrak{M}$ désignons par pM_0 l'idéal primaire fermé minimal contenu dans M_0. pM_0 est l'adhérence de l'ensemble : $\{x \in M_0 ; \hat{x}(M) = 0$ au voisinage de $M_0\}$. Soit T l'ensemble des éléments non négatifs de pM_0. $F(t)$ est une fonction de la première classe de Baire, de T dans M_0 et de ce fait admet des points de continuité. Soit f_0 l'un d'eux. F est bornée dans la boule $\|f - f_0\| < \mathcal{E}$. Soit f_1 dans la boule $\|f - f_0\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ tel que $f_1(M) = 0$ dans un voisinage V de M_0. F est encore bornée dans la boule $\|f - f_1\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ et en particulier dans la boule $\|f\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ de $T \cap k(\mathfrak{M} - V)$.

Il résulte du lemme 6.1 que toute fonction continue sur M, nulle en dehors de V et en M_0, appartient à B. La régularité de B (déjà utilisée implicitement dans la construction de pM_0) implique l'existence d'une fonction $g \in B$ à support dans V, telle que $g(M) = 1$ dans un voisinage de M_0. Si f est continue sur $\mathfrak{M}$ et nulle en dehors de V, $f = f(M_0)g + (f - f(M_0)g)$ donc f appartient à $\hat{B}$. Si f est continue sur $\mathfrak{M}$, fg s'annule en dehors de V et $fg \in B$ ou bien $f \in B$ localement en M_0. M_0 étant quelconque f appartient à B localement en tout point et comme $\mathfrak{M}$ est compact : $f \in B$ (voir Loomis [19] p. 86).

Théorème 6.2. — *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que* $B = C(\mathfrak{M})$.

a. $\mathfrak{F} = C(T)$.

b. $\mathfrak{F}$ *admet une stucture d'algèbre de Banach et contient une fonction* $F(t)$ *telle que* $F(t) = +\sqrt{t}$ *pour* $0 \leq t \leq \delta$ *et* $\delta > 0$.

c. $\mathfrak{F}$ *admet une structure d'algèbre de Banach et n'a pas d'idéaux primaires.*

Démonstration. — Que les conditions sont nécessaires est trivial, démontrons qu'elles sont suffisantes.

a. $\mathfrak{F} = C(T)$ implique $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$. B est régulière et *a* est réduit au théorème 6.1.

b. $\mathfrak{F}$ opère dans elle-même et, étant riche en automorphismes, (F) est bornée sur $\mathfrak{F}$. Du lemme 6.1 il résulte : $\mathfrak{F} = C(T)$ d'où (*cf. a*) $B = C(\mathfrak{M})$.

c. Nous considérons de nouveau que $\mathcal{F}$ opère dans elle-même. Du corollaire du théorème 5.2 il résulte que l'ensemble des opérateurs $[G_\alpha] : F \to F(G_\alpha)$ est borné dans $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ lorque G_α parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{F}_r$. Soit

$$M = \sup_{\|G_\alpha\| \leq 1} \|[G_\alpha]\|.$$

Choisissons $F_1, F_0 \in \mathcal{F}$ telles que :

$$(6.3) \qquad \begin{cases} F_1(t) = t & \text{pour } |t| \leq 1, \\ F_0(t) = 0 & \text{au voisinage de } t = 0, \text{ soit pour } |t| < \mathcal{E}, \\ & \|F_1 - F_0\| \leq \frac{1}{2M}. \end{cases}$$

Ce choix est possible car F_1 peut être suffisamment dérivable pour appartenir à $\mathcal{F}$ (théorème 5.1) et l'existence de F_0 est assurée par la condition selon laquelle il n'y a pas d'idéaux primaires dans $\mathcal{F}$ (la condition D). Si

$$F \in \mathcal{F}_r, \qquad \|F\| = 1,$$

on a nécessairement

$$(6.4) \qquad \sup |F(t)| > \mathcal{E},$$

car si l'on avait $|F(t)| \leq \mathcal{E}$, on aurait

$$(6.5) \qquad 1 = \|F\| = \|F_1(F) - F_0(F)\| = \|[F](F_2 - F_0)\| \leq M \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}$$

ce qui est impossible, et par conséquent :

$$\|F\| \leq \frac{1}{\mathcal{E}} \sup |F(t)|$$

pour tout F réel.

La norme dans $\mathcal{F}$ est donc équivalente à la norme spectrale, $\mathcal{F} = C(T)$ et le théorème est démontré.

Comme application simple des théorèmes précédents donnons un critère portant sur un ensemble situé sur T (ou R) afin qu'il soit un « ensemble de Helson ». Rappelons qu'un ensemble $K \subset T$ est dit de Helson (*cf.* [4]) si toute fonction définie et continue sur K, peut être prolongée sur T en une fonction qui est la somme d'une série de Fourier absolument convergente.

En d'autres termes, K est un ensemble de Helson si l'algèbre $\mathcal{A}(K)$ des restrictions à K des fonctions de $\mathcal{A}(T)$ (voir chapitre II) coïncide avec C(K).

Théorème 6.3. — *S'il existe* $\mathcal{E} > 0$ *tel que*

$$(6.6) \qquad \|e^{inx}\|_K = O(|n|^{1-\mathcal{E}})$$

pour tout élément réel de $\mathcal{A}(K)$, $\|\ \|_K$ *étant la norme de* $\mathcal{A}(K)$, *alors*

$$\mathcal{A}(K) = C(K).$$

Démonstration. — La condition (6.6) entraîne que l'algèbre $A\{|n|^{1-\varepsilon}\}$ opère dans $\mathfrak{A}(K)$. Le théorème résulte de ce que $A\{|n|^{1-\varepsilon}\}$ contient des fonctions du type décrit dans l'énoncé du théorème 6.1.

Dans le cas où $\mathfrak{F} = C(T)$, la structure de B est donc complètement connue. Nous n'obtenons pas une caractérisation aussi complète en supposant seulement : $\mathfrak{F} \supseteq D_n(T)$, mais nous pouvons appliquer un lemme, dû à Naimark ([21] p. 189) pour montrer que les éléments du radical de chaque algèbre quotient de B sont nilpotents d'ordre donné par n.

Le lemme de Naimark peut être énoncé ainsi :

LEMME. — *Soit* X *un élément du radical d'une algèbre normée* R. *Supposons*

$$\|(1-\lambda X)^{-1}\| = O\left(\frac{r^n}{|\sin^p\theta|}\right) \qquad \text{avec} \quad \lambda = re^{i\theta} \tag{6.7}$$

on a alors

$$X^{n+1} = 0.$$

Si dans (6.7) *on remplace* O( ) *par* o ( ) *on obtient*

$$X^n = o.$$

Nous utiliserons la forme suivante de ce lemme : soit X un élément réel d'une algèbre de Banach B tel que (6.7) soit vérifié. Soit σ un homomorphisme continu de B dans R. Si σX appartient au radical de R

$$\sigma X^{n+1} = o$$

($\sigma X^n = o$ si l'on remplace O par o).

Définition. — On dit qu'un élément $f \in B$ est « de synthèse spectrale » si f appartient à chaque idéal I tel que f s'annule sur $h(I)$ (voir définition à la section 1).

THÉORÈME 6.4. — *Si* $\mathfrak{F} \geq D_n(T)$ *et* $f \in B_r$, f^{n+1} *est de synthèse spectrale.*

Démonstration. — On peut évidemment supposer $\|f\| < 1$. Pour tout λ non réel, soit $F_\lambda(t) = (1-\lambda t)^{-1}$ sur $[-1, 1]$; $F_\lambda(t) \in D_n(T)$ telle que la norme de $F_\lambda(t)$ dans $D_n(T)$ soit de l'ordre de sa norme dans $D_n[-1, 1]$. On obtient ainsi :

$$\|F_\lambda\|_{\mathfrak{F}} \leq C\|F_\lambda\|_{D_n} \leq C_1 \frac{r^n}{|\sin^{n+1}\theta|} \qquad \text{où} \quad \lambda = re^{i\theta},$$

ce qui entraîne

$$\|(1-\lambda f)^{-1}\| = \|F_\lambda(f)\| = O\left(\frac{r^n}{|\sin^{n+1}\theta|}\right)$$

et le théorème résulte du lemme de Naimark.

Si $f \in B$, $f = Re(f) + iIm(f)$ et l'on voit que f^{2n+1} est de synthèse spectrale.

Il y a d'autres applications possible du lemme de Naimark au problème de la

synthèse spectrale. Dans le cas où $B = \mathfrak{A}(T)$, plusieurs recherches portent sur les conditions pour qu'une fonction soit de synthèse spectrale (voir par exemple Agmon et Mandelbrojt [1] Pollard [22]). Nous indiquons ici un résultat de ce genre, trouvé d'ailleurs par une méthode tout à fait différente par Kahane et Salem.

THÉORÈME 6.5. — *Soit $f(t) \in \mathfrak{A}(T)$. Supposons que $f(t)$ soit à variation bornée et satisfasse une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$. Dans ces conditions $f(t)$ est de synthèse spectrale.*

Démonstration. — Sans restreindre la généralité nous supposerons que $f(t)$ est réelle. D'après le lemme il suffit de montrer que

$$\| (1-\lambda f)^{-1} \| = o\left(\frac{r}{\sin^2\theta}\right) \qquad \lambda = re^{i\theta}. \tag{6.8}$$

Pour λ non réel, $(1-\lambda f)^{-1}$ et également à variation bornée et lipschitzienne d'ordre α, car :

$$(1-\lambda f(x))^{-1} - (1-\lambda f(y))^{-1} = \frac{\lambda(f(x)-f(y))}{(1-\lambda f(x))(1-\lambda f(y))}$$

d'où

$$\operatorname{Var}[(1-\lambda f)^{-1}] \leq \frac{|\lambda| \operatorname{Var}[f]}{|\sin\theta|^2} \qquad \theta = \arg\lambda.$$

et de même, si $|f(x+h)| - f(x)| < C|h|^\alpha$, on a

$$(1-\lambda f(x+h))^{-1} - (1-\lambda f(x))^{-1} \leq \frac{C|\lambda||h|^\alpha}{|\sin\theta|^2}.$$

Posons $(1-\lambda f(x))^{-1} = \sum a_n^{(\lambda)} e^{inx}$. D'après Zygmund ([27] p. 136) on a :

$$\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} |a_n^{(\lambda)}|^2 \leq C_1 \operatorname{Var}[(1-\lambda f)^{-1}]\, \omega\left[(1-\lambda f)^{-1}; \frac{\pi}{2^\nu}\right] 2^{-\nu}$$

où $\omega[g, h]$ est le module de continuité de $g(x)$. Par conséquent :

$$\sum_{2^{\nu-1} < n \leq 2^\nu} |a_n^{(\lambda)}| \leq C_2 |\lambda| 2^{-\frac{\nu\alpha}{2}} |\sin\theta|^{-2}. \tag{6.9}$$

Or, quand $|\lambda| \to \infty$, θ restant fixe, $a_n^{(\lambda)}$ tend uniformément vers zéro. Ceci et l'inégalité (6.9) entraînent (6.8).

C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE QUELQUES ALGÈBRES PARTICULIÈRES.

Dans ce Chapitre nous cherchons à déterminer les fonctions qui opèrent dans l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$ (*voir* I.1) ainsi que les fonctions qui opèrent dans quelques-

unes de ses algèbres quotients. Du point de vue technique il nous sera commode de parler tantôt de $\mathfrak{A}(T)$ tantôt de $\mathfrak{A}(R)$ — l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions sommables — ce qui est licite d'après le théorème, maintenant classique, de N. Wiener (*voir* [26], p. 80) selon lequel localement, ces deux algèbres sont identiques. Précisons : soit I un intervalle de longueur inférieure à 2π, par exemple $I=(-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, les fonctions à support dans I qui sont les transformées de Fourier des fonctions sommables, sont précisément celles qui, comme fonctions sur $(-\pi, \pi)$, ont une série de Fourier absolument convergente. L'ensemble de ces fonctions est un idéal de deux algèbres $\mathfrak{A}(T)$ et $\mathfrak{A}(R)$ qui induisent sur lui des normes équivalentes. Le passage des propriétés locales aux propriétés globales étant possible, vu la régularité de $\mathfrak{A}(T)$, le théorème de Wiener nous permet de confondre $\mathfrak{A}(T)$ et $\mathfrak{A}(R)$.

Le résultat principal de ce chapitre est la réciproque du théorème de Wiener-Lévy pour l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$ et pour quelques-unes de ses algèbres quotients.

Nous démontrerons d'abord deux lemmes dus à Kahane.

Lemme II.1. — *Étant données* $f_1 \dots f_N \in \mathfrak{A}(T)$ *et* $\varepsilon > 0$ *on peut trouver des entiers* $\lambda_1 \dots \lambda_N$ *tels que*

$$\left\| \prod_{j=1}^{N} f_j(\lambda_j x) \right\| \geq (1-\varepsilon) \prod_{j=1}^{N} \|f_j\|. \tag{II.1}$$

Démonstration. — On voit qu'il suffit de démontrer le lemme pour $N=2$ et de procéder par récurrence.

On pose $\lambda_1 = 1$. Si $f_1(x)$ est un polynome trigonométrique on peut prendre λ_2 supérieur au double du degré de ce polynome et obtenir

$$\|f_1(x) f_2(\lambda_2 x)\| = \|f_1\| \, \|f_2\|.$$

Dans le cas général $f_1 = S_m + R_m$ où S_m est une somme partielle de f_1 d'ordre m et $\|R_m\|$ tend vers zéro. Nous pouvons choisir m tel que

$$\|S_m\| - \|R_m\| > (1-\varepsilon) \|f_1\|$$

et prendre $\lambda_2 > 2m$

$$\begin{aligned} \|f_1(x) f_2(\lambda_2 x)\| &= \|(S_m(x) + R_m(x)) f_2(\lambda_2 x)\| \geq (\|S_m\| - \|R_n\|) \|f_2\| \\ &\geq (1-\varepsilon) \|f_1\| \, \|f_2\|. \end{aligned}$$

Lemme II.2. — *Désignons par* $\mathfrak{A}_r$ *l'ensemble des éléments réels de* $\mathfrak{A}(T)$. *Posons*

$$N(R) = \sup_{\substack{f \in \mathfrak{A}_r \\ \inf f(x) \geq -R}} \|e^{if}\|$$

On a alors

$$N(R) = e^R.$$

Démonstration

$$\left\| e^{i\frac{R}{N}\cos x} \right\| = 1 + \frac{R}{N} + o\left(\frac{R}{N}\right)$$

comme on le voit en développant e^{iz} en série de Taylor. Il résulte du lemme II.1 que l'on peut trouver $\lambda_1 \dots \lambda_N$ tels que

$$\left\| e^{i\frac{R}{N}\sum \cos \lambda_n x} \right\| \geq (1-\varepsilon)\left(1+\frac{R}{N}+o\left(\frac{R}{N}\right)\right)^N \tag{II.2}$$

ce qui entraîne, lorsque N tend vers l'infini : $N(R) \geq e^R$. Comme d'autre part il résulte du développement en série que $N(R) \leq e^R$, le lemme est démontré.

A l'aide de ces lemmes Kahane [10] a démontré le théorème suivant :

Si $F(x)$ est périodique, opère dans $\mathfrak{A}(T)$ et que, quel que soit $f \in \mathfrak{A}_r$ les normes $\|F(f+a)\|$ sont uniformément bornées pour toutes les constantes réelles a, F est analytique.

Nous allons démontrer la variante suivante de ce théorème.

Lemme II.3. — *Si* $F(x)$, *de période* 2π, *opère, et si* (F) *est bornée dans le cylindre* $C = \{f+a ; \|f\| < R, |a| \leq \pi\}$ *dans* $\mathfrak{A}_r$, $F(x)$ *est analytique dans une bande de largeur* $2r$ *autour de l'axe réel.*

Démonstration. — Il existe dans $\mathfrak{A}_r$ une fonction $f(x)$ identique à x pour $|x| < \eta$. Si $F(f(x)+a) \in \mathfrak{A}$ pour tout a réel, $F(x)$ appartient localement à $\mathfrak{A}$ et, puisqu'elle est de période 2π : $F(x) \in \mathfrak{A}$; c'est-à-dire

$$F(x) = \sum a_n e^{inx} \qquad \text{avec} \qquad \sum |a_n| < \infty$$

$$(F)(f(x)) = \sum a_n e^{in\inf(x)} = \sum b_n(f)\, e^{inx}$$

avec

$$\sum |b_n(f)| < \infty \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathfrak{A}_r.$$

$b_n(f)$ est, par la formule de Fourier, une fonction numérique continue sur $\mathfrak{A}_r$. Si l'on pose $S_m(f) = \sum_{-m}^{m} b_n(f)\, e^{inx}$, $S_m(f)$ est une fonction continue de $\mathfrak{A}_r$ dans $\mathfrak{A}$.

Il en résulte que

$$(F)(f) = \lim S_m(f)$$

est une fonction appartenant à la première classe de Baire — comme fonction de $\mathfrak{A}_r$ dans $\mathfrak{A}$ et de même que $(F)(f+a)$ est une fonction de Baire en tant que fonction de $a \in R$ dans $\mathfrak{A}$(*); en particulier $(F)(f+a)$ est mesurable sur l'axe réel.

Si $\|F(f+a)\| \leq K$ uniformément dans C, on a

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(f+a)\, e^{-ina}\, da \right\| < K.$$

(*) Remarque due à Helson.

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(f+a)\,e^{-inx}\,dx = a_n e^{ina} \tag{II.3}$$

et, par conséquent :

$$|a_n|\cdot|e^{ina}|\leq \mathrm{K}$$

pour tout $f\in\mathfrak{A}_r$ de norme inférieure à R. D'après le lemme II.2 on a :

$$|a_n|\leq \mathrm{K}e^{-n\mathrm{R}} \tag{II.4}$$

et le théorème est ainsi démontré.

Lemme II.4. — *Soit* $\mathrm{F}(x)$ *définie dans un intervalle ouvert* I *contenant l'origine. Si* F *opère dans* $\mathfrak{A}$ *et si* (F) *est bornée dans une boule* $\|f\|<\eta_1$, $\mathrm{F}(x)$ *est analytique à l'origine.*

Démonstration. — Pour α suffisamment petit, la fonction $\mathrm{F}_1(x)=\mathrm{F}(\alpha\sin x)$ est 2π périodique opère dans $\mathfrak{A}$ et (F_1) reste bornée dans un cylindre C (*voir* lemme II.3), Il résulte du lemme II.3 que $\mathrm{F}_1(x)$ est analytique dans une bande autour de l'axe réel, et comme $\alpha\sin x$ est analytiquement inversible à l'origine : $\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}_1\left(\arcsin\frac{x}{\alpha}\right)$, $\mathrm{F}(x)$ est analytique au point $x=0$.

Il est clair que dans l'énoncé du lemme II.4 on peut remplacer l'origine par un nombre réel a quelconque. Si $a\in\mathrm{I}$ et si (F) est bornée dans une boule $\|f-a\|<\eta_1$, $\mathrm{F}(x)$ est analytique en a.

Théorème II.1. — *Si* $\mathrm{F}(x)$, *définie dans un intervalle ouvert* I, *opère dans* $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$, $\mathrm{F}(x)$ *est analytique dans* I.

Démonstration. — D'après le lemme II.4 et la remarque qui le suit, il suffit de démontrer que si $a\in\mathrm{I}$, (F) est bornée dans une boule $\|f-a\|<\eta_1$ dans $\mathfrak{A}_r$. En remplaçant $\mathrm{F}(x)$ par $\mathrm{F}(x-a)$ on peut supposer $a=0$ et il s'agit de montrer que (F) est bornée dans une boule $\|f\|<\eta_1$ dans $\mathfrak{A}_r$. Ceci peut se faire de deux manières :

a. $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$ est une algèbre régulière, riche en automomorphismes et l'on peut donc appliquer le théorème 3.1 du premier chapitre.

b. (F) est une fonction de la première classe de Baire (*voir* la démonstration du lemme II.3) et comme telle admet un ensemble partout dense de points de continuité. Pour fixer les idées, supposons que I contient l'intervalle $[-1, 1]$, il existe un point de continuité f_1 tel que $\|f_1-\sin x\|<\frac{1}{4}$; f_1 admet donc un zéro β.

(F) est bornée dans une boule $\|f-f_1\|<\eta_1$. La condition D (*voir* chapitre I : déf. 5.2) est valable, on le sait, dans l'algèbre $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$; on peut donc trouver une

fonction $f_0 \in \mathfrak{A}_r$, $\|f_0 - f_1\| < \frac{\eta_1}{2}$ telle que $f_0(x) = 0$ pour $|x-\beta| < \delta$. (F) est encore bornée dans la boule $\|f - f_0\| \leq \eta_2 < \frac{\eta}{2}$ et en particulier dans l'ensemble des éléments de la forme $f_0 + g$, $\|g\| < \eta_2$, $g(x)$ ayant son support dans $T_1 = (\beta - \delta, \beta + \delta)$.

Or

$$F(g) = F(f_0 + g) - F(f_0) + F(0)$$

qui implique que (F) est bornée dans une boule centrée à l'origine dans l'idéal $k(T - T_1)$.

Soit

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x-\beta| \leq \frac{\delta}{2} \\ 2 - \frac{2}{\delta}|x-\beta| & \text{pour } \frac{\delta}{2} \leq |x-\beta| \leq \delta \\ 0 & \text{pour } \delta \leq |x-\beta| \end{cases}$$

et soit $k(x)$ une fonction de norme 1 à support dans $|x-\beta| < \frac{\delta}{2}$. Pour toute $f \in \mathfrak{A}_r$ on a, d'après le lemme II.1 :

$$\|F(f)\| = \|F(f(nx))\| = \lim_{n \to \infty} \|k(x) F(f(nx))\| \tag{II.5}$$

Or

$$\|k(x) F(f(nx))\| = \|k(x) F(\Delta(x) f(nx))\| \leq \|F(\Delta(x) f(nx))\|$$

qui est uniformément borné si $\|f\| \leq \frac{1}{3}\eta_2$, étant donné que $\Delta(x) f(nx) \in k(T - T_1)$ et que

$$\|\Delta(x) f(nx)\| \leq \|\Delta(x)\| \|f\| \leq 3\|f\|$$

et le théorème est démontré.

Corollaire. — *Si* $F(x)$, *définie dans un intervalle fermé* I, *opère dans* $\mathfrak{A}(T)$, $F(x)$ *est analytique dans* I.

Démonstration. — Il faut démontrer que $F(x)$ est analytique aux extrémités de I; pour cela nous pouvons supposer $I = [0, 1]$ et il suffit de montrer que $F(x)$ est analytique à l'origine.

$F(x^2)$ est définie dans $[-1, 1]$ et opère dans $\mathfrak{A}(T)$, donc, par suite du théorème que nous venons de démontrer, est analytique à l'origine. Au voisinage de zéro

$$F(x^2) = \sum a_n x^{2n}$$

puisque $F(x^2)$ est une fonction paire; il en résulte que

$$F(x) = \sum a_n x^n.$$

Remarque. — Le théorème II.1 reste valable lorsque l'on remplace dans son énoncé $\mathfrak{A}(T)$ par $\mathfrak{A}(G)$, G étant n'importe quel groupe abélien, localement compact non discret. $\mathfrak{A}(G)$ signifie dans ce cas l'algèbre des transformées de Fourier de $L^1(\Gamma)$, Γ étant le groupe dual de G. Lorsque G est discret, une condition nécessaire et suffisante pour que $F(x)$ opère dans $\mathfrak{A}(G)$ est que $F(0)=0$ et que $F(x)$ soit analytique à l'origine.

Un résultat plus frappant résulte de l'étude des fonctions qui opèrent dans les algèbres $B(G)$ des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures portées par Γ. Pour G non compact, seules les fonctions *entières* opèrent dans $B(G)$; si G est compact, Γ est discret, $B(G)=\mathfrak{A}(G)$ et les fonctions qui opèrent sont caractérisées par le théorème II.1. Les résultats cités ont été obtenus dans le cas où $G=Z(\Gamma=T)$ par Helson-Kahane [5] et Kahane-Rudin [14]; pour l'exposé du cas général nous renvoyons à Helson-Kahane-Katznelson-Rudin [6].

Soit $F(z)$ une fonction analytique dans un domaine D du plan complexe. Si B est une algèbre de Banach avec unité, $F(z)$ opère dans B et définit une fonction (F), à valeurs dans B, sur une partie B(D) de B, de tous les éléments ayant leur spectre dans D.

La fonction (F) est, on le sait, analytique dans B(D). Si $f_0 \in B(D)$ et si l'on pose $d(F, f_0)$ égale à la distance entre le spectre de f_0 et l'ensemble des points singuliers de $F(z)$, on a pour tout $g \in B$, dont la norme spectrale $\|g\|_s$ est inférieure à $d(F, f_0)$:

$$F(f_0+g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{n}(f_0)}{n!}g^n. \tag{II.6}$$

La convergence de cette série résulte de ce que

$$F^{(n)}(f_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{F(\xi+f_0)}{\xi^{n+1}} \qquad \text{si} \quad r<d(F, f_0) \tag{II.7}$$

qui implique, si l'on pose $M(r)=\sup_{|\xi|\leq r} F(f_0+\xi)$,

$$\|F^{(n)}(f_0)\|\leq n!\, r^{-n}M(r).$$

D'autre part si $\|g\|_s<r$, il résulte d'un théorème classique de Gelfand, que $\|g^n\|<r^n$ pour $n>N_0$ et la série (II.6) converge absolument.

On voit en particulier que (F) reste bornée dans toute boule

$$\|f-f_0\|\leq d<d(F, f_0).$$

Montrons que dans le cas $B=\mathfrak{A}(t)$ $d(F, f_0)$ est vraiment la borne supérieure des d tels que (F) reste bornée dans $\|f-f_0\|\leq d$.

Lemme II.5. — *Soit* $P(z)=\sum_{n=0}^{M} a_n z^n$. *Pour tout* $R>0$ *on a*

$$N(R)=\sup_{\substack{\|f\|_s\leq R\\ f\in\mathfrak{A}_r}}\|P(f)\|=\sum_{n=0}^{M}|a_n|R^n. \tag{II.8}$$

Démonstration. — Ce lemme est une généralisation du lemme II.2. Nous avons vu qu'en considérant des suites $\{\lambda_n\}$ suffisamment clairsemées on peut construire des éléments

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{R}{N} \cos \lambda_n x$$

tels que

$$\lim_{N \to \infty} \| e^{i f_N} \| = e^R$$

De la démonstration du lemme II.2 on voit que si $|\theta| = 1$ on a aussi

$$\lim_{N \to \infty} \| e^{\theta f_N} \| = e^R \tag{II.∂}$$

(II.9) implique que, pour n et m fixés, les supports de f_N^n et de f_N^m sont « presque » disjoints pour N suffisamment grand. C'est-à-dire, pour tout $\mathcal{E} > 0$ on peut trouver $N_0 = N_0(\mathcal{E})$ tel que si $N > N_0$ il existe deux éléments $g_N^{(n)}$ et $g_N^{(m)}$ ayant leurs supports (en tant que mesures sur Z) disjoints, et tels que

$$\| g_N^{(n)} - f_N^n \| < \mathcal{E}, \| g_N^{(m)} - f_N^m \| < \mathcal{E}.$$

En effet, soit

$$\theta = e^{\left(\frac{i\pi}{n-m}\right)}$$

on a

$$e^{\theta f_N} = \sum \frac{\theta^n f_N^n}{n!}$$

et comme $\left\| \sum \frac{\theta^n f_N^n}{n!} \right\|$ tend vers $e^R = \sum \frac{R^n}{n!} = \sum \frac{\| f_N \|^n}{n!}$ lorsque N tend vers l'infini, pour m et n donnés et N suffisamment grand, on a

$$\left\| \frac{\theta^m f_N^m}{m!} + \frac{\theta^n f_N^n}{n!} \right\| > \frac{\| f_N \|^m}{m!} + \frac{\| f_N \|^n}{n!} - \mathcal{E}.$$

Or

$$\left\| \frac{\theta^n f_N^m}{m!} + \frac{\theta^n f_N^n}{n!} \right\| = \left\| \frac{f_N^m}{m!} - \frac{f_N^n}{n!} \right\|$$

d'après le choix de θ.

Si

$$\frac{1}{m!} f_N^m = \sum \alpha_j^{(m,N)} e^{ijx}, \quad \frac{1}{n!} f_N^n = \sum \alpha_j^{(n,N)} e^{ijx}$$

il suffit de prendre

$$g_N^{(m)} = m! \sum k_j^{(m,n,N)} \alpha_j^{(m,N)} e^{ijx}$$

$$g_N^{(n)} = n! \sum (1 - k_j^{(m,n,N)}) \alpha_j^{(n,N)} e^{ijx},$$

où

$$k_j^{(m,n,N)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_j^{(m,N)} \leq \alpha_j^{(n,N)} \\ 1 & \text{si } \alpha_j^{(m,N)} > \alpha_j^{(n,N)} \end{cases}$$

comme on le voit facilement en tenant compte de ce que f_N est définie positive.

Cette construction se généralise par récurrence et l'on obtient le résultat suivant : pour tout $M > 0$, $\mathcal{E} > 0$ on peut trouver N suffisamment grand pour qu'il existe des éléments $g_N^{(n)}$ $(n = 1, 2 \ldots M)$ ayant des supports deux à deux disjoints (en tant que mesures sur Z) et tels que

$$\| g_N^{(n)} - f_N^n \| < \mathcal{E} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq n \leq M.$$

Ceci implique évidemment le lemme car :

$$\text{(II.10)} \qquad \| P(f_N) \| = \left\| \sum a_n f_N^n \right\| = \left\| \sum a_n (g_N^{(n)} + f_N^n - g_N^{(n)}) \right\|$$
$$\geq \sum |a_n| \, \| g_N^{(n)} \| - \varepsilon \sum |a_n| = \sum |a_n| \, R^n + O(\mathcal{E})$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Soit* $P(z) = \sum' a_n z^n$ *et* R_0 *le rayon de convergence de cette série. Pour tout* $0 < R < R_0$ *on a* ;

$$N(R) = \sup_{\substack{\| f \| \leq R \\ f \in \mathfrak{A}_r}} \| P(f) \| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, R^n.$$

De ce corollaire il résulte que si le rayon de convergence de la série de Taylor de $F(z)$ est égal à R et si cette série ne converge pas absolument sur le cercle $|z| = R_1$, l'opération (F) n'est pas bornée dans la boule $\| f \| \leq R_1$ de $\mathfrak{A}_r$. Or si la série de Taylor converge absolument sur le cercle de convergence, le lemme précédent ne s'applique pas pour la détermination des rapports entre les domaines de régularité de $F(z)$ et les ensembles sur lesquels (F) est bornée; il faut alors reprendre le raisonnement du lemme II.4.

Nous supposons donc que $F(x)$ opère dans $\mathfrak{A}(T)$ et que (F) reste bornée dans la boule $\| f \| < R$ de $\mathfrak{A}_r$, et nous cherchons le domaine d'analyticité de $F(z)$ dans le plan complexe, ou, plus précisément, le rayon du cercle de convergence de la série de Taylor de F.

Nous pouvons supposer R grand, quitte à remplacer $F(x)$ par $F(\alpha x)$, α petit. Nous savons, d'après le théorème II.1 que $F(x)$ est analytique à l'origine. Soit $F(x) = \sum a_n x^n$ sa série de Taylor; désignons par R_1 le rayon de convergence de cette série.

Lemme II.6.

$$R_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} R.$$

Démonstration. — Posons $F_1(x) = F(\sin x)$. Si (F) est bornée sur la boule $\| f \| < R$ et si $\| g \| < r = \log(\sqrt{2} R + o(1))$: $\| \sin(g + t) \| \leq R$ uniformément pour $t \in T$ et par conséquent $F_1(x)$ reste bornée dans le cylindre dans B : $\{ f + t ; \| f \| < r, t \in T \}$.

D'après le lemme II.3, $F_1(x)$ est analytique dans la bande $|\gamma| < r$. L'image de cette bande par $\sin z$ couvre le cercle

$$|Z| < \frac{\sqrt{2}}{2} R + o(1)_{R \to \infty}$$

d'où le lemme.

L'existence d'une constante K positive telle que

$$R_1 \geq KR$$

pour toute fonction qui opère, n'est pas un phénomène propre à l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$, mais une propriété commune de toutes les algèbres B dans lesquelles toute fonction qui opère est nécessairement analytique.

THÉORÈME II.2. — *Soit* B *une algèbre dans laquelle seules opèrent les fonctions analytiques. Il existe une constante positive* K *telle que : si* $F(x)$ *opère dans* B *et si* (F) *est bornée dans la boule* $\|f\| < R$ *dans* B_r, F *est analytique dans le cercle* $|z| < KR$.

Démonstration. — Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Pour tout $N > 0$ il existe alors une fonction $F_N(x)$, définie pour $-\alpha_N \leq x \leq \alpha_N$ qui opère dans B et telle que (F_N) reste bornée dans la boule $\|f\| < N\beta_N$, qui a un point singulier à une distance inférieure à β_N de l'origine. Quitte à faire le changement de variable $F_N^*(x) = F_N(\alpha_N \sin \gamma_N x)$, on peut supposer que les fonctions $F_N(x)$ sont définies pour tout x, que si $N > M$ (F_N) est bornée dans la boule $\|f\| < M$ de B_r, et que $F_N(x)$ admet un point singulier de module inférieur à $\frac{1}{N}$. Pour une suite $\{A_N\}$ décroissant rapidement, la fonction

$$F_0(x) = \sum A_N F_N(x)$$

est une fonction non analytique qui opère dans B, ce qui fournit la contradiction cherchée.

Il résulte en particulier que si seules les fonctions analytiques opèrent dans B, seules les fonctions entières restent bornées sur les parties bornées de B_r.

Dans le cas de $\mathfrak{A}(T)$ la constante K est probablement égale à 1. Nous l'avons montré pour des fonctions dont la série de Taylor ne converge pas absolument sur le cercle de convergence et le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ que nous avons trouvé dans le cas général (lemme II.6) est sans doute dû à un défaut technique.

Nous y considérons en effet, non pas toutes les fonctions réelles de norme $\leq R$, mais seulement l'ensemble des fonctions de type $\sin f$ avec

$$\|f\| < \log(\sqrt{2} R + o(1)).$$

Or, si pour une fonction $F_1(x)$; $R_1 > \frac{1}{\sqrt{2}} R$, la série de Taylor de $F_1(x)$ converge absolument et uniformément sur cet ensemble. Le changement de variable, effectué dans la démontration du lemme II.6 nous fait donc nécessairement perdre le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La difficulté disparaît trivialement si l'on suppose que (F) est bornée sur l'ensemble des éléments de norme inférieure à R, ayant leur spectre non pas sur l'axe réel, mais dans un voisinage de l'origine du plan complexe.

Lemme II.7. — *Soit* $\mathcal{E} > 0$. *Désignons par* $\mathfrak{U}(\mathcal{E}, R)$ *l'ensemble des éléments de* $\mathfrak{A}(T)$ *dont la norme spectrale est inférieure ou égale à* $\mathcal{E}$, *et la norme dans* $\mathfrak{A}(T)$ *est inférieure à* R. *Si* (F) *est bornée sur* $\mathfrak{U}(\mathcal{E}, R)$, $F(z)$ *est analytique pour* $|z| < R$.

Démonstration. — En remplaçant $F(x)$ par $F(\mathcal{E}x)$, R se transforme en $\mathcal{E}^{-1}R$ et le lemme pour $F(\mathcal{E}x)$ est équivalent à l'énoncé du lemme pour $F(x)$. On peut donc supposer $\mathcal{E} = 1$.

Si

$$F(x) = \sum a_n x^n$$

$$F(e^{if}) = \sum a_n e^{inf}$$

$$F(e^{i(f+t)}) = \sum a_n e^{inf} e^{int}$$

qui reste uniformément borné en norme si f est réel de norme inférieure à $\log R$. Comme dans la démonstration du lemme II.3 on obtient $|a_n| < e^{-n \log R} = R^{-n}$ ce qui entraîne que le rayon de convergence de la série de Taylor est au moins égal à R.

Théorème II.3. — *Soit* $f_0 \in \mathfrak{A}(T)$. *Supposons que* $F(z)$ *soit définie dans un ouvert* Ω *contenant le spectre de* f_0, *et qu'elle opère dans* $\mathfrak{A}(T)$ *tout en restant bornée pour* $\|f - f_0\| < R$. *Si* F *est analytique complexe, elle n'a pas de singularités à une distance inférieure à* R *du spectre de* f_0. (*Lorsque* f_0 *est réelle, il suffit que* $F(x)$ *soit définie dans un intervalle contenant le spectre pour qu'elle puisse être prolongée en une fonction analytique complexe*).

Démonstration. — Soit ξ_0 un point du spectre de f_0, montrons que $F(z)$ est analytique dans un cercle de rayon au moins égal à R autour de ξ_0. Sans restreindre pour autant la généralité on peut supposer

$$\xi_0 = 0, \quad f_0(0) = 0.$$

Soit f_1 tel que $f_1(x) = 0$ pour $|x| < \eta$ et $\|f_1 - f_0\| < \mathcal{E}$. (F) est encore bornée dans la boule $\|f - f_1\| < R - \mathcal{E}$ et en particulier dans la boule

$\|g\| < \mathrm{R} - \mathcal{E}$ de l'idéal $k(\mathrm{T} - (-\eta_1, \eta_1))$ — les éléments de $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$ à support dans $(-\eta_1, \eta_1)$. On sous-entend évidemment que lorsque l'on parle d'une boule c'est en réalité de l'ensemble des éléments de cette boule ayant leur spectre dans Ω qu'il s'agit.

Désignons par $\Delta_\gamma(x)$ la fonction égale à 1 pour $|x| < \gamma$ égale à zéro pour $|x| > \eta_1$ et linéaire pour $\gamma \leq |x| \leq \eta_1$. Δ_γ est la différence entre deux fonctions « triangle » dont l'une a sa norme égale à $\frac{\eta_1}{\eta_1 - \gamma}$ et l'autre à $\frac{\gamma}{\eta_1 - \gamma}$; par conséquent

$$1 \leq \|\Delta_\gamma\| \leq \frac{\eta_1 + \gamma}{\eta_1 - \gamma}.$$

Si $f(x) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T})$ à spectre dans Ω et si $\delta(x)$ est une fonction de norme 1 à support dans $(-\gamma, \gamma)$, on a (lemme II.1) :

$$\begin{aligned} \text{(II.11)} \qquad \|\mathrm{F}(f)\| = \|\mathrm{F}(f(nx))\| &\leq \lim_{n=\infty} \|\delta(x)\,\mathrm{F}(f(nx))\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\delta(x)\,\mathrm{F}(\Delta_\gamma(x) f(nx))\| \\ &\leq \lim \|\mathrm{F}(\Delta_\gamma(x) f(nx))\| \end{aligned}$$

qui est uniformément borné si

$$\|f\| \leq (\mathrm{R} - \mathcal{E}) \frac{\eta_1 - \gamma}{\eta_1 + \gamma}.$$

Or, $\mathcal{E}$ peut être choisi arbitrairement petit, η_1 est déterminé par $\mathcal{E}$ et l'on peut choisir γ aussi petit que l'on veut par rapport à η_1, ce qui entraîne que (F) est bornée dans toute boule de rayon inférieur à R, centrée à l'origine de $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$ et le théorème résulte du lemme II.7.

2. Nous passons à l'étude des fonctions qui opèrent dans quelques algèbres quotients de $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$. Les algèbres quotients, semi-simples de $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$ s'obtiennent comme algèbres de restriction des éléments de $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$ à des sous ensembles fermés de T. Soient, en effet, I un idéal dans $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$, $h(\mathrm{I})$ l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent I (l'ensemble des zéros communs à tous les éléments de I). L'espace des idéaux maximaux de $\frac{\mathfrak{A}(\mathrm{T})}{\mathrm{I}}$ est précisément $h(\mathrm{I})$, qui est un sous ensemble fermé dans T, et pour que $\frac{\mathfrak{A}(\mathrm{T})}{\mathrm{I}}$ soit semi-simple il faut et il suffit que $\mathrm{I} = kh(\mathrm{I})$ [l'intersection des idéaux de $h(\mathrm{I})$. *Voir* I.1]. Nous donnons ici une condition sur $h(\mathrm{I})$, suffisante pour que seules les fonctions analytiques opèrent dans $\frac{\mathfrak{A}(\mathrm{T})}{\mathrm{I}}$. Une telle condition sera dite « condition d'analyticité » et les ensembles $\mathrm{K} \subset \mathrm{T}$ tels que dans $\frac{\mathfrak{A}(\mathrm{T})}{k(\mathrm{K})}$ seules les fonctions analytiques opèrent seront dits « ensembles d'analyticité ».

Il est clair que chaque sur-ensemble d'un ensemble d'analyticité est un ensemble d'analyticité, de même que chaque translaté et chaque image homo-

thétique. Il est également clair que si K contient un intervalle; K est un ensemble d'analyticité. Nous faisons usage de la remarque du début du chapitre concernant l'équivalence de $\frac{\mathfrak{A}(R)}{k(K)}$ et de $\frac{\mathfrak{A}(T)}{k(K)}$ si $K \subseteq (-\pi+\mathcal{E}, \pi-\mathcal{E})$.

Pour simplifier nous supposons que tous les ensembles dont il s'agit sont des sous-ensembles de $[-1, 1]$ sur l'axe réel. L'algèbre « de base » $\mathfrak{A}$ sera la sous algèbre de $\mathfrak{A}(R)$ (et de $\mathfrak{A}(T)$) des fonctions à support dans $[-1, 1]$. Pour $f \in \mathfrak{A}$ $f(nx)$ aura le sens qu'elle a dans $\mathfrak{A}(R)$, c'est-à-dire sans les répétitions modulo $\frac{2\pi}{n}$. Ainsi le support de $f(nx)$ est contenu dans $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Ceci nous permet de parler également de $f(\lambda x)$, $\lambda > 1$ non nécessairement entier. Les normes induites sur $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{A}(T)$ et par $\mathfrak{A}(R)$ sont équivalentes et nous pouvons les confondre, néanmoins du point de vue technique la norme de $\mathfrak{A}(R)$ est plus commode étant donné qu'elle vérifie :

$$\| f(nx) \| = \| f \|.$$

Soit K fermé dans $[-1, 1]$: nous désignons par f_K la restriction d'une fonction $f \in \mathfrak{A}$ à K, et par $\| f \|_K = \| f_K \|$. Sa norme dans $\mathfrak{A}(K) = \frac{\mathfrak{A}}{k(K)}$.

Théorème II.4. — *Si* K *est (fermé) de mesure positive* K *est un ensemble d'analyticité.*

Démonstration. — Soit $F(x)$ une fonction qui opère dans $\mathfrak{A}(K) = \frac{\mathfrak{A}}{k(K)}$, $F(0) = 0$, montrons qu'elle opère aussi dans $\mathfrak{A}$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que (F) est bornée dans une boule $\| f \| < \eta$ dans $\mathfrak{A}(K)$, car sinon, il existe dans K au plus un nombre fini de points non ordinaires par rapport à F (*Voir* I. lemme 3.2). Il existe dans K un sous ensemble fermé K_1, de mesure positive dont tous les points sont ordinaires par rapport à F et on peut reprendre la suite de la démonstration pour $\mathfrak{A}(K_1)$.

On peut supposer également que $x = 0$ est un point de densité de K.

Soit $f \in \mathfrak{A}$, à spectre réel avec $\| f \| < \eta$

$$\| f(nx) \|_K \leq \| f(nx) \| < \eta$$

donc

$$\| F(f_K(nx)) \| < B.$$

Il existe donc une suite $\{g_n\}$ dans $\mathfrak{A}$, telle que

$$g_n(x) = F(f(nx)) \text{ sur } K$$

avec

$$\| g_n \| < B + \frac{1}{n}$$

or

$$g_n\left(\frac{x}{n}\right) \in \mathfrak{A}(R), \qquad \left\| g_n\left(\frac{x}{n}\right) \right\| \leq B + \frac{1}{n}$$

et l'on a

$$g_n\left(\frac{x}{n}\right) = \mathrm{F}(f(x)) \text{ sur } n\mathrm{K}.$$

Choisissons une suite $\{n_j\}$ telle que

$$\text{mes } n_j \mathrm{K} \cap [-2, 2] > 4 - \frac{1}{j!} \tag{II.12}$$

et de la suite $\left\{\hat{o}(x)\, g_{n_j}\left(\frac{x}{n_j}\right)\right\}$ extrayons une sous suite qui converge faiblement vers un élément $\mathrm{G} \in \mathfrak{A}$, $\hat{o}(x)$ étant la fonction égale à 1 pour $|x| \leq 1$, à zéro pour $|x| \geq 2$ et linéaire pour $1 \leq |x| \leq 2$.

On a $\|\mathrm{G}\| \leq \mathrm{B}\|\hat{o}\| < 3\mathrm{B}$. Le support de $\mathrm{G}(x)$ est visiblement contenu dans $[-2, 2]$; il résulte de (II.12) que $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(f(x)) \in \mathfrak{A}$ et le théorème est démontré.

Le théorème II.4 est un cas particulier du théorème suivant qui donne une condition de nature arithmétique suffisante pour que K soit un ensemble d'analyticité.

Théorème II.5. — *Si, quel que soit* N, K *contient une progression arithmétique de* N *termes,* K *est un ensemble d'analyticité.*

Ce théorème a déjà été énoncé dans [13] et deux démonstrations ont été signalées.

La première, analogue en un sens à celle du théorème II.4 a été donnée d'une manière assez détaillée. Cette démonstration consiste à mettre en évidence que si $\mathrm{F}(x)$ opère dans $\mathfrak{A}(\mathrm{K})$ elle opère aussi dans $\mathfrak{A}(\mathrm{Z})$ (l'algèbre des coefficients de Fourier des fonctions sommables sur T). On sait ([5]) que seules les fonctions analytiques opèrent dans $\mathfrak{A}(\mathrm{Z})$. La seconde méthode est seulement esquissée dans [13] et nous donnons plus de détails ici; elle est analogue à la démonstration du théorème II.1.

Lemme II.8. — *Désignons par* P_n *la suite* $\left\{\frac{\pi k}{n}\right\}_k^n$ *et par* $\|f\|_n$ *la norme de la restriction d'une fonction* $f \in \mathfrak{A}(\mathrm{T})$ *à* P_n, *alors pour toute* $f \in \mathfrak{A}(\mathrm{T})$

$$\|f\|_n \to \|f\|$$

Démonstration. — Soit φ une fonctionnelle linéaire sur $\mathfrak{A}(\mathrm{T})$:

$$\varphi \sim \sum c_m e^{-imx}$$

avec

$$\sup |c_m| = \|\varphi\| < \infty.$$

Soit

$$\Delta_{\mathrm{N}} = \sum \hat{o}_n^{(\mathrm{N})} e^{imx} = \begin{cases} \mathrm{N}\left(1 - \dfrac{\mathrm{N}|x|}{2\pi}\right) & \text{si} \quad |x| < \dfrac{2\pi}{\mathrm{N}} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Soit

$$\varphi_N = \varphi \star \Delta_N = \sum c_m \delta_m^{(N)} e^{-imx}.$$

Posons

$$E_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) f\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \tag{II.13}$$

$f(x) = \sum \gamma_n e^{inx}$ étant un élément générique de $\mathfrak{A}(T)$. $E_N(f)$ est une fonctionnelle linéaire sur $\mathfrak{A}(T)$, et l'on a :

$$\text{(II.14)} \quad \begin{cases} E_N(f) = \frac{1}{N} \sum_k \sum_m \sum_n \gamma_n c_m \delta_m^{(N)} e^{i(n-m)\frac{2k\pi}{N}} = \sum \gamma_n C_n^{(N)} \\ \text{avec} \\ C_n^{(N)} = \sum_j c_{n+jN} \delta_{n+jN}^{(N)} \end{cases}$$

comme on le voit en sommant d'abord par rapport à k. Or, d'après la formule de Poisson

$$\sum \delta_{n+jN}^{N} = 1 \tag{II.15}$$

et comme $\Delta_N(x)$ est de type positive, $\delta_{n+jN} \geq 0$ pour tout N, n, j et l'on obtient

$$C_n^{(N)} \leq \sup_m |c_n| = \|\varphi\|,$$

soit

$$\|E_N\| \leq \|\varphi\|.$$

D'autre part $\delta_n^{(N)}$ tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini ce qui implique

$$\lim_{N \to \infty} C_n^{(N)} = c_n,$$

ou bien

$$E_N(f) \to \langle \varphi, f \rangle$$

pour tout $f \in \mathfrak{A}(T)$.

Pour un $f \in \mathfrak{A}(T)$ donné, prenons φ de norme 1 tel que $\langle \varphi, f \rangle = \|f\|$.

Si $f_N(x) = f(x)$ sur P_N, $E_N(f_N) = E_N(f)$ étant donné que le support de E_N est justement P_N (II.13), par conséquent

$$\|f_N\| \geq |E_N(f_N)| = |E_N(f)| \to \|f\|. \tag{II.16}$$

et le lemme en résulte.

Le lemme II.8 s'inspire de la méthode utilisée par Herz [7] pour démontrer que l'ensemble triadique de Cantor est un ensemble de synthèse spectrale. Nous l'avons démontré dans l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$ pour la simplicité des formules (II.14) (II.15), mais il est clair que l'analogue de ce lemme est valable pour $\mathfrak{A}$. Comme corollaire du lemme II.8 nous obtenons l'analogue du lemme II.2 pour les algèbres $\mathfrak{A}(K)$, K satisfaisant à la condition du théorème II.5.

LEMME II.9. — *Si, quelque soit* N, K *contient une progression arithmétique de* N *termes, et si l'on pose*

$$M(R) = \sup_{\substack{f \in \mathfrak{A} \\ \|f\|_K \leq R}} \|e^{if}\|_K$$

on a :

$$M(R) = e^R \tag{II.17}$$

Démonstration. — Il est clair que (II.17) est valable pour l'algèbre $\mathfrak{A}$; soit donc $f \in \mathfrak{A}_r$ de norme R telle que

$$\|e^{if}\|_r > (1 - \varepsilon)\, e^R \tag{II.18}$$

D'après le lemme II.8, il existe un N tel que

$$\|e^{if}\|_N \geq (1 - \varepsilon)\, \|e^{if}\|$$

($\|e^{if}\|_N$ étant ici la norme de la restriction de e^{if} à la progression arithmétique de N termes dont le premier est égal à -1 et le dernier à $+1$).

D'après l'hypothèse du lemme il existe dans K une progression arithmétique de N termes, soit

$$P'_N = P_{N, a_N, h} = \{a_N + jh\}_{j=1}^{N}$$

avec

$$a_N > -1, \qquad h > 0, \qquad a_N + Nh < 1,$$

La fonction $f_1(x) = f\left(\frac{2}{Nh}x - 1 - \frac{2a_N}{Nh}\right)$ a les propriétés suivantes :

$$\|f_1\| = R, \qquad \|e^{if_1}\|_K \geq \|e^{if_1}\|_{P'_N} = \|e^{if}\|_N$$

et par conséquent

$$\|e^{if_1}\|_K \geq (1 - \varepsilon)^2\, e^R$$

et le lemme est démontré.

Nous sommes maintenant en état de donner la démonstration du théorème II.5. Quitte à prendre un sous-ensemble de K nous pouvons supposer que K est constitué d'une suite d'ensembles de type $P'_j = P_{N_j, a_{N_j}, h_j}$ dont les intervalles supports sont disjoints et tels que $\{a_{N_j}\}$ tend d'une manière monotone (p. ex. décroissante) vers un certain $a_0 \in [-1, 1]$. Nous pouvons supposer encore que :

$$a_{N_j} - a_0 > 2(a_{N+1} + N_{j+1} h_{j+1} - a_0) \tag{II.20}$$

(si $\{a_{N_j}\}$ décroit).

Nous définissons maintenant les opérations (F_j) de la façon suivante :

$$(F_j)(f(x)) = \begin{cases} F(f(x)) \text{ pour } x \in P'_k \text{ avec } k \leq j \\ F(f(a_0)) \text{ pour } x \in P'_k \text{ avec } k > j. \end{cases} \tag{II.21}$$

Il est clair que les (F_j) sont des opérations continues sur $\mathfrak{A}(K)$. D'après le

théorème de Kaplansky et (II.20) on a

$$(F) = \lim_{j=\infty} (F_j)$$

c'est-à-dire (F) est une fonction de la première classe de Baire sur $\mathfrak{A}(K)$.

Si l'on pose $F_1(x) = F(\alpha \sin x)$, $F_1(f+t)$ est une fonction mesurable de t et on peut avoir les évaluations (II.3) et (II.4) pourvu que l'on sache que (F) est bornée dans une boule $\|f\|_K < \eta$ dans $\mathfrak{A}_r(K)$.

Il ne nous reste qu'à montrer que (F) est en effet bornée dans une telle boule. Pour cela, il suffit de mettre en évidence l'existence d'une telle boule dans laquelle les F_j sont uniformément bornées, ou encore que (F) est bornée sur l'ensemble des éléments à spectre fini de cette boule. Supposons le contraire; pour chaque n il existe alors un élément $f \in \mathfrak{A}_r(K)$ à spectre fini, tel que

$$\text{(II.22)} \qquad \|f_n\|_K < 2^{-n}, \qquad \|F(f_n)\|_K > 2^n$$

En changeant, si nécessaire, la variable, nous pouvons supposer que les supports dans K des f_n sont disjoints. Posons

$$f = \sum f_n, \qquad E(f) = \sum F(f_n)$$

(nous pouvons évidemment supposer que $F(0) = 0$). Or, $F(f)$ ne peut pas appartenir à $\mathfrak{A}(K)$ étant donné (II.2) et le théorème est démontré.

Remarque. — Insistons sur le caractère arithmétique des conditions d'analyticité. Des ensembles très voisins du point de vue métrique peuvent donner naissance à des algèbres de restriction très différentes. Ainsi par exemple la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ satisfait la condition du théorème II.5 et est par conséquent un ensemble d'analyticité. Pour toute suite $\{\mathcal{E}_n\}$ décroissant vers zéro aussi vite que l'on veut, on peut trouver une suite $\{\lambda_n\}$ dont les éléments sont linéairement indépendants (ce qui entraîne évidemment que $\{\lambda_n\}$ est un ensemble de Helson) et telle que $\left|\lambda_n - \frac{1}{n}\right| < \mathcal{E}_n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon et Mandelbrojt, *Une généralisation du théorème Tauberien* (*Acta Sci. Math. Szeged*, vol. 12, 1950, B. 167-176).

[2] A. Beurling and H. Helson *Fourier Stieltjes transforms with bounded powers.* (*Math. Scand.*, t. 1, 1953, p. 120-126).

[3] Carleson, *Une inégalité* (*Arkiv Mat.*, t. 25 B, n° 1, 1935, p. 1-5).

[4] H. Helson, *Fourier transforms on perfect sets.* (*Studia Math.*, t. 14, 1954, p. 209-213).

[5] H. Helson et J.-P. Kahane, *Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 247, 1958, p. 626-628).

[6] H. Helson, J.-P. Kahane, Y. Katznelson and W. Rudin, *The functions with operate on Fourier Transforms* (Sous presse).

[7] C. Herz, *Spectral synthesis for the cantor set* (*Proc. Nat. Acad. Sci*, t. 42, 1956, p. 42-43).

[8] I. Gelfand, *Normierte Ringe* (*Math. Sbornik*, vol. 9, 1941, p. 3-24).

[9] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 240, 1955, p. 36-37).

[10] J.-P. Kahane, *Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes* (*Jour. de Math. Pures et Appliquées*, vol. 35, 1956, p. 249-259).

[11] J.-P. Kahane, *Sur un problème de Littlewwood* (*Indag. Math.*, 19, 1957, p. 268-271).

[12] J.-P. Kahane. *Sur un théorème de Wiener-Lévy* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 246, 1958, p. 1949-1951).

[13] J.-P. Kahane et Y. Katznelson, *Sur la réciproque du théorème de Wiener-Lévy* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 248, 1959, p. 1279-1281).

[14] J.-P. Kahane, W. Rudin, *Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 247, 1958, p. 773-775).

[15] Y. Katznelson, *Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 247, 1958, p. 404-406).

[16] Y. Katznelson, *Algèbres caractérisées par les fonctions qui opèrent sur elles* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 247, 1958, p. 903-905).

[17] Leibenson, *Sur l'algèbre des fonctions dont la série de Fourier converge absolument* (*en russe*) (*Ouspiekhi mat. Nauk*, t. 9. 1954, p. 157-162).

[18] P. Levy, *Sur la convergence absolue des séries de Fourier* (*Compositio Math.*, vol. 1, 1934, p. 1-14).

[19] L. H. Loomis, *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*, New-York 1953.

[20] Marcinkiewicz, *Sur la convergence absolue des séries de Fourier* (*Jour. Math. Cluj.*, 16, 1940, p. 66-73).

[21] Natmark, *Normirovanie Koltza*, Moscou, 1956.

[22] H. Pollard, *The harmonic analysis of bounded functions* (*Duke Math. Journal*, vol. 20, 1953, p. 499-512).

[23] W. Rudin, *Non-analytic functions of absolutely convergent Fourier Seires* (*Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 41, 1955, p. 238-240).

[24] W. Rudin, *Transformaiion des coefficients de Fourier* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 243, 1956, p. 638-640).

[25] G. E. Šilov, *O razloženia kommutativnovo normirovanovo kolza v pr'amu'u summu idealov* (*Mat. Sbornik*, 32, 2, 1953, p. 353-364).

[26] N. Wiener, *The Fourier Integral...* Cambridge 1933.

[27] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warsaw 1935.

PROPRIÉTÉS

DES

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE POISSON-WEIERSTRASS

ET

PROBLÈME DE CAUCHY POUR UN SYSTÈME PARABOLIQUE

PAR W. POGORZELSKI.

(Varsovie).

1. INTRODUCTION ET FORMULES PRINCIPALES. — Soit un système de $N \geq 1$ équations aux dérivées partielles

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi^{(\alpha)}(u_1, \ldots, u_N) = &\sum_{1 \leq j \leq N}^{k_1+\ldots+k_n=M} A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t)\, \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq N}^{k_1+\ldots+k_n<M} B_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t)\, \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq N} C_{\alpha j}(X, t)\, u_j - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0 \\ &(\alpha = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned}\right.$$

d'ordre $M \geq 2$ aux N fonctions inconnues $u_1(X, t), \ldots, u_N(X, t)$.

Nous admettons les hypothèses suivantes :

I. Les coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé M sont des fonctions réelles, définies et bornées dans tout l'espace euclidien E des variables réelles $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans l'intervalle fini $0 \leq t \leq T$. Ces coefficients vérifient la condition de Hölder, par rapport aux variables spatiales et la variable t, de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left| A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t) - A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X_1, t_1) \right| < \text{Cte}\, [\, |XX_1|^h + |t - t_1|^{h'}\,] \\ &(\alpha, j = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned}\right.$$

où h et h' sont des constantes positives, non supérieures à l'unité, $|XX_1|$ désigne la distance euclidienne des deux points arbitraires X et X_1 de l'espace E, t et t_1 sont les deux valeurs arbitraires de l'intervalle (o, T).

II. Les coefficients $B_{\alpha j}$, $C_{\alpha j}$ des dérivées d'ordre inférieur à M sont des fonctions réelles, définies et bornées dans tout l'espace E et pour l'intervalle $o \leq t \leq T$. Ces coefficients vérifient la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales

$$(3) \qquad \begin{cases} |B_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(X, t) - B_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(X_1, t)| < \text{Cte}\,|XX_1|^h, \\ |C_{\alpha j}(X, t) - C_{\alpha j}(X_1, t)| < \text{Cte}\,|XX_1|^h \end{cases}$$

et sont uniformément continues par rapport à la variable t. La condition de Hölder par rapport à cette variable n'est pas nécessaire.

III. Conformément à la définition du système *parabolique*, donnée par Petrovsky [1], l'équation en λ

$$(4) \qquad \det_{\alpha, j} \left| \sum_{k_1 + \dots + k_n = M} A_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(X, t)\,(is_1)^{k_1} \dots (is_n)^{k_n} - \delta_\alpha^j \lambda \right| = o,$$

où δ_α^j est le symbole de Kronecker, admet les racines en λ, dont toutes les parties réelles sont inférieures à un nombre négatif fixé $-\hat{\delta}$

$$(5) \qquad \operatorname{Re}(\lambda) < -\hat{\delta} < o$$

pour toutes les valeurs des variables réelles $s_1, s_2, \dots, s_n$ vérifiant l'égalité

$$(6) \qquad s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2 = 1$$

et pour tout point de la région

$$X \in E, \qquad o \leq t \leq T.$$

L'hypothèse III exige donc que le degré M des équations (1) soit *pair*.

Les hypothèses I et II sont plus générales que dans le travail [4] de S. Eidelmann consacré au système parabolique.

Dans le travail [2] nous avons construit, sous les hypothèses I, II et III, une matrice, dite des solutions fondamentales, dont les éléments sont donnés par les formules

$$(7) \qquad \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau) + \int_\tau^t \sum_{\gamma=1}^{N} W_{\alpha\gamma}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta)\,\Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\,d\Pi\,d\zeta,$$

où $X(x_1, \dots, x,)$, $Y(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sont deux points arbitraires différents de l'espace E et $\tau < t$ deux valeurs arbitraires dans l'intervalle (o, T). Les fonctions $W_{\alpha\beta}$ sont les élements d'une matrice, dite des quasi-solutions,

données par les formules

$$(8)\qquad \begin{cases} W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \iiint_E \varphi^{\beta}_{\alpha}(t, \tau; Z, \zeta; S)\, e^{i\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu(x_\nu - \xi_\nu)}\, dS \\ (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N) \end{cases}$$

étendues à tout l'espace euclidien E des variables réelles $S(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Z désigne un point arbitraire de l'espace E, ζ, une valeur arbitraire dans l'intervalle $(0, T)$. Les fonctions $\varphi^{\beta}_1, \varphi^{\beta}_2, \ldots, \varphi^{\beta}_N$ $(\beta = 1, 2, \ldots, N)$, pour β fixé, forment une solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$(9)\qquad \frac{d\varphi^{\beta}_{\alpha}}{dt} = \sum_{1 \leq j \leq N}^{k_1 + \ldots + k_n = M} A^{k_1 \ldots k_n}_{\alpha j}(Z, \zeta)\,(is_1)^{k_1} \ldots (is_n)^{k_n} \varphi^{\beta}_j(t, \tau; Z, \zeta; S)$$

(où Z, ζ, s_ν jouent le rôle des paramètres fixés), avec la condition initiale $\varphi^{\beta}_{\alpha} \to \delta^{\beta}_{\alpha}$ si $t \to \tau$.

Les fonctions $\Phi_{\alpha\beta}$ dans les formules (7) forment, pour β fixé, une solution du système d'équations intégrales singulières de Volterra

$$(10)\qquad \begin{cases} \Phi_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \hat{\Psi}^{(\alpha)}_{X,t}\left[W^{Y,\tau}_{j\beta}(X, t; Y, \tau)\right] \\ \qquad + \displaystyle\int_{\tau}^{t} \iiint_E \sum_{\gamma=1}^{N} \hat{\Psi}^{(\alpha)}_{X,t}\left[W^{\Pi,\zeta}_{j\gamma}(X, t; \Pi, \zeta)\right] \Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\, d\Pi\, d\zeta \\ \qquad\qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N), \end{cases}$$

où $\hat{\Psi}^{\alpha}_{X,T}(u_j)$ désigne une opération différentielle sur le système de fonctions $u_j(u_1, \ldots, u_N)$ par rapport aux variables (X, t) définies par les formules (1). Les fonctions $\Gamma_{1\beta}, \Gamma_{2\beta}, \ldots, \Gamma_{N\beta}$, pour β fixé, forment une solution du système (1) en tout point $X \neq Y$ de l'espace E pour $0 < \tau < t < T$.

Nous allons citer encore deux théorèmes dont nous aurons besoin dans nos considérations ultérieures et qui sont un peu généralisés par rapport aux théorèmes que nous avons démontrés dans le travail [2].

Théorème 1. — *Si les fonctions $\rho_\beta(Y, \tau)$ sont définies, bornées et continues dans la région*

$$Y \in E \qquad (0 \leq \tau \leq T),$$

les fonctions

$$(11)\qquad I_\alpha(X, T, \tau) = \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} W^{Y,\tau}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\, \rho_\beta(Y, \tau)\, dY$$

(analogues à l'intégrale de Poisson-Weierstrass) définies pour $X \in E$, $0 \leq \tau < t \leq T$, *ont la propriété de limite suivante :*

$$(12)\qquad \lim_{\tau \to t} I_\alpha(X, t, \tau) = \rho_\alpha(X, t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N)$$

uniformément dans tout domaine borné $\Omega \subset E$.

THÉORÈME 2. — *Si les fonctions* $\rho_\beta(Y, \tau)$, *définies dans la région*

$$Y \in E \qquad (0 < \tau \leq T),$$

et intégrables dans tout domaine borné de l'espace E (*pour* $0 < \tau \leq T$), *vérifient l'inégalité*

$$|\rho_\beta(Y, \tau)| < \frac{Cte}{\tau^{\mu'}}$$

et, en outre, une condition de Hölder

$$(13) \qquad \begin{cases} |\rho_\beta(Y, \tau) - \rho_\beta(Y_1, \tau)| < \dfrac{Cte}{\tau^{\mu_0}} |YY_1|^{h_\rho} \\ (0 < h_\rho < 1,\ 0 < \mu' < 1,\ 0 < \mu_0 < 1) \end{cases}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset E$ *pour* $0 < \tau \leq T$, *alors les fonctions*

$$(14) \qquad U_\alpha(X, t) = \int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\, \rho_\beta(Y, \tau)\, dY\, d\tau,$$

dites composantes du quasi-potentiel de charge spatiale, admettent les dérivées spatiales d'ordre $m = 1, 2, \ldots, M$ *et la dérivée par rapport à la variable* t *en tout point intérieur* $X \in \Omega$ *pour* $0 < t < T$, *qui vérifient le système d'équations suivant :*

$$(15) \qquad \sum_{1 \leq j \leq N}^{k_1 + \ldots + k_n = M} A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t) \frac{\partial^M U_\alpha(X, t)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial}{\partial t}[U_\alpha(X, t)]$$

$$= -\rho_\alpha(X, t) + \int_0^t \iiint_E \sum_{1 \leq \beta, j \leq N}^{k_1 + \ldots + k = M} [A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t) - A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(Y, \tau)]$$

$$\times \frac{\partial^M W_{j\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \rho_\beta(Y, \tau)\, dY\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, N).$$

2. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE POISSON-WEIERSTRASS.

LEMME. — *Les éléments de la matrice des solutions fondamentales* $\Gamma_{\alpha\beta}$, *données par les formules* (7), *et ses dérivées spatiales d'ordre* $m \leq M - 1$ *vérifient dans le cas* $|XY| \leq \rho_0$ *les inégalités*

$$(16) \qquad \begin{cases} |D_X^{(m)}[\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)]| < \dfrac{C}{(t - \tau)^{\mu'}} \dfrac{1}{|XY|^{m+n-M\mu'}} \\ X \neq Y,\ 0 \leq \tau < t \leq T, \end{cases}$$

μ' *est une constante arbitrairement fixée à l'intérieur de l'intervalle*

$$\left(0, \frac{m+n}{M}\right) \qquad \text{si} \quad m + n < M;$$

$$(0, 1) \qquad \text{si} \quad m + n \geq M;$$

dans le cas $|XY| > \rho_0$, *on a*

$$|D_X^{(m)}\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)]| < C'|t-\tau|^{\mu_1}\exp[-k|XY|], \tag{17}$$

où C, C', k, μ_1, ρ_0 *sont des constantes positives; en outre, nous signalons que les constantes positives* k, ρ_0, μ_1 *peuvent être arbitrairement fixées et qu'on a posé*

$$D_X^{(0)}[\Gamma_{\alpha\beta}] = \Gamma_{\alpha\beta}.$$

Démonstration. — La limitation (16), pour $|XY| \leq \rho_0$, a été établie dans notre travail [3]. Pour donner la preuve de la limitation (17), nous nous appuierons sur la limitation des éléments (8) de la matrice des quasi-solutions et de ses dérivées d'ordre m arbitraire

$$|D_X^{(m)}[W_{\alpha\beta}^{Z,\tau}(X, t; Y, \tau)]| < \frac{C_m}{(\sqrt[M]{t-\tau})^{m+n}}\exp\left[-\frac{c_m|XY|^q}{\sqrt[M-1]{t-\tau}}\right] \tag{18}$$

$\left(q = \frac{M}{M-1}\right)$ établie dans notre travail [2] (p. 161).

L'inégalité (18) concerne aussi le cas $m = 0$, si nous posons

$$D_X^{(0)}[W_{\alpha\beta}] = W_{\alpha\beta}.$$

Décomposons la constante positive $c = \min(c_0, c_1, \ldots, c_{M-1})$ d'une façon arbitraire en somme $c = c' + c''$ des deux constantes positives c', c'' et séparons les singularités de la façon indiquée dans le travail [2]. Nous obtiendrons alors une limitation de la forme ($0 \leq m \leq M-1$)

$$|D_X^{(m)}[W_{\alpha\beta}^{Z,\tau}(X, t; Y, \tau)]| < \frac{\text{Cte}\,|t-\tau|^{\mu_1}}{|XY|^{m+n+M\mu_1}}\exp[-k'|XY|^q], \tag{19}$$

où μ_1 est une constante positive, arbitrairement fixée, et

$$k' = \frac{c''}{\sqrt[M-1]{T}}.$$

Posons maintenant

$$\begin{cases} \Phi_{\alpha\beta}^*(X, t; Y, \tau) = \Phi_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\exp[k_0|XY|], \\ N_{\alpha\beta}^*(X, t; Y, \tau) = \Psi_{X,t}^{(x)}[W_{\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)]\exp[k_0|XY|], \end{cases} \tag{20}$$

k_0 étant une constante positive arbitrairement fixée. Alors, d'après les équations (10), les fonctions nouvelles $\Phi_{\alpha\beta}^*$ vérifient le système d'équations intégrales

$$\begin{cases} \Phi_{\alpha\beta}^*(X, t; Y, \tau) = N_{\alpha\beta}^*(X, t; Y, \tau) \\ \qquad + \int_\tau^t \iiint_E \sum_{\gamma=1}^{N} N_{\alpha\gamma}^*(X, t; \Pi, \zeta)\exp\{-k_0[|X\Pi| + |\Pi Y| - |XY|]\} \\ \qquad \times \Phi_{\gamma\beta}^*(\Pi, \zeta; Y, \tau)\, d\Pi\, d\zeta \\ \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \end{cases} \tag{21}$$

β étant fixé. Or, nous avons l'inégalité

$$|\mathrm{XH}|+|\mathrm{HY}|-|\mathrm{XY}|\geq 0$$

quels que soient les points X, Y, H dans l'espace E, donc d'après les formules (19) et (20), les noyaux $\mathrm{N}^{*}_{\alpha\gamma}$ des équations (21) vérifient les inégalités

$$|\mathrm{N}^{*}_{\alpha\beta}(\mathrm{X},t;\mathrm{H},\zeta)|\exp\{-k[|\mathrm{XH}|+|\mathrm{HY}|-|\mathrm{XY}|]\}<\frac{\mathrm{Cte}\,|t-\zeta|^{\mu_1}}{|\mathrm{XH}|^{n+\mathrm{M}\mu_1}} \tag{22}$$

si $|\mathrm{XY}|\geq\rho_0$, où μ_1 et ρ_0 sont des constantes positives arbitrairement fixées. Nous rappelons que les noyaux $\mathrm{N}^{*}_{\alpha\beta}$, d'après notre travail [2] (p. 179), vérifient une limitation sans modification

$$|\mathrm{N}^{*}_{\alpha\beta}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)|<\frac{\mathrm{Cte}}{(t-\tau)^{\mu}}\,\frac{1}{|\mathrm{XY}|^{n+\mathrm{M}(1-\mu)-h_1}} \tag{23}$$

si $|\mathrm{XY}|<\rho_0$, où la constante μ est fixée par

$$1-\frac{1}{\mathrm{M}}h_1<\mu<1,\qquad h_1=\min(h,2h'). \tag{24}$$

Les inégalités (22) et (23) ont la même forme que les inégalités admises pour les fonctions $\Psi^{(\alpha)}_{\mathrm{X},l}[\mathrm{W}^{\mathrm{Y},\tau}_{l\beta}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)]$ dans le travail [2] (p. 178-184), donc, en répétant pour le système (21) le raisonnement que nous y avons développé, nous arrivons aux inégalités

$$|\Phi^{*}_{\alpha\beta}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)|<\frac{\mathrm{Cte}}{(t-\tau)^{\mu}}\,\frac{1}{|\mathrm{XY}|^{n+\mathrm{M}(1-\mu)-h_1}}\qquad\text{si}\quad|\mathrm{XY}|\leq\rho_0, \tag{25}$$

et

$$|\Phi^{*}_{\alpha\beta}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)|<\frac{\mathrm{Cte}\,|t-\tau|^{\mu_1}}{|\mathrm{XY}|^{n+\mathrm{M}\mu_1}}\qquad\text{si}\quad|\mathrm{XY}|>\rho_0, \tag{26}$$

analogues aux inégalités (106) et (106′) du travail [2].

Il en résulte l'inégalité

$$|\Phi_{\alpha\beta}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)|<\frac{\mathrm{Cte}\,|t-\tau|^{\mu_1}}{|\mathrm{XY}|^{n+\mathrm{M}\mu_1}}\exp[-k_0|\mathrm{XY}|]\qquad\text{si}\quad|\mathrm{XY}|>\rho_0 \tag{27}$$

et l'inégalité de la même forme que (25), si $|\mathrm{XY}|\leq\rho_0$. Ces inégalités nous permettent de déduire la limitation (17) pour les éléments de la matrice des solutions données par la formule (7). Étudions donc les intégrales

$$\left\{\begin{aligned}&\mathrm{I}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)=\int_{\tau}^{t}\iiint_{\mathrm{E}}\mathrm{D}^{(m)}_{\mathrm{X}}[\mathrm{W}^{\mathrm{H},\zeta}_{\alpha\gamma}(\mathrm{X},t;\mathrm{H},\zeta)]\Phi_{\gamma\beta}(\mathrm{H},\zeta;\mathrm{Y},\tau)\,d\mathrm{H}\,d\zeta\\&\qquad\qquad(m=0,1,\ldots,\mathrm{M}-1)\end{aligned}\right. \tag{28}$$

en supposant $|\mathrm{XY}|>2\rho_0$. Soient les deux sphères K_{X} et K_{Y} centrées aux points X, Y et de rayon ρ_0. Nous décomposons l'intégrale (28) en la somme des

intégrales

$$I = I^{K_X} + I^{K_Y} + I^{E-K_X-K_Y} \tag{29}$$

étendues aux domaines K_X, K_Y, $E - K_X - K_Y$.

La première intégrale vérifie l'inégalité

$$|I^{K_X}(X, t; Y, \tau)| < \text{Cte} \int_\tau^t \frac{(\zeta-\tau)^{\mu_1} d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu'}} \iiint_{K_X} \frac{\exp[-k_0 |\Pi Y|]\, d\Pi}{|X\Pi|^{n+n-M\mu'} |Y\Pi|^{n+M\mu_1}}.$$

Remarquons maintenant qu'on a $2|\Pi Y| > |XY|$ si $\Pi \in K_X$, il en résulte

$$|I^{K_X}| < \text{Cte} \frac{(t-\tau)^{\mu_1+1-\mu'}}{|XY|^{n+M\mu_1}} \exp\left[-\frac{1}{2} k_0 |XY|\right]. \tag{30}$$

D'une façon analogue, d'après les limitations (19) et (25), on obtient

$$|I^{K_Y}| < \text{Cte} \frac{(t-\tau)^{\mu_1+1-\mu'}}{|XY|^{n+M\mu_1}} \exp\left[-\frac{1}{2} k_0 |XY|\right] \quad \text{si} \quad |XY| > 2\rho_0. \tag{31}$$

Le dernier membre de la somme (29), d'après les limitations (19) et (27), vérifie une inégalité

$$|I^{E-K_X-K_Y}| < \text{Cte} \int_\tau^t (t-\zeta)^{\mu_1} (\zeta-\tau)^{\mu_1} d\zeta \iiint_{E-K_X-K_Y} \frac{\exp[-k_0 |\Pi X| - k_0 |\Pi Y|]\, d\Pi}{|X\Pi|^{n+M\mu_1} |\Pi Y|^{n+M\mu_1}}.$$

Or, nous avons $|\Pi X| + |\Pi Y| \geqq |XY|$ quels que soient les points X, Y, Π, donc

$$|I^{E-K_X-K_Y}| < \text{Cte} \, |t-\tau|^{2\mu_1+1} \exp[-k_0 |XY|] \iiint_{E-K_X-K_Y} \frac{d\Pi}{|\Pi X|^{n+M\mu_1} |\Pi Y|^{n+M\mu_1}}. \tag{32}$$

La dernière intégrale est bornée, par conséquent, en vertu des résultats (30), (31), (32), en tenant compte de la formule (7) et du théorème sur la dérivation des intégrales de volume (*voir* [2]), nous arrivons à la conclusion (17) de notre lemme.

Passons maintenant à la démonstration des deux théorèmes suivants, donnant certaines propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass relativement au système (1).

THÉORÈME 3. — *Si les fonctions* $f_\alpha(X)$, *définies et continues dans tout l'espace* E, *vérifient les inégalités*

$$|f_\alpha(X)| \leqq a \exp[b |XX_0|], \tag{33}$$

où a, b sont des constantes positives données, X_0 *un point fixé de l'espace* E, *alors les intégrales singulières*

$$J_\alpha(X, t) = \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\, dY \quad . \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N) \tag{34}$$

sont absolument convergentes pour $X \in E$, $0 < t \leq T$, *ont la propriété limite*

$$\lim_{t \to 0} J_\alpha(X, t) = f_\alpha(X) \tag{35}$$

et admettent les dérivées spatiales d'ordre $m \leq M - 1$, *déterminées par les intégrales absolument convergentes*

$$D_X^{(m)}[J_\alpha(X, t)] = \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(m)}[\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0)] f_\beta(Y)\, dy \tag{36}$$

en tout point X *de l'espace* E *pour* $0 < t < T$.

Démonstration. — La convergence absolue des intégrales doublement singulières (34) et (36) est assurée pour $|XY| \to 0$ et pour $|XY| \to \infty$, grâce aux inégalités (16) et (17), où l'on peut poser $k > b$, la constante k étant arbitraire. La preuve que les intégrales (36) représentent alors les dérivées spatiales des fonctions (34) est bien connue et donnée dans nos travaux [2] et [3].

Pour démontrer la propriété limite (35), nous décomposons les intégrales (34) en sommes

$$J_\alpha(X, t) = J_\alpha^{\Omega}(X, t) + J_\alpha^{E-\Omega}(X, t) \tag{37}$$

des intégrales étendues au voisinage Ω du point X, borné et mesurable, et au domaine extérieur $E - \Omega$.

Ensuite nous écrivons

$$J_\alpha^{\Omega}(X, t) = \overset{*}{J}{}_\alpha^{\Omega}(X, t) + \overset{**}{J}{}_\alpha^{\Omega}(X, t) \tag{38}$$

en posant

$$\begin{cases} \overset{*}{J}{}_\alpha^{\Omega}(X, t) = \iiint_\Omega \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,0}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\, dY, \\ \overset{**}{J}{}^{\Omega}(X, t) = \iiint_\Omega \sum_{\beta=1}^{N} \overline{W}_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\, dY, \end{cases} \tag{39}$$

où l'on a désigné par $\overline{W}_{\alpha\beta}$ l'intégrale dans la somme (7). D'après le théorème cité, nous avons

$$\lim_{t \to 0} \overset{*}{J}{}_\alpha^{\Omega}(X, t) = f_\alpha(X). \tag{40}$$

La seconde des intégrales (39), en vertu des limitations (16) et (25), vérifie l'inégalité

$$\overset{**}{J}{}_\alpha^{\Omega}(X, t) < \text{Cte} \sup_{\Omega} |f_\alpha|\, t^{1-(\mu+\mu')}. \tag{41}$$

Or, μ étant fixé dans l'intervalle (24), on peut choisir la constante μ' suffisamment petite pour qu'on ait $1 - (\mu + \mu') > 0$; il en résulte que

$$\lim_{t \to 0} \overset{**}{J}{}_\alpha^{\Omega}(X, t) = 0,$$

par conséquent

$$\lim_{t\to 0} J_\alpha^\Omega(X, t) = f_\alpha(X). \tag{42}$$

Quant au second composant de la somme (37), en nous appuyant sur l'inégalité (17) ($k > b$), nous aurons une limitation

$$|J_\alpha^{E-\Omega}(X, t)| < \text{Cte } t^{\mu_1},$$

d'où

$$\lim_{t\to 0} J^{E-\Omega}(X, t) = 0. \tag{43}$$

En réunissant les résultats (42) et (43), on arrive à la formule (35) du théorème 3.

Théorème 4. — *Si les fonctions $f_\alpha(X)$, définies dans tout l'espace* E, *sont intégrables dans tout domaine $\Omega \subset E$ borné et mesurable et, en outre, vérifient l'inégalité* (33), *alors les intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass* $J_1(X, t), \ldots, J_N(X, t)$ *déterminées par les formules* (34), *forment une solution du système* (1) *pour $t > 0$, c'est-à-dire vérifient le système d'équations*

$$\hat{\Psi}^{(\alpha)}_{X,t}[J_1(X, t), \ldots, J_N(X, t)] = 0 \tag{44}$$

en tout point X *de l'espace* E *pour* $0 < t < T$.

Démonstration. — D'après la formule (7), nous pouvons écrire les intégrales étudiées (34) sous la forme d'une somme

$$J_\alpha(X, t) = \mathring{J}_\alpha(X, t) + \mathring{\mathring{J}}_\alpha(X, t) \tag{45}$$

de l'intégrale

$$\mathring{J}_\alpha(X, t) = \iiint_{E(Y)} \sum_{\mu=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\, dY \tag{46}$$

et de quasi-potentiel de charge spatiale

$$\mathring{\mathring{J}}_\alpha(X, t) = \int_0^t \iiint_{E(\Pi)} \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta)\, \rho_\beta(\Pi, \zeta)\, d\Pi\, d\zeta \tag{47}$$

de densité $\{\rho_\beta\}$ déterminée par les intégrales

$$\rho_\beta(\Pi, \zeta) = \iiint_{E(Y)} \sum_{\gamma=1}^{N} \Phi_{\beta\gamma}(\Pi, \zeta; Y, 0) f_\gamma(Y)\, dY. \tag{48}$$

Nous signalons que, d'après les limitations (16), (19), (25), (27), (33), toutes les intégrales (46), (47) et (48) ont un sens et sont absolument convergentes pour $0 < t < T$ ou $0 < \zeta < T$. L'étude des intégrales (46) n'offre pas de difficulté, puisque, en tenant compte de l'inégalité (18), nous pouvons affirmer qu'elles sont régulières et admettent des dérivées spatiales de tout ordre m et

la dérivée par rapport à la variable t, données par les intégrales régulières

$$(49) \qquad D_X^{(m)}\left[\overset{*}{J}_\alpha(X, t)\right] = \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(m)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, o)\right] f_\beta(Y)\, dY,$$

$$(49') \qquad D_t\left[\overset{*}{J}_\alpha(X, t)\right] = \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} D_t\left[W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, o)\right] f_\beta(Y)\, dY$$

en tout point $X \in E$, pour $o < t < T$.

Pour démontrer l'existence des dérivées d'ordre $m = 1, 2, \ldots, M$ des intégrales (47), il faut étudier d'abord les fonctions (48), en montrant qu'elles vérifient une condition de Hölder de la forme

$$(50) \qquad |\rho_\beta(\Pi, \zeta) - \rho_\beta(\Pi_1, \zeta)| < \frac{C_\Omega}{\zeta^\mu} |\Pi\Pi_1|^{0h_1}$$

dans un domaine borné, arbitraire $\Omega \subset E$; μ et 0 sont des constantes positives fixées par

$$1 - \frac{h_1}{M} < \mu < 1, \qquad o < 0 < 1 \qquad [h_1 = \min(h, 2h')],$$

l'une de ces constantes peut être fixée arbitrairement et l'autre est alors déterminée par l'une des formules

$$(50') \qquad \begin{cases} 0 = 1 - (1 - \mu)\dfrac{M}{h_1}, \\ \mu = 1 - (1 - 0)\dfrac{h_1}{M}, \end{cases}$$

C_Ω est une constante positive, dépendant du domaine Ω.

La preuve de l'inégalité (50) s'appuie sur les propriétés (25), (27) des fonctions $\Phi_{\alpha\beta}$, sur les équations intégrales (10) et sur les limitations (18). Cette preuve n'est pas facile, mais elle est tout à fait analogue à la démonstration du théorème que nous avons donnée pour les fonctions de la forme semblable à (48) dans notre travail [3], nous omettons donc de reproduire cette démonstration. Nous signalons encore que, d'après les inégalités (25), (27), (33), les fonctions (48) vérifient une limitation

$$(51) \qquad |\rho_\beta(\Pi, \zeta)| < \frac{\text{Cte}}{\zeta^\mu} \qquad \left(1 - \frac{h_1}{M} < \mu < 1\right).$$

En tenant compte des propriétés (50), (51) et du théorème 2 cité, nous concluons que les fonctions (47) admettent les dérivées spatiales d'ordre $m = 1, 2, \ldots, M$ et la dérivée par rapport à la variable t qui vérifient le

système d'équations

$$(52)\quad \sum_{1\leq j\leq N}^{k_1+\ldots+k_n=M} A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X,t)\frac{\partial^M \overset{*}{J}_\alpha(X,t)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}-\frac{\partial}{\partial t}\Big[\overset{*}{J}_\alpha(X,t)\Big]$$
$$=-\rho_\alpha(X,t)+\int_0^t\iiint_{E(\Pi)}\sum_{1\leq\beta,j\leq N}^{k_1+\ldots+k_n=M}\big[A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X,t)-A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(\Pi,\zeta)\big]$$
$$\times\frac{\partial^M\big[W_{j\beta}^{Y,\tau}(X,t;\Pi,\zeta)\big]}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\rho_\beta(\Pi,\zeta)\,d\Pi\,d\zeta$$

pour $X\in E$, $0<t<T$. En rapprochant les égalités (49), (49′), (52), nous pouvons affirmer que les fonctions (45) vérifient le système d'équations suivantes ($\alpha=1,2,\ldots,N$) :

$$(53)\quad \hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[J_1(X,t),\ldots,J_N(X,t)]$$
$$=-\rho_\alpha(X,t)+\iiint_{E(Y)}\sum_{\beta=1}^{N}\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}\big[W_{1\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,0),\ldots,W_{N\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,0)\big]f_\beta(Y)\,dY$$
$$+\int_0^t\iiint_{E(\Pi)}\sum_{\gamma=1}^{N}\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}\big[W_{1\gamma}^{\Pi,\zeta}(X,t;\Pi,\zeta),\ldots,W_{N}^{\Pi,\zeta}(X,t;\Pi,\zeta)\big]\rho_\gamma(\Pi,\zeta)\,d\Pi\,d\zeta.$$

En tenant compte des formules (48) et en remarquant que les résultats des opérations différentielles $\hat{\Psi}$ sont des fonctions à singularités faibles, nous aurons ensuite

$$\Psi_{X,t}^{(\alpha)}[J_1(X,t),\ldots,J_N(X,t)]$$
$$=\iiint_{E(Y)}\sum_{\beta=1}^{N}\Big\{\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}\big[W_{j\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,0)\big]-\Phi_{\alpha\beta}(X,t;Y,0)$$
$$+\int_\tau^t\iiint_{E(\Pi)}\sum_{\gamma=1}^{N}\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}\big[W_{j\gamma}^{\Pi,\zeta}(X,t;\Pi,\zeta)\big]\Phi_{\gamma\beta}(\Pi,\zeta;Y,\tau)\,d\Pi\,d\zeta\Big\}f_\beta(Y)\,dY.$$

Il en résulte, d'après le système d'équations intégrales (10), que

$$\Psi_{X,t}^{(\alpha)}[J_1(X,t),\ldots,J_N(X,t)]=0$$

en tout point $X\in E$ pour $0<t<T$.

Le théorème 4 est donc démontré.

Théorème 5. — *Sous les mêmes hypothèses concernant les fonctions $f_\alpha(X)$, que dans le théorème 4, les dérivées spatiales d'ordre $m\leq M-1$ des intégrales de Poisson-Weierstrass* (34) *vérifient une condition de Hölder de la forme* ($0<t<t_1\leq T$)

$$(54)\quad |D_X^{(m)}[J_\alpha(X,t)]-D_X^{(m)}[J_\alpha(X_1,t_1)]|<\frac{\text{Cte}\,\exp[b|XX_0|]}{t^{\mu_m}}\Big[|XX_1|^{\theta_m}+|t-t_1|^{\theta_m\left(1-\frac{m}{M}\right)}\Big],$$

où les constantes μ_m et θ_m vérifient les inégalités :

$$(55)\qquad \frac{m}{M} < \mu_m < 1, \qquad 0 < \theta_m < 1 \qquad \text{si} \quad m+n \geq M,$$

$$(55')\qquad \frac{m}{M} < \mu_m < \frac{m+n}{M}, \qquad 0 < \theta_m < \frac{n}{M-m} \qquad \text{si} \quad m+n < M;$$

l'une de ces constantes peut être choisie arbitrairement et l'autre est alors déterminée par l'une des formules

$$(55'')\qquad \begin{cases} \theta_m = \dfrac{\mu_m - m M^{-1}}{1 - m M^{-1}}, \\ \mu_m = \dfrac{m}{M} + \theta_m \left(1 - \dfrac{m}{M}\right); \end{cases}$$

on a ensuite $\theta'_m = 1$ si $m = 0, 1, \ldots, (M-2)$ et $\theta'_m = \theta_m$ si $m = M-1$.

Démonstration. — La présence dans l'inégalité (54) du terme $|XX_1|^{\theta'_m}$, avec $\theta'_m = 1$ si $m = 1, 2, \ldots, (M-2)$, est évidente immédiatement, puisque les fonctions (34), en vertu des limitations (16) et (17), admettent les dérivées spatiales d'ordre $m \leq M-1$, vérifiant une inégalité

$$(56)\qquad |D_X^{(m)}[J_\alpha(X, t_1)]| < \text{Cte}\, t^{-\bar{\mu}} \exp[b|XX_0|]$$

pour $X \in E$, $0 < t \leq T$, où $\bar{\mu}$ est un nombre choisi arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $\left(\frac{m}{M}, 1\right)$.

Pour étudier la différence des dérivées (54), pour les valeurs t et t_1, décomposons l'intégrale J_α en sommes (45) des deux intégrales (46), (47). Étudions d'abord la différence

$$(57)\qquad \begin{cases} \check{I} = D_X^{(m)}\left[\check{J}_\alpha(X, t_1)\right] - D_X^{(m)}\left[\check{J}_\alpha(X, t)\right] \\ = \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} \left\{ D_X^{(m)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,0}(X, t_1; Y, 0)\right] - D_X^{(m)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,0}(X, t; Y, 0)\right] \right\} f_\beta(Y)\, dY \\ \qquad\qquad (0 < t < t_1 \leq T) \end{cases}$$

en la décomposant en somme des intégrales

$$\check{I} = \check{I}^\Delta + \check{I}^{E-\Delta}$$

étendues à la sphère Δ de rayon r_Δ, centrée au point X, et au domaine extérieur $E - \Delta$. Remarque faite de la limitation (16), nous aurons

$$(57')\qquad \left|\check{I}^\Delta\right| < \text{Cte}\, t^{-\mu_m} \sup_\Delta |f_\alpha| \iiint_\Delta \frac{dY}{|XY|^{n+m-M\mu_m}} < \text{Cte}\, t^{-\mu_m} \sup_\Delta |f_\alpha|\, r_\Delta^{M\mu_m - m},$$

où

$$\frac{m}{M} < \mu_m < 1 \quad \text{si } m+n \geq M \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{M} < \mu_m < (m+n)M^{-1} \quad \text{si } m+n < M.$$

Pour limiter l'intégrale étendue au domaine $E-\Delta$, remarquons que la dérivée par rapport à la variable t de la dérivée spatiale d'ordre m de la fonction $W_{\alpha\beta}$ admet, d'après (9), une limitation de la même forme que la dérivée spatiale d'ordre $M+m$ de la fonction $W_{\alpha\beta}$, nous aurons donc, en tenant compte des inégalités (18) et (19),

$$\left|D_{X,t}^{(m+1)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau)\right]\right|<\frac{\text{Cte}}{(t-\tau)^{\mu_*}}\frac{1}{|XY|^{m+n+M(1-\mu_*)}}\qquad(0<\mu_*<1)$$

si $|XY|\leq\rho_0$ et

$$\left|D_{X,t}^{(m+1)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau)\right]\right|<\text{Cte}\,(t-\tau)^{\mu'_*}\exp[-k|XY|]$$

si $|XY|>\rho_0\geq r_\Delta$, où μ'_*, ρ_0 et k sont des constantes positives fixées arbitrairement $(k>b)$.

Nous en concluons [*voir* (33)] (K_{ρ_0} désigne une sphère de centre X et de rayon ρ_0)

$$(57'')\quad\left|\mathring{I}^{E-\Delta}\right|<\frac{\text{Cte}\exp[b|X_0X|]}{t^{\mu_*}}\left\{\iiint_{K_{\rho_0}-\Delta}\frac{dY}{|XY|^{m+n+M(1-\mu_*)}}+\iiint_{E-K_{\rho_0}}\exp[-(k-b)|XY|]\,dY\right\}.|t-t_1|$$

$$<\text{Cte}\,t^{-\mu_*}\exp[b|X_0X|].|t-t_1|\left[r_\Delta^{M(\mu_*-1)-m}+\rho_0^{M(\mu_*-1)-m}+\omega_n\int_{\rho_0}^{\infty}r^{n-1}e^{-(k-b)r}\,dr\right].$$

Posons maintenant $r_\Delta=\text{Cte}\,|t-t_1|^\alpha\leq\rho_0$, en choisissant la constante positive α de façon que

$$1-\alpha[M(1-\mu_*)+m]=(M\mu_2-m)\alpha>0\qquad(\mu_2=\mu_*)$$

et nous aurons $\alpha=\frac{1}{M}$. En rapprochant les résultats $(57')$ et $(57'')$, nous en concluons que la différence des dérivées (57) vérifie l'inégalité de Hölder

$$(57''')\quad\left\{\left|D_X^{(m)}\left[\mathring{J}_\alpha(X,t_1)\right]-D_X^{(m)}\left[\mathring{J}_\alpha(X,t)\right]\right|<\text{Cte}\,t^{\mu_m}\exp[b|XX_0|].|t-t_1|^{\mu_m-\frac{m}{M}}\right.$$
$$\left.(m=0,1,2,\ldots,M-1).\right.$$

D'une façon analogue, on peut étudier la différence

$$\mathring{I}=D_X^{(m)}\left[\mathring{J}_\alpha(X,t_1)\right]-D_X^{(m)}\left[\mathring{J}_\alpha(X,t)\right]$$

des intégrales (47) exprimant le quasi-potentiel de charge spatiale de densité (48). En remarquant que les fonctions (48) vérifient, d'après (25) et (27), l'inégalité

$$|\rho_\beta(H,\zeta)|<\text{Cte}\,\zeta^{\mu}\exp[b|XX_0|],$$

on arrive, en répétant le calcul pour la fonction $\overset{*}{\mathrm{I}}$, à la limitation

$$(58) \qquad \left|\overset{**}{\mathrm{I}}\right| < \mathrm{Cte}\ t^{-\mu_m-\mu+1}\exp[b\,|\,\mathrm{XX}_0\,|\,].|\,t-t_1\,|^{\mu_m-\frac{m}{\mathrm{M}}}.$$

Il reste à étudier la différence (54), correspondant aux variables spatiales X, X_1 dans le cas $m=\mathrm{M}-1$.

Décomposons de nouveau les intégrales J_α en sommes (45) et étudions la différence

$$(58') \quad \begin{aligned}\overset{*}{\mathrm{R}} &= \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\overset{*}{\mathrm{J}}_\alpha(\mathrm{X},t)\right]-\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\overset{*}{\mathrm{J}}_\alpha(\mathrm{X}_1,t)\right]\\ &= \iiint_{\mathrm{E}(\mathrm{Y})}\sum_{\beta=1}^{\mathrm{N}}\left\{\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},0}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},0)\right]-\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},0}(\mathrm{X}_1,t;\mathrm{Y},0)\right]\right\}f_\beta(\mathrm{Y})\,d\mathrm{Y}\end{aligned}$$

que nous décomposons en somme des intégrales

$$\overset{*}{\mathrm{R}} = \overset{*}{\mathrm{R}}^{\mathrm{K}}+\overset{*}{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}-\mathrm{K}}$$

étendues à la sphère K de rayon $2\,|\,\mathrm{XX}_1\,|$ et au domaine extérieur $\mathrm{E}-\mathrm{K}$. En supposant que $|\,\mathrm{XX}_1\,|\leq\rho_0$, nous aurons, remarque faite de l'inégalité (16),

$$(58'') \quad \left\{\begin{aligned}&\left|\overset{*}{\mathrm{R}}^{\mathrm{K}}\right| < \mathrm{Cte}\ t^{-\mu'}\sup_{\mathrm{K}}|f(\mathrm{Y})|\int_0^{3|\mathrm{XX}_1|} r^{\mathrm{M}\mu-\mathrm{M}}\,dr = \mathrm{Cte}\ t^{-\mu'}\exp[b\,|\,\mathrm{XX}_0\,|\,].|\,\mathrm{XX}_1\,|^{\mathrm{M}(\mu'-1)+1}\\ &\qquad\qquad\left(1-\frac{1}{\mathrm{M}}<\mu'<1\right).\end{aligned}\right.$$

Pour limiter l'intégrale $\overset{*}{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}-\mathrm{K}}$, nous écrivons

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)\right]-\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}_1,t;\mathrm{Y},\tau)\right]\\ &=\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)\right]\right\}_{\mathrm{X}_*}(x_\nu-x'_\nu),\end{aligned}$$

où $(x'_1,\ \ldots,\ x'_n)$ désignent les coordonnées du point X_1 et X_* désigne un point du segment XX_1. Remarque faite de la limitation (18) pour $m=\mathrm{M}$ et de l'inégalité

$$\frac{|\,\mathrm{X}_*\mathrm{Y}\,|}{|\,\mathrm{XY}\,|}>\frac{1}{2},$$

si $\mathrm{Y}\in\mathrm{E}-\mathrm{K}$, nous aurons

$$|\,\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}[\,\mathrm{W}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)]-\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}[\,\mathrm{W}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}_1,t;\mathrm{Y},\tau)]\,|<\frac{\mathrm{Cte}}{(t-\tau)^{\mu'}}\,\frac{|\,\mathrm{XX}_1\,|}{|\,\mathrm{XX}\,|^{n+\mathrm{M}(1-\mu')}}$$

si $|\,\mathrm{XY}\,|\leq\rho_0$ et

$$\left|\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X},t;\mathrm{Y},\tau)\right]-\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}_1,t;\mathrm{Y},\tau)\right]\right|<\mathrm{Cte}\,\frac{(t-\tau)^{\mu_1}}{|\,\mathrm{XY}\,|^{n-1}}\exp[-k\,|\,\mathrm{XY}\,|\,]$$

si $|XY| > \rho_0$. Il en résulte

$$(58''') \quad \left|\overset{E-K}{\breve{R}}\right| < \text{Cte } t^{-\mu'} \exp[b|XX_0|].|XX_1| \left[\int_{2|XX_1|}^{\rho_0} r^{M(1-\mu)+1}\,dr + \int_{\rho_0}^{\infty} \exp[-(k-b)r]\,dr\right]$$
$$< \text{Cte } t^{-\mu'} \exp[b|XX_0|].|XX_1|^{1-M(1-\mu')} \qquad \left(1 - \frac{1}{M} < \mu' < 1\right).$$

En réunissant les résultats (58″) et (58‴), nous aurons une limitation

$$(59) \qquad \left|\breve{R}\right| < \text{Cte } t^{-\mu'} \exp[b|XX_0|].|XX_1|^{1-M(1-\mu')}.$$

D'après (56), cette inégalité restera vraie aussi pour $|XX_1| > \rho_0$, si l'on choisit suffisamment grand le coefficient constant.

D'une façon tout à fait analogue on étudiera la différence

$$\overset{**}{R} = D_X^{M-1}\left|\overset{*}{J}_\alpha(X, t)\right| - D_X^{M-1}\left|\overset{*}{J}_\alpha(X_1, t)\right| = \int_0^t \iiint_{E(\Pi)} \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta)\,\rho_\beta(\Pi, \zeta)\,d\Pi\,d\zeta$$

et l'on aura une limitation de même forme que (59)

$$(59') \qquad \left|\overset{**}{R}\right| < \text{Cte } t^{-\mu'} \exp[b|XX_0|].|XX_1|^{1-M(1-\mu')}.$$

En rapprochant les résultats (57‴), (58), (59) et (59′), on arrive à l'énoncé du théorème 5. Nous remarquons encore que la propriété (55) est vraie aussi pour la fonction J_α elle-même, si nous posons $m = 0$.

3. Propriétés du potentiel généralisé de charge spatiale.

Théorème 6. — *Si les fonctions* $\rho_\alpha(X, t)$, *définies dans la région* $[X \in E;\ 0 < t \leq T]$ *et intégrables dans tout domaine borné et mesurable dans l'espace* E, *vérifient les inégalités*

$$(60) \qquad |\rho_\alpha(X, t)| < at^{-\mu_1} \exp[b|XX_0|]$$

et une condition de Hölder

$$(60^{I}) \qquad |\rho_\alpha(X, t) - \rho_\alpha(X_1, t)| < \text{Cte } t^{-\mu_1}|XX_1|^{h_\rho}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset E$, *où* a, b, μ_1, h_ρ *sont des constantes positives données* $(0 < \mu_1 < 1,\ 0 < h_\rho \leq 1)$, *alors le système d'intégrales*

$$(60^{II}) \qquad V_\alpha(X, t) = \int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\,\rho_\beta(Y, \tau)\,dY\,d\tau,$$

dit potentiel de charge spatiale de densité $\{\rho_\beta\}$, *vérifie le système suivant d'équations généralisées de Poisson*

$$(60^{III}) \qquad \hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[V_1(X, t), \ldots, V_N(X, t)] = -\rho_\alpha(X, t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N)$$

en tout point intérieur $X \in \Omega$ *pour* $0 < t < T$.

Démonstration. — Le théorème 5 est une extension du théorème donné dans notre travail [3] et nous le démontrerons d'une façon analogue. Nous écrivons notamment les fonctions (6o) sous la forme des sommes

$$(6o^{IV}) \qquad V_\alpha(X,t) = \int_0^t \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau)\,\rho_\beta(Y,\tau)\,dY\,d\tau + \int_0^t \iiint_{E(\Pi)} \sum_{\gamma=1}^{N} W_{\alpha\gamma}^{\Pi,\zeta}(X,t;\Pi,\zeta)\,\bar{\rho}_\gamma(\Pi,\zeta)\,d\Pi\,d\zeta$$

des composants des quasi-potentiels de densité donnée $\{\rho_\beta\}$ et de densité $\{\bar{\rho}_\beta\}$ donnée par les formules

$$(6o^{V}) \qquad \bar{\rho}_\gamma(\Pi,\zeta) = \int_0^\zeta \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} \Phi_{\gamma\beta}(\Pi,\zeta;Y,\tau)\,\rho_\beta(Y,\tau)\,dY\,d\tau.$$

On voit, d'après les limitations (25), (27) et (6o), que les fonctions $(6o^{V})$ sont définies et continues en tout point $(\Pi \in E,\ o < \zeta \leq T)$ et vérifient une inégalité

$$(6o^{VI}) \qquad |\bar{\rho}_\gamma(\Pi,\zeta)| < \text{Cte}\ \zeta^{-(\mu+\mu_1-1)} \exp[b\,|\Pi X_0|],$$

μ étant une constante positive, vérifiant les inégalités $1 - \frac{h_1}{M} < \mu < 1$.

En outre, comme dans notre travail [3], on peut démontrer que les fonctions $(6o^{V})$ vérifient une condition de Hölder de la forme

$$(6o^{VII}) \qquad |\bar{\rho}_\gamma(\Pi,\zeta) - \bar{\rho}_\gamma(\Pi_1,\zeta)| < C_\Omega \zeta^{-(\mu+\mu_1-1)}\,|\Pi\Pi_1|^{0h_1}$$

dans tout domaine borné Ω de l'espace E pour $o < \zeta \leq T$.

En appliquant maintenant aux intégrales $(6o^{IV})$ le théorème 2 qui est aussi vrai pour les densités ρ_γ et $\bar{\rho}_\gamma$ vérifiant les inégalités (6o), $(6o^{I})$, $(6o^{VI})$, $(6o^{VII})$, on conclut que les fonctions $(6o^{II})$ admettent les dérivées spatiales d'ordre M vérifiant le système d'équations $(6o^{III})$ en tout point intérieur $X \in \Omega$, pour $o < t < T$.

THÉORÈME 7. — *Si les fonctions $\rho_\alpha(X,t)$, définies dans la région $[X \in E,\ o < t \leq T]$ sont intégrables dans tout domaine borné et mesurable et vérifient les inégalités* (6o), *alors le potentiel de charge spatiale, déterminé par les formules* $(6o^{II})$, *et ses dérivées d'ordre $m \leq M - 1$ vérifient une condition de Hölder de la forme*

$$(6o^{VIII}) \qquad |D_X^{(m)}[V_\alpha(X,t)] - D_X^{(m)}[V_\alpha(X_1,t_1)]| < \text{Cte}\ t^{-\mu_m} \exp[b\,|XX_0|]\,|XX_1|^{0'_m} + |t-t_1|^{0_m\left(1-\frac{m}{M}\right)} \qquad (o < t < t_1 \leq T),$$

où $0'_m = 1$ si $m = 0, 1, \ldots, (M-2)$; $0'_{M-1} = 0_{M-1}$, 0_m et μ_m sont des constantes positives, inférieures à l'unité, comprises dans les intervalles (55) *ou* (55′) *et liées par les relations* (55″).

Démonstration. — En exprimant les fonctions $(6o^{II})$ sous la forme des

sommes ($6o^{IV}$) des deux quasi-potentiels de charge spatiale, on applique le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 5, d'où résulte l'inégalité ($6o^{VIII}$).

Les propriétés démontrées des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et du potentiel généralisé de charge spatiale nous permettent de résoudre le problème de Cauchy pour le système d'équations (1).

4. Énoncé du problème de Cauchy. — Soit un système quasi-linéaire de $N \geq 1$ équations aux dérivées partielles d'ordre $M \geq 2$ de la forme

$$\hat{\Psi}^{(\alpha)}(u) = F_\alpha[X, t, (u), (D^1 u), (D^2 u), \ldots, (D^{M-1} u)] \qquad (\alpha = 1, \ldots, N) \tag{61}$$

où l'on a désigné par (u) le système de fonctions $u_1(X, t), \ldots, u_N(X, t)$ et par $(D^\beta u)$ une matrice de toutes les dérivées spatiales d'ordre fixé β

$$\frac{\partial^\beta u_j}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \widehat{D^\beta_{(\gamma)}} u_j \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, M-1) \tag{62}$$

qu'on obtient en donnant aux entiers non négatifs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ toutes les valeurs telles qu'on ait $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \beta$ et pour j, les valeurs 1, 2, ..., N.

On a désigné par γ le numéro d'une suite $1, 2, \ldots, n_\beta$ suivant laquelle on a ordonné toutes les combinaisons $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des nombres entiers non négatifs dont la somme est égale à $\beta (n_0 = 1)$.

Désignons par (φ^β) une matrice des éléments réels $\varphi^\beta_{j\gamma}$ à deux indices $j = 1, 2, \ldots, N$; $\gamma = 1, 2, \ldots, n_\beta$, β étant un nombre fixé dans la suite $1, 2, \ldots, M-1$. Désignons ensuite par R_β un ensemble de toutes les matrices (φ^β) aux éléments réels $\varphi^\beta_{j\gamma}$, où β est fixé. R_0 désigne un ensemble de toutes les suites (φ^0) des nombres réels $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$.

Nous supposons que les fonctions réelles

$$F_\alpha[X, t, (\varphi^0), (\varphi^1), (\varphi^2), \ldots, (\varphi^{M-1})] \tag{63}$$

sont définies et continues dans la région

$$\begin{cases} X \in E, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ (\varphi^\beta) \in R_\beta \qquad (\beta = 0, 1, \ldots, M-1). \end{cases} \tag{64}$$

Pour faciliter l'écriture, nous admettons l'identité des symboles

$$\varphi^0_j = \varphi^0_{j_1} \qquad (n_0 = 1).$$

On admet ensuite que les fonctions F_α vérifient l'inégalité

$$|F_\alpha[X, t, (\varphi^0), \ldots, (\varphi^{M-1})]| < m_F \sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ \gamma=1,\ldots,n_\beta}}^{\beta=0,1,\ldots,M-1} |\varphi^\beta_{j\gamma}|^g + m'_F e^{b|XX_0|} \tag{65}$$

et une condition de Hölder

$$(66)\qquad |F_\alpha[X, t, (\varphi^0), \ldots, (\varphi^{M-1})] - F_\alpha[X', t, (\varphi^0)', \ldots, (\varphi^{M-1})']| < k_F \left[\sum_{\substack{\beta=0,1,\ldots,M-1 \\ j=1,\ldots,N \\ \gamma=1,\ldots,n_\beta}} |\varphi^\beta_{j\gamma} - \varphi'^\beta_{j\gamma}|^{h_F} + |XX'|^{h_F} e^{b|XX_0|} \right]$$

$(\varphi^\beta)'$ désigne une matrice des éléments $\varphi'^\beta_{j\gamma}$; m_F, m'_F, k_F, b, h_F, g sont des constantes positives données. On suppose $0 \leq g < 1$. Nous posons le problème de la recherche d'une suite de fonctions

$$u = [u_1(X, t), \ldots, u_N(X, t)]$$

qui vérifient le système (61) en tout point $X \in E$ pour $0 < t < T$ et qui satisfont à la condition initiale

$$(67)\qquad \lim_{t \to 0} u_\alpha(X, t) = f_\alpha(X) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N),$$

où $f_\alpha(X)$ sont des fonctions continues, définies dans tout l'espace E et vérifiant l'inégalité

$$(68)\qquad |f_\alpha(X)| < a\, e^{b|XX_0|},$$

a et b étant deux constantes positives, X_0 un point fixé.

5. Résolution du problème. — Nous allons chercher la solution du problème proposé sous la forme d'un système des sommes ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$)

$$(69)\qquad u_\alpha(X, t) = \iiint_E \sum_{j=1}^N \Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, 0) f_j(Y)\, dY - \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^N \Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau) F_j[Y, \tau, (u), (D_Y^1 u), \ldots, (D_Y^{M-1} u)]\, dY\, d\tau$$

des intégrales de Poisson-Weierstrass généralisées et des composantes d'un potentiel de charge spatiale, relativement au système (1). Pour résoudre le système d'équations intégro-différentielles (69), considérons le système d'équations intégrales suivantes :

$$(70)\qquad \begin{cases} \varphi^0_\alpha(X, t) = \iiint_E \sum_{j=1}^N \Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, 0) f_j(Y)\, dY \\ \qquad - \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^N \Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau) F_j[Y, \tau, (\varphi^0), (\varphi^1), \ldots, (\varphi^{M-1})]\, dY\, d\tau, \\ \varphi^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) = \iiint_E \sum_{j=1}^N D^\beta_{X\,(\gamma)} [\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, 0)] f_j(Y)\, dY \\ \qquad - \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^N D^\beta_{X\,(\gamma)} [\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau)] F_j[Y, \tau, (\varphi^0), (\varphi^1), \ldots, (\varphi^{M-1})]\, dY\, d\tau \end{cases}$$

aux fonctions inconnues $\varphi^0_\alpha(X, t)$, $\varphi^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)$

$(\alpha = 1, \ldots, N; \beta = 1, \ldots, M-1; \gamma = 1, 2, \ldots, n_\beta)$.

Les intégrales, qui figurent dans ces équations, ne sont pas bornées, si $t \to 0$ et si $|XX_0| \to \infty$.

Le système d'équations intégrales (70) n'étant pas résoluble par les méthodes de l'Analyse classique, nous l'étudierons par l'application du théorème topologique de J. Schauder [5] :

Si dans un espace linéaire, normé et complet, une transformation continue transforme un ensemble fermé et convexe en son sous-ensemble compact, alors dans l'ensemble donné existe au moins un point invariant relativement à la transformation.

Considérons donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes de fonctions réelles continues

$$[\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)],$$

où l'on a posé $\varphi^{0}_{\alpha 1} = \varphi^{0}_{\alpha}, n_0 = 1$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$; $\beta = 0, 1, \ldots, M-1$; $\gamma = 1, 2, \ldots, n_\beta$) définies dans la région $[X \in E,\ 0 < t \leq T]$ et vérifiant l'inégalité

$$|\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)| < \frac{\text{Cte} \exp[b' |XX_0|]}{t^{\mu+h}} \qquad (b' > b); \tag{71}$$

b étant une constante positive figurant dans la supposition (68), μ étant une constante positive, fixée arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $(1 - M^{-1}, 1)$, h et b' sont des constantes positives fixées arbitrairement de façon qu'on ait

$$\mu + h < 1; \qquad (\mu + h) g \leq \mu; \qquad b < b' < \frac{b}{g} \tag{72}$$

où le nombre positif $g < 1$ figure dans les conditions (65).

On a l'identité

$$\varphi^{0}_{\alpha\gamma} = \varphi^{0}_{\alpha} \qquad (n_0 = 1).$$

Les constantes positives b', μ, h ont des valeurs fixées pour tout l'espace Λ, mais la constante du numérateur dans l'inégalité (71) admet toutes les valeurs positives.

Nous définirons pour l'espace Λ d'une façon connue les opérations linéaires

$$\begin{cases} [\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)] + [\overset{*}{\varphi}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)] = [\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma} + \overset{*}{\varphi}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}], \\ \lambda[\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)] = [\lambda \varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]. \end{cases} \tag{73}$$

Ensuite, nous allons définir la norme d'un élément $[\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]$ par la formule

$$\|[\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}]\| = \max_{\alpha, \beta, \gamma} \sup_{\substack{X \in E \\ t \in (0, T)}} |t^{\mu+h} e^{-b' |XX_0|} \varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)|. \tag{74}$$

La distance des deux pionts $V = [\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}]$ et $V^* = [\overset{*}{\varphi}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}]$ est définie par la formule

$$\delta(V, V^*) = \|[\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}] - [\overset{*}{\varphi}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}]\|. \tag{75}$$

L'espace Λ est linéaire et normé; en outre, on peut montrer qu'il est complet, c'est-à-dire que la condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite arbitraire de points de l'espace Λ au sens de la norme (74).

Soit donc une suite de points $V_m = \left[{}^{(m)}_{\alpha\gamma}(X, t) \right]$ de l'espace Λ vérifiant la condition de Cauchy au sens de la norme (74)

$$\| V_m - V_{m'} \| < \varepsilon, \qquad \text{si} \quad m, m' > M(\varepsilon). \tag{76}$$

Soient les fonctions

$$ {}^{(m)}_{\alpha\beta\gamma}(X, t) = e^{-b' |XX_0|} t^{\mu+h} {}^{(m)}_{\alpha\gamma}(X, t), \tag{77}$$

α, β, γ étant fixés. En tenant compte de l'inégalité (76) et de la formule (74), nous aurons

$$\sup \left| {}^{(m)}_{\alpha\beta\gamma}(X, t) - {}^{(m')}_{\alpha\beta\gamma}(X, t) \right| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad m, m' > M(\varepsilon),$$

par conséquent la suite de fonctions ${}^{(m)}_{\alpha\beta\gamma}(X, t)$ converge uniformément au sens habituel vers une fonction continue et bornée $\varphi_{\alpha\beta\gamma}(X, t)$ dans la région $[X \in E, t \in (0, T)]$.

Alors le point

$$V = [t^{-\mu-h} e^{b' |XX_0|} \varphi_{\alpha\beta\gamma}(X, t)]$$

de l'espace Λ est un point limite de la suite donnée.

L'espace Λ est donc un espace de Banach.

Soit maintenant dans l'espace Λ l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ de tous les points $V = [v^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)]$ vérifiant une inégalité

$$\| V \| \leq \rho, \tag{78}$$

ρ étant un nombre positif fixé arbitrairement. L'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ est évidemment convexe et fermé.

En tenant compte des équations (70), transformons l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ par les relations

$$\left\{ \begin{aligned} w^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) &= \iiint_E \sum_{j=1}^{N} D^\beta_{X\,(\gamma)} [\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, 0)] f_j(Y)\, dY \\ &\quad - \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} D^\beta_{X\,(\gamma)} [\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau)] F_j[Y, \tau, (v^0), (v^1), \ldots, (v^{M-1})]\, dY\, d\tau \\ &(\alpha = 1, \ldots, N; \beta = 0, 1, \ldots, M-1; \gamma = 1, \ldots, n_\beta), \qquad \text{où} \quad D^0_{(\gamma)} [\Gamma_{\alpha j}] = \Gamma_{\alpha j}. \end{aligned} \right. \tag{79}$$

Montrons que les intégrales (79) ont un sens et cherchons leurs limitations. La première, I_1, des intégrales (79) a un sens, d'après le théorème 3. Sa limitation est la suivante [*voir* (56)] :

$$|I_1(X, t)| < P t^{\mu} \exp[b |XX_0|] \qquad \left(1 - \frac{1}{M} < \mu < 1\right), \tag{80}$$

où P est une constante positive.

Pour étudier la seconde, I_2, des intégrales (79), remarquons que, d'après la définition (74) de la norme et l'inégalité (78), les fonctions $\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)$, liées avec l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$, vérifient les inégalités

$$t^{\mu+h}\, e^{-b'|XX_0|}\,\big|\,\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)\,\big| \leq \rho. \tag{81}$$

Donc, d'après l'inégalité admise (65), les fonctions F_j sous les signes des secondes intégrales (79) vérifient les inégalités

$$\begin{aligned} &|\,F_j[Y, \tau, (\varphi^0), (\varphi^1), \ldots, (\varphi^{M-1})]\,| \\ &\quad < m_F Q N \rho^g \tau^{-(\mu+h)g}\, e^{b'g|YX_0|} + m'_F\, e^{b|YX_0|} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned} \tag{82}$$

où l'on a posé

$$Q = \sum_{\beta=0}^{M-1} n_\beta. \tag{83}$$

Il en résulte, d'après le lemme établi précédemment, que la seconde, I_2, des intégrales (79) a un sens et est absolument convergente. Pour trouver sa limitation, nous nous appuierons sur les inégalités (16), (17), (82) et nous aurons ($b < k$)

$$\begin{aligned} |\,I_2(X, t)\,| &< NC \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{(\mu+h)g}\,(t-\tau)^{\mu}} \\ &\quad \times \iiint_{K_{\zeta_0}} \frac{[\,m_F NQ \rho^g\, e^{b'g|YX_0|} + m'_F T^{(\mu+h)g}\, e^{b|YX_0|}\,]}{|\,XY\,|^{\beta+n-M\mu}}\, dY \\ &\quad + C'NQ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\mu_1}\, d\tau}{\tau^{(\mu+h)g}} \\ &\quad \times \iiint_{E-K\rho_0} \frac{[\,m_F NQ \rho^g\, e^{b'g|YX_0|} + m'_F T^{(\mu+h)g}\, e^{b|YX_0|}\,]\, e^{-k|XY|}}{|\,XY\,|^{n+M\mu_1}}\, dY. \end{aligned} \tag{84}$$

En réunissant les résultats (80) et (84), nous concluons que les fonctions (79) vérifient une inégalité de la forme

$$|\,w^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)\,| < t^{-\mu} \exp[\,b\,|XX_0|\,]\,.\,[P_1 m_F \rho^g + P_2 m'_F + P_3], \tag{85}$$

P_1, P_2 et P_3 étant des constantes positives déterminées, indépendantes des fonctions F_ν. Il en résulte, d'après l'inégalité (71) définissant l'espace Λ, que les relations (79) font correspondre à tout point $V = [\varphi^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ un point $V' = [w^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de l'espace Λ. En tenant compte de la définition (74) de la norme, nous pouvons affirmer que l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ des points transformés V' fera partie de l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$, si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\sup\{\, t^{h} \exp[-(b'-b)\,|XX_0|\,]\,.\,[P_1 m_F \rho^g + P_2 m'_F + P_3]\,\} \leq \rho,$$

donc, si les constantes du problème vérifient la condition

$$T^h (P_1 m_F \rho^g + P_2 m'_F + P_3) \leq \rho. \tag{86}$$

Or, le choix de la constante ρ étant arbitraire et g ayant une valeur inférieure

à l'unité, nous pouvons toujours fixer la constante ρ suffisamment grande pour que l'inégalité (86) soit vérifiée, si grandes que soient les constantes du problème T, P_1, m_F, P_2, m'_F, P_3. Avant d'appliquer le théorème de Schauder, nous démontrerons encore les deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *La transformation de l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$, définie par les relations* (79), *est continue dans l'espace* Λ,

Démonstration. — Soit une suite arbitraire de points $V_m = [{}^{(m)}\varphi_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de l'espace Λ convergeant vers un point $V = [\varphi^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de cet espace, au sens de la norme (74), c'est-à-dire que l'on a

$$(87)\qquad \max_{\alpha,\beta,\gamma}\sup_{\substack{X\in E\\ t\in(0,T)}}\left\{t^{\mu+h}\,e^{-b'|XX_0|}\left|{}^{(m)}\varphi^\beta_{\alpha\gamma}(X,t)-\varphi^\beta_{\alpha\gamma}(X,t)\right|\right\}\to 0$$

si $m\to\infty$. Pour démontrer le lemme, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la suite $\{V'_m\}$ de points $V'_m = |{}^{(m)}w^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)|$, transformés par les relations (79), converge vers un point limite $V' = [w^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de l'espace E, qui correspond au point limite V par les mêmes relations (79). Considérons donc la différence

$$(88)\qquad {}^{(m)}w^\beta_{\alpha\gamma}(X,t)-w^\beta_{\alpha\gamma}(X,t)$$
$$=-\int_0^t\iiint_E\sum_{j=1}^{N}D^{(\beta)}_{(\gamma)X}[\Gamma_{\alpha j}(X,t;Y,\tau)]\{F_j[Y,\tau,({}^{(m)}\varphi^0),({}^{(m)}\varphi^1),\ldots,({}^{(m)}\varphi^{M-1})]$$
$$-F_j[Y,\tau,(\varphi^0),(\varphi^1),\ldots,(\varphi^{M-1})]\}\,dY\,d\tau.$$

D'après les inégalités (16), (17) et (66), nous pouvons écrire

$$(89)\qquad \left|{}^{(m)}w^\beta_{\alpha\gamma}(X,t)-w^\beta_{\alpha\gamma}(X,t)\right|$$
$$<\mathrm{Cte}\,t^{-(\mu+h)h_F}\,e^{b'h_F|XX_0|}\max_{\alpha,\beta,\gamma}\sup_{\substack{Y\in E\\ \tau\in(0,T)}}\left\{\tau^{\mu+h}\,e^{-b'|YX_0|}\left|{}^{(m)}\varphi^\beta_{\alpha\gamma}(Y,\tau)-\varphi^\beta_{\alpha\gamma}(Y,\tau)\right|\right\}^{h_F}$$
$$\times\left[\iiint_{K_X}\frac{dY}{|XY|^{n-1+M(1-\mu)}}+\iiint_{E-K_X}e^{-(k-b'h_F)|XY|}\,dY\right]\qquad (k>b'h_F).$$

La somme des intégrales entre les crochets est bornée pour $X\in E$, donc, d'après la supposition (87), nous concluons que

$$\|V_m-V'\|=\max_{\alpha,\beta,\gamma}\sup_{\substack{X\in E\\ t\in(0,T)}}\left\{t^{\mu+h}\,e^{-b'|XX_0|}\left|{}^{(m)}w^\beta_{\alpha\gamma}(X,t)-w^\beta_{\alpha\gamma}(X,t)\right|\right\}\to 0$$

si $m\to\infty$. Le lemme 1 est, par conséquent, démontré.

LEMME 2. — *L'ensemble $\mathcal{E}'_\rho$, transformé de l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ par les relations* (79), *est compact.*

Démonstration. — Conformément à la définition, l'ensemble $\mathcal{E}'_\rho$ est compact, si de toute suite $\{V'_m\}$ de ses points on peut extraire une suite partielle $\{V'_{k_m}\}$ convergente au sens de la norme (73).

Soit donc une suite arbitraire de points $V'_m = \left[{}^{(m)}_{\gamma\alpha}W^{\beta}(X, t) \right]$ de l'ensemble $\mathfrak{E}'_\rho$. Tous ces points vérifient l'inégalité (85), donc pour tout nombre positif ε, nous pouvons construire une sphère S_ε de centre X_0 et de rayon R_ε suffisamment grand, pour qu'on ait

$$t^{\mu+h} e^{-b'|XX_0|} \left| {}^{(m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{90}$$

si $X \in E - S_\varepsilon$, $t \in (0, T)$, m quelconque. Ensuite, au nombre ε faisons correspondre un nombre positif t_ε pour qu'on ait

$$t^{\mu+h} e^{-b'|XX_0|} \left| {}^{(m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{91}$$

si $X \in E$, $0 < t \leq t_\varepsilon$.

La sphère S_ε et l'intervalle $(0, t_\varepsilon)$ étant fixés, nous démontrerons que toutes les fonctions ${}^{(m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t)$ sont également continues et également bornées dans la région

$$[X \in S_\varepsilon ; t_\varepsilon \leq t \leq T] = \Omega_\varepsilon. \tag{92}$$

En effet, d'après la limitation (85), les fonctions ${}^{(m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t)$ sont également bornées dans la région (92). Ensuite, d'après les théorèmes 5 et 7, elles vérifient dans la région Ω_ε une inégalité de Hölder

$$\left| {}^{(m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) - {}^{(m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X_1, t_1) \right| < k_{\Omega_\varepsilon} \left[|XX_1|^{\theta} + |t - t_1|^{\frac{\theta'}{M}} \right], \tag{93}$$

avec un coefficient k_{Ω_ε} commun pour toutes les fonctions, où θ et θ' sont les deux constantes positives, inférieures à l'unité. Les fonctions ${}^{(m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t)$ (m arbitraire) sont donc également continues, par conséquent, d'après un théorème connu d'Arzelà, on peut, de la suite de fonctions $\left\{ {}^{(m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) \right\}$, extraire une suite partielle $\left\{ {}^{(k_m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) \right\}$ convergente uniformément au sens habituel dans la région Ω_ε. Nous pouvons donc au nombre ε faire correspondre un nombre N_ε tel, qu'on ait dans la région Ω_ε

$$T^{\mu+h} \left| {}^{(k_m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) - {}^{(k_s)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) \right| < \varepsilon$$

si $m, s > N_\varepsilon$. En somme, nous aurons, d'après (90) et (91),

$$t^{\mu+h} e^{-b'|XX_0|} \left| {}^{(k_m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) - {}^{(k_s)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) \right| \leq \varepsilon$$

si $X \in E$, $0 < t \leq T$, $m, s > N_\varepsilon$, ce qui confirme la convergence de la suite partielle de points $V'_{k_m} = \left[{}^{(k_m)}_{\alpha\gamma}W^{\beta}(X, t) \right]$ au sens de la norme (73) dans l'espace Λ. Le lemme 2 est donc démontré.

En s'appuyant sur les résultats précédents et sur le théorème cité de Schauder, nous en concluons l'existence dans l'ensemble $\mathfrak{E}_\rho$ au moins d'un point $\overset{*}{V} = \left[\overset{*}{\varphi}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t) \right]$ *invariant* relativement à la transformation (79). Il existe

donc au moins un système de fonctions $\overset{*}{c}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)$ vérifiant le système d'équations intégrales (70) en tout point X de l'espace E pour $0 < t < T$. D'après les propriétés des intégrales dans les expressions (70), étudiées dans notre travail [2], nous avons

$$\overset{*}{p}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t) = \underset{(\gamma)}{D^{\beta}_{X}}\left[\overset{*}{p}{}^{0}_{\alpha}(X, t)\right] \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, M^{-1})$$

en tout point $X \in E$ pour $0 < t < T$. Les fonctions trouvées

$$\overset{*}{p}{}^{0}_{1}(X, t), \quad \overset{*}{p}{}^{0}_{2}(X, t), \quad \ldots, \quad \overset{*}{p}{}^{0}_{N}(X, t) \tag{94}$$

forment donc une solution du système d'équations intégro-différentielles (69).

Remarquons maintenant que les fonctions $\overset{*}{c}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)$, d'après les relations (70) et les propriétés des intégrales analogues au potentiel, exprimées dans les théorèmes 5 et 7, vérifient une condition de Hölder de la forme

$$|\overset{*}{p}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t) - \overset{*}{p}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X_1, t)| < \frac{\text{Cte } e^{b|XX_0|}}{t^{\mu}} |XX_1|^{\theta} \qquad \theta = 1 - M(1 - \mu).$$

Il en résulte, remarque faite des suppositions (66), que les fonctions

$$\Phi_j(Y, \tau) = F_j\left[Y, \tau, (\overset{*}{p}{}^{0}), (\overset{*}{p}{}^{1}), \ldots, (\overset{*}{p}{}^{M-1})\right]$$

vérifient une condition de Hölder de la forme

$$|\Phi_j(Y, \tau) - \Phi_j(Y_1, \tau)| < \frac{\text{Cte } \exp[b|YX_0|]}{\tau^{\mu/h_E}} |YY_1|^{\theta/h_E}.$$

Par conséquent, en s'appuyant sur le théorème 6, nous pouvons affirmer que les fonctions

$$\overset{*}{c}{}^{0}_{1}(X, t), \quad \ldots, \quad \overset{*}{c}{}^{0}_{N}(X, t), \tag{95}$$

vérifiant le système d'équations intégro-différentielles (69), vérifient le système parabolique donné (61) en tout point X de l'espace E, pour $0 < t < T$.

Enfin nous démontrerons que les fonctions (95) vérifient la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} \overset{*}{c}{}^{\alpha}_{0}(X, t) = f_{\alpha}(X) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N). \tag{96}$$

En effet, la première des intégrales (69) a pour limite $f_{\alpha}(X)$, si $t \to 0$. Quant à la seconde, que nous désignerons par I, elle vérifie, d'après les limitations (16), (17), (82) une inégalité de la forme

$$|I| < \text{Cte} \int_0^t \frac{d\tau}{(t - \tau)^{\mu'} \tau^{(\mu + h)g}}.$$

Or, $\mu + h$ étant fixé, on peut toujours choisir la constante μ' suffisamment petite pour qu'on ait

$$\mu' + (\mu + h)g - 1 < 0,$$

par conséquent l'intégrale I tend vers zéro avec t et la propriété (96) est vérifiée. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Si les fonctions* $F_\alpha[X, t, (\varphi^0), (\varphi^1), \ldots, (\varphi^{M-1})]$, *définies et continues dans la région* (64), *vérifient les conditions* (65) *et* (66); *si, en outre, les fonctions* $f_\alpha(X)$, *définies et continues dans l'espace* E, *vérifient la condition* (68), *alors il existe toujours* (*si grandes que soient les constantes du problème*) *au moins un système de fonctions*

$$u_1(X, t), \quad \ldots, \quad u_N(X, t)$$

qui vérifie le système parabolique donné (61) *en tout point* X *de l'espace* E, *pour* $0 < t < T$, *et la condition initiale*

$$\lim_{t \to 0} u_\alpha(X, t) = f_\alpha(X).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. PETROVSKY, *Ueber das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen* (*Bull. Univ. Moscou*, fasc. 7, 1938).

[2] W. POGORZELSKI, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles* (*Ric. Matem.*, Napoli, t. 7, 1958).

[3] W. POGORZELSKI, *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles* (*Math. Scand.*, 1959).

[4] S. EIDELMANN, *Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques* (en russe) (*Matem. Sbornik*, t. 38, 1956).

[5] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen* (*Studia Mathematica*, 1930).

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE FONCTION

PAR LES

VALEURS PRISES SUR UN CERTAIN ENSEMBLE

PAR MM. NICU BOBOC et SOLOMON MARCUS

L'étude des fonctions analytiques suggère le problème de déterminer, pour diverses classes de fonctions, l'ensemble minimum de points où il faut connaître une fonction de la classe pour qu'elle soit connue dans l'intervalle de définition.

Sauf mention contraire, toutes les fonctions considérées dans la suite seront des fonctions réelles définies sur l'intervalle $(0, 1)$.

Un ensemble $E \subset (0, 1)$ sera un *ensemble déterminant* pour une certaine classe $\mathcal{C}$ de fonctions si, pour $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$, on a $f \equiv g$ dès que $f = g$ sur E.

Quelques exemples :

a. $\mathcal{C} =$ la classe des fonctions continues. Les ensembles déterminants sont les ensembles partout denses sur $(0, 1)$.

b. $\mathcal{C} =$ la classe des fonctions intégrables au sens de Riemann. Le seul ensemble déterminant est l'intervalle $(0, 1)$.

c. $\mathcal{C} =$ la classe des fonctions dérivées intégrables au sens de Riemann. Les ensembles déterminants sont les ensembles partout denses. C'est une conséquence du théorème 7 de [5].

d. $\mathcal{C} =$ la classe des fonctions approximativement continues, intégrables au sens de Riemann. Les ensembles déterminants sont les ensembles partout denses. C'est une conséquence du théorème 8 de [5].

Un ensemble $E \subset (0, 1)$ sera un *ensemble stationnaire* pour $\mathcal{C}$ si, pour $f \in \mathcal{C}$, f est constante dès que la restriction de f sur E est constante.

Il est aisé de voir que, pour une classe $\mathcal{C}$ qui contient toutes les fonctions constantes, chaque ensemble déterminant est un ensemble stationnaire.

Une classe $\mathcal{C}$ de fonctions sera *invariante par soustraction* si de $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$, il s'ensuit $f - g \in \mathcal{C}$. Il est aisé de voir que pour une telle classe chaque ensemble stationnaire est un ensemble déterminant.

Toutes les classes envisagées dans les exemples a, b, c, d contiennent les constantes et sont invariantes par soustraction. Il s'ensuit que les ensembles stationnaires correspondants sont les mêmes que les ensembles déterminants de ces classes.

Envisageons maintenant la classe des fonctions dérivées bornées. Cette classe contient les constantes et est invariante par soustraction. Les ensembles stationnaires sont les mêmes que les ensembles déterminants.

On va utiliser dans la suite la notion suivante, due à Z. Zahorski ([10], p. 3) : Un ensemble X du type F_σ satisfait à la condition M_4 s'il existe une suite d'ensembles fermés $\{F_n\}$ et une suite de nombres $\{\eta_n\}$, $0 < \eta_n < 1$, telles que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ et que, pour chaque $x \in F_n$ et tout $c > 0$ il existe un nombre $\varepsilon(x, c) > 0$ jouissant de la propriété suivante : pour tous les h et h_1 tels que $hh_1 > 0$, $\frac{h}{h_1} < c$, $|h + h_1| < \varepsilon(x, c)$, on a

$$\frac{\operatorname{mes}\{E \cap [x + h, x + h + h_1]\}}{|h_1|} > \eta_n.$$

L'ensemble vide satisfait, par définition, à la condition M_4.

Théorème 1. — *Pour que* $E \subset (0, 1)$ *soit un ensemble déterminant pour les fonctions dérivées bornées, il faut et il suffit que le complémentaire de* E *par rapport à* $(0, 1)$ *soit de mesure intérieure nulle au sens de Lebesgue.*

Démonstration. — La condition est nécessaire. Supposons que E soit un ensemble déterminant pour les fonctions dérivées bornées et admettons, par réduction à l'absurde, que le complémentaire de E ne soit pas de mesure intérieure nulle. Il existe alors un ensemble A mesurable, de mesure positive, contenu dans $(0, 1)$ et tel que $A \cap E = 0$. Désignons par B l'ensemble des points de A qui sont des points de densité pour A. On sait, d'après un théorème classique de Lebesgue, que $A - B$ est de mesure nulle, donc B est encore de mesure positive. B contient un ensemble R du type F_σ et tel que $B - R$ soit de mesure nulle. De ce que chaque point de B est un point de densité pour A il s'ensuit que chaque point de B est un point de densité pour B. On déduit que chaque point de R est un point de densité pour B et, puisque $B - R$ est de mesure nulle, chaque point de R est un point de densité pour R. Pour résumer, R est un ensemble non vide, du type F_σ, contenu dans le complémentaire de E et tel que chaque point de R est un point de densité pour R. C'est ce que Z. Zahorski appelle « ensemble qui satisfait à la condition M_3 » ([10], p. 3). Mais Z. Zahorski a montré que chaque ensemble satisfaisant à la condition M_3 satisfait aussi à la condition M_4 ([10], p. 3). Z. Zahorski a démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit l'ensemble des zéros d'une dérivée bornée est que le complémentaire de cet ensemble

satisfasse à la condition M_1([10], p. 43). Il existe donc une fonction dérivée bornée dont l'ensemble des zéros est $P=(0, 1)-R$. En tenant compte que $E \subset P$, on déduit que E n'est pas un ensemble déterminant pour les fonctions dérivées bornées, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La condition est suffisante. Supposons que le complémentaire de E soit de mesure intérieure nulle et admettons, par réduction à l'absurde, que E n'est pas un ensemble déterminant pour les fonctions dérivées. Il existe donc une fonction dérivée φ non constante et telle que E soit contenu dans l'ensemble L des zéros de φ. Puisque φ est une dérivée, elle est une fonction mesurable, donc L est un ensemble mesurable. En tenant compte que, par hypothèse, la mesure extérieure de E est égale à 1 et puisque $E \subset L$, on déduit que le complémentaire de L est de mesure nulle. De ce que φ n'est pas constante on déduit l'existence d'un $x_0 \in (0, 1)$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Mais, d'après un théorème de Denjoy, pour chaque fonction dérivée f, un ensemble de la forme $\{x; \alpha < f(x) < \beta\}$ est vide ou de mesure positive [3]. Admettons, pour faire un choix, que $\varphi(x_0) > 0$. Il s'ensuit que l'ensemble $\{x; \varphi(x) > 0, 0 < x < 1\}$ est de mesure positive. Mais, d'autre part, cet ensemble étant contenu dans le complémentaire de L, doit être de mesure nulle. La contradiction obtenue montre que l'hypothèse que E n'est pas un ensemble déterminant est fausse.

Remarque. — La condition que les dérivées soient bornées a été utilisée seulement dans la démonstration de la nécessité de la condition.

Considérons maintenant la classe des fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Le seul ensemble déterminant pour ces fonctions est l'intervalle (0, 1). En effet, on sait qu'il existe une fonction qui prend sur chaque intervalle contenu dans (0, 1) toute valeur réelle (*voir*, par exemple, [1]). En modifiant, en un seul point, la valeur d'une telle fonction on obtient une fonction qui jouit encore de la propriété de Darboux.

Les fonctions jouissant de la propriété de Darboux ne forment pas une classe invariante par soustraction. En effet, on sait d'après un théorème de Sierpinski, que la somme (donc la différence aussi) de deux fonctions jouissant de la propriété de Darboux peut fournir une fonction donnée d'avance [8]. Il est donc possible que la famille des ensembles stationnaires contienne aussi d'autres exemplaires que l'intervalle (0, 1). Nous nous proposons de les trouver. Il faut d'abord rappeler une définition et donner un lemme.

Un ensemble linéaire E est *homogène de puissance du continu* si pour chaque $x \in E$ et pour chaque intervalle ouvert I contenant x l'ensemble $E \cap I$ est de cardinal $2^{\aleph_0}$ [2].

LEMME 1. — *Si* H *est un ensemble réel homogène de puissance du continu, alors* H *est une réunion de puissance du continu d'ensembles disjoints, dont chacun est partout dense par rapport à* H.

Démonstration. — H admet une partie H_1 dénombrable et partout dense sur H. $H - H_1$ est encore homogène de puissance du continu, donc il contient une partie H_2 dénombrable et partout dense par rapport à $H - H_1$. Mais, toujours en vertu de l'homogénéité de puissance du continu de l'ensemble H, $H - H_1$ est partout dense par rapport à H, donc H_2 est aussi partout dense par rapport à H. En continuant ainsi, tant qu'il est possible, on obtient une suite d'ensembles

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots, \quad H_\alpha, \quad \ldots \tag{1}$$

dénombrables, disjoints deux à deux, dont chacun est partout dense par rapport à H et telle que

$$H = \bigcup_\alpha H_\alpha. \tag{2}$$

Le type ordinal de cette suite ne peut être de cardinal inférieur au continu, car en vertu du théorème de König de la théorie des ensembles (*voir*, par exemple, [9]) et du fait que chaque H_α est dénombrable, H serait de puissance inférieure à la puissance du continu, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc la décomposition obtenue pour H est justement celle cherchée.

THÉORÈME 2. — *Pour que* $E \subset (0, 1)$ *soit un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux, il faut et il suffit que* E *rencontre tout ensemble homogène de puissance du continu et contenu dans* $(0, 1)$.

Démonstration. — La condition est nécessaire. Supposons que E soit un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux et admettons, par réduction à l'absurde, qu'il ne rencontre pas tout ensemble homogène de puissance du continu, donc que le complémentaire de E contienne un ensemble H homogène de puissance du continu. On a, pour H, la décomposition (2).

Il y a seulement un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles H_α qui contiennent des extrémités des intervalles contigus avec H. Il y a donc une infinité de puissance du continu d'ensembles H_α qui ne contiennent aucune extrémité des intervalles contigus avec H. Rangeons ces ensembles H_α, dont la réunion sera désignée par H^*, dans une nouvelle suite transfinie :

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots, \quad H_\beta, \ldots.$$

Rangeons tous les nombres réels dans une suite transfinie

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_\beta, \quad \ldots$$

du même type ordinal que la suite des H_β contenus dans H^*.

Définissons une fonction φ, de la manière suivante

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin H^* \\ \xi_\beta & \text{si} \quad x \in H_\beta. \end{cases}$$

La fonction φ jouit de la propriété de Darboux. En effet, sur chaque intervalle contigu avec H^*, φ est constante, tandis que, sur chaque intervalle contenant à l'intérieur des points de H^*, φ prend chaque valeur réelle ξ_β, car un tel intervalle est rencontré, à la suite de la densité des ensembles H_α par rapport à H, par chaque ensemble H_α. Mais E est contenu dans le complémentaire de H^*; il s'ensuit que la restriction de φ sur E est constante, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que E est un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux.

La condition est suffisante. Supposons que E rencontre tout ensemble homogène de puissance du continu, contenu dans (0, 1) et admettons, par réduction à l'absurde, que E ne soit pas un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Montrons, dans ce cas, qu'il existe un ensemble homogène disjoint avec E, ce qui sera en contradiction avec l'hypothèse.

Si E n'est pas partout dense sur (0, 1), alors il existe un intervalle ouvert G, contenu dans (0, 1) et disjoint de E. Un tel intervalle est un ensemble homogène de puissance du continu et le théorème est démontré. Nous pourrons donc admettre, dans ce qui suit, que E est un ensemble partout dense sur (0, 1),

Du fait que E n'est pas un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux il s'ensuit l'existence d'une fonction f non constante, jouissant de la propriété de Darboux sur (0, 1) et l'existence d'une constante k telles que, pour $x \in E$, on ait $f(x) = k$. Posons

$$A = \{ x ; f(x) \neq k \}.$$

L'ensemble A est non vide et disjoint de E. Le théorème sera démontré dès que nous aurons établi que A est un ensemble homogène de puissance du continu.

Soit $x \in A$. Admettons, pour faire un choix, que $f(x) < k$. Soit un intervalle I contenant le point x. Puisque E est partout dense sur (0, 1), il existe un point $y \in I$ tel que $f(y) = k$. Soit maintenant ξ tel que $f(x) < \xi < k$. En vertu de la propriété de Darboux de f, il existe un point z compris entre x et y, donc appartenant à I, tel que $f(z) = \xi$. On a $z \in A$. Puisque les valeurs comprises entre $f(x)$ et k forment un ensemble de puissance du continu et en tenant compte que chacune de ces valeurs est prise par f au moins une fois sur l'intervalle I, il s'ensuit que $A \cap I$ a la puissance du continu. En tenant compte que x est un point arbitraire de A et I est un intervalle arbitraire contenant le point x, on déduit que A est un ensemble homogène de puissance du continu.

Remarque. — Tout ensemble parfait est un ensemble homogène ayant la puissance du continu. Mais il existe un ensemble homogène de puissance du continu que ne contient aucun ensemble parfait. En effet, la droite réelle

est une réunion de puissance du continu d'ensembles disjoints, superposables deux à deux par translation et dont chacun rencontre tout ensemble parfait (*voir*, par exemple, [4]). Un ensemble quelconque de cette décomposition ne contient aucun ensemble parfait. Rangeons les ensembles de la décomposition dans une suite transfinie

$$E_1, \quad E_2, \ldots, \quad E_\alpha, \quad \ldots$$

et rangeons les nombres réels dans une suite du même type ordinal

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_\alpha, \quad \ldots$$

Définissons une fonction ψ de la manière suivante :

$$\psi(x) = \xi_\alpha \qquad \text{si} \quad x \in E_\alpha.$$

Cette fonction jouit de la propriété de Darboux et est constante sur E_α sans l'être sur toute la droite. Donc, en vertu du théorème 2, l'ensemble $(-\infty, \infty) - E_\alpha$ contient un ensemble homogène de puissance du continu. D'autre part, puisque E_α rencontre tout ensemble parfait, $(-\infty, \infty) - E_\alpha$ ne contient aucun ensemble parfait.

Afin d'obtenir une caractérisation plus simple des ensembles stationnaires pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux, il faut d'abord examiner la structure des ensembles homogènes de puissance du continu.

LEMME 2. — *Un ensemble réel* A *contient un ensemble homogène de puissance du continu si et seulement si la puissance de* A *est égale à la puissance du continu.*

Démonstration. — Considérons l'ensemble B des points x de A tels qu'il existe un intervalle ouvert I_x jouissant de la propriété suivante : l'ensemble $A \cap I_x$ est de puissance inférieure à celle du continu. Faisons usage du théorème de recouvrement de Lindelöf; on peut choisir un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles $I^1_{x_1}, I^2_{x_2}, \ldots, I^n_{x_n}, \ldots$, tels que chaque point de B appartienne à un certain $I^n_{x_n}$. Mais, comme l'ensemble $B \cap I^n_{x_n}$ est, pour chaque n entier positif, de puissance inférieure à celle du continu et comme, d'autre part, en vertu du théorème de König déjà cité, une réunion dénombrable d'ensembles de puissance inférieure à celle du continu est aussi de puissance inférieure à celle du continu, on déduit que B est de puissance inférieure à celle du continu.

Supposons maintenant que A a la puissance du continu. L'ensemble $A - B$ n'est donc pas vide. Mais de la définition même de l'ensemble B on déduit que, pour chaque $x \in A - B$ et pour chaque intervalle I contenant x, l'ensemble $A \cap I$ a la puissance du continu. Mais alors l'ensemble $(A - B) \cap I = (A \cap I) - B$ a aussi la puissance du continu. On a prouvé ainsi que $A - B$ est un ensemble homogène de puissance du continu.

Réciproquement, si A contient un ensemble homogène de puissance du continu, alors A a aussi la puissance du continu et le lemme 2 est démontré.

Du lemme 2 on tire, en tenant compte du théorème 2, le

THÉORÈME 3. — *Un ensemble* $E \subset (0, 1)$ *est un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux si et seulement si le complémentaire de* E *par rapport à* $(0, 1)$ *est de puissance inférieure à celle du continu.*

COROLLAIRE. — *Si l'hypothèse du continu est vraie, alors un ensemble* $E \subset (0, 1)$ *est un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux si et seulement si le complémentaire de* E *par rapport à* $(0, 1)$ *est un ensemble dénombrable.*

Afin d'obtenir une troisième caractérisation des ensembles stationnaires pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux nous avons besoin du

LEMME 3. — *Si l'ensemble réel* H *est une réunion de puissance du continu d'ensembles disjoints dont chacune est partout dense par rapport à* H, *alors* H *est un ensemble homogène de puissance du continu.*

Démonstration. — Soit $x \in H$ et soit I un intervalle contenant x. Désignons par $H = \bigcup_\alpha H_\alpha$ une décomposition de H du type envisagé dans l'énoncé. En vertu de la densité de chaque H_α par rapport à H on déduit que l'ensemble $H_\alpha \cap I$ n'est vide pour aucun α. Mais les ensembles H_α sont disjoints; il s'ensuit donc que l'ensemble $\bigcup_\alpha (H_\alpha \cap I)$ a la puissance du continu. Comme on a

$$H \cap I = \bigcup_\alpha (H_\alpha \cap I),$$

on déduit que $H \cap I$ a la puissance du continu. Remarquons enfin que x est un point arbitraire de H et I est un intervalle arbitraire contenant x. H est donc homogène de puissance du continu.

Posons la définition suivante : un ensemble X est *décomposable* s'il est une réunion de puissance du continu d'ensembles disjoints dont chacun est partout dense par rapport à X.

Des lemmes 1 et 3 et en faisant usage du théorème 2 on déduit le

THÉORÈME 4. — *Un ensemble* $E \subset (0, 1)$ *est un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux si et seulement si le complémentaire de* E *par rapport à* $(0, 1)$ *ne contient aucun ensemble décomposable.*

Remarques finales. — Les théorèmes 1 et 3 montrent en quelle mesure le « degré d'analyticité » des fonctions dérivées bornées est plus élevé que celui des fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Pour savoir si deux

dérivées bornées sur (0, 1) coïncident, il suffit de savoir qu'elles coïncident sur un ensemble de mesure extérieure égale à 1. C'est assez peu, si nous pensons que le complémentaire d'un tel ensemble peut être aussi de mesure extérieure égale à 1. Mais deux fonctions jouissant de la propriété de Darboux peuvent ne pas coïncider même lorsque leurs valeurs sont les mêmes sur le complémentaire d'un ensemble formé d'un seul point.

Pour déduire qu'une dérivée bornée, constante sur l'ensemble E, est constante sur (0, 1), il suffit que la mesure extérieure de E soit égale à 1. Mais si, au lieu de la dérivée bornée, on considère une fonction jouissant de la propriété de Darboux, alors le complémentaire de E doit être de puissance inférieure à celle du continu et c'est bien plus restrictif.

Ainsi, on peut dire que la différence entre les ensembles de mesure intérieure nulle et ceux de puissance inférieure à celle du continu marque, en quelque sorte, la différence entre les fonctions dérivées bornées et les fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Entre ces deux classes de fonctions il y a « un monde entier » même si l'on considère seulement les fonctions jouissant de la propriété de Darboux qui sont de la première classe de Baire. L'étude des ensembles déterminants et des ensembles stationnaires pour les classes de fonctions intermédiaires, plus larges que la classe des dérivées bornées mais plus restreintes que la classe des fonctions jouissant de la propriété de Darboux, s'impose donc de la façon la plus naturelle.

Il faut aussi remarquer la nature diverse des ensembles stationnaires. Pour les fonctions continues ces ensembles sont caractérisés par leur densité; pour les dérivées bornées, par leur mesure; pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux, par leur puissance.

Enfin nous signalons deux résultats publiés ailleurs par l'un de nous, résultats concernant les ensembles déterminants ([6], [7]).

Considérons la classe $\mathcal{C}$ des fonctions réelles, de variable réelle, définies par les trois propriétés suivantes :

1° Si $f \in \mathcal{C}$, alors f n'est pas monotone sur $(-\infty, \infty)$;
2° Si $f \in \mathcal{C}$, alors f jouit de la propriété de Darboux;
3° Si $f \in \mathcal{C}$, alors, pour $x < y$, on a

$$\min[f(x), f(y)] < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max[f(x), f(y)]$$

ou

$$f(x) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(y).$$

Dans [6] on montre que chaque intervalle est un ensemble déterminant pour la classe $\mathcal{C}$. Il faut remarquer que $\mathcal{C}$ contient aussi d'autres fonctions que les solutions discontinues de l'équation fonctionnelle de Cauchy. (Cette chose est montrée aussi dans [6].) On a cherché, d'habitude, des classes de fonctions

admettant les intervalles comme ensembles déterminants seulement parmi les fonctions continues (telles sont les fonctions quasi analytiques au sens de S. Bernstein et les fonctions quasi analytiques au sens de Borel-Denjoy-Carleman). Or, dans [6] on montre que la classe $\mathcal{C}$ envisagée ci-dessus est formée seulement de fonctions non mesurables et dépourvues de la propriété de Baire.

Un autre résultat : Pour que l'ensemble $E \subset R^n$ soit un ensemble déterminant pour les fonctions réelles définies dans R^n et continues, dans R^n, par rapport à chaque variable prise à part, il faut et il suffit que E soit partout dense dans R^n[7].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Boboc, *Un exemple d'une fonction continue « à la Darboux », partout discontinue* (en roumain) (*Com. Acad. R. P. R.*, t. 4, nos 5-6, 1954, p. 199-200).

[2] G. Cantor, *Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punctmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume* G_n (*Acta mathematica*, t. 7, 1885, p. 105-124).

[3] A. Denjoy, *Sur une propriété des fonctions dérivées* (*Enseignement Mathématique*, t. 18, 1916, p. 320-328).

[4] P. Erdös et S. Marcus, *Sur la décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes* (*Acta Mathematica, Academiæ Scientiarum Hungaricæ*, t. 8, nos 3-4, 1957, p. 443-452).

[5] S. Marcus, *Remarques sur les fonctions intégrables au sens de Riemann* (*Bull. Math. Soc. Math. et Phys. R. P. R.*, t. 2, 1958 (sous presse).

[6] S. Marcus, *Sur une classe de fonctions, définies par des inégalités, introduite par M. Á. Császár* (*Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, t. 19, nos 3-4, 1958, p. 209).

[7] S. Marcus, *Sur les fonctions continues par rapport à chaque variable prise à part* (en russe) (*Dokl Akad. Nauk U. R. S. S.*, t. 112, no 5, 1957, p. 812-814).

[8] W. Sierpinski, *Sur une propriété des fonctions réelles quelconques* (*Le Matematiche*, Catania, t. 8, no 2, 1953, p. 43-48).

[9] W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis*, Gauthier-Villars, Paris, 1950, p. 131.

[10] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 69, 1950, p. 1-54).

CENTRE D'ÉTUDES MATHÉMATIQUES EN VUE DES APPLICATIONS

(Institut Henri POINCARÉ)

I. - MONOGRAPHIES

A. Applications des théories Mathématiques :

FORTET (R.). — *Éléments de calcul des Probabilités*..... 1 200 F

PETIAU (G.). — *La théorie des Fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la Physique mathématique* (relié plein pellior rouge)..... 2 500 F

DUMAS (M.). — *Les Épreuves sur échantillon* (relié plein pellior rouge)..... 1 000 F

C. Physique Mathématique :

DESTOUCHES (J.-L.). — *Principes de la Mécanique classique*..... 350 F

VOGEL (Th.). — *Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la Physique Mathématique*..... 1 200 F

II. - LE FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES A L'USAGE DES PHYSICIENS ET DES INGÉNIEURS

rédigé par les membres du Centre d'Études Mathématiques en vue des applications

(*Sous la direction de* M. le Professeur FRÉCHET)

Fascicule VII. — *Équations aux dérivées partielles*..... 800 F

Fascicule IX. — *Fonctions de la Physique mathématique*..... 800 F

Fascicule XII. *Calcul des probabilités*..... 600 F

Le Formulaire de Mathématiques comprendra 13 fascicules.

III. - COLLOQUES INTERNATIONAUX

Derniers parus :

LXIII. *Les botanistes français en Amérique du Nord avant* 1850 ..... 2 400 F

LXIX. *Chimie et Biochimie des Hétérocycles oxygénés*..... 2 500 F

LXVII. *Microphysiologie comparée des éléments excitables*..... 2 500 F

NOTA : *Le Catalogue général* — dont ce qui précède est un extrait — est envoyé sur demande.

Renseignements et Vente au

SERVICE DES PUBLICATIONS DU *C. N. R. S.*

(3e Bureau)

13, Quai Anatole-France - PARIS (VIIe) — C. C. P. Paris 9061-11 — Téléphone : INV 45-95

SOMMAIRE

FASCICULE N° 2

Pages

Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach, par M. *Y. Katznelson*..... 8

Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique, par *W. Pogorzelski*..... 12

Sur la détermination d'une fonction par les valeurs prises sur un certain ensemble, par MM. *Nicu Boboc* et *Solomon Marcus*..... 15

TARIF D'ABONNEMENT D'UN AN POUR 1959

AUX

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Paris	5 000 F
Départements et Union Française	5 500 F
Étranger	$ 22,62

(ou valeur correspondante en francs)

GAUTHIER-VILLARS, Éditeur-Imprimeur-Libraire, 55, q. des Grands-Augustins, PARIS (6e)

LECLERCQ (René), Ingénieur Civil, Directeur de Recherches à l'Union Chimique Belge. — **La Création Scientifique Complément au Guide théorique et pratique de la recherche expérimentale.** In-8 (16-25) VII-86 pages, 1959..... 950 F

LEFEBVRE (Éloi), Docteur ès sciences, Docteur ès lettres. — **Structure et objet de l'analyse mathématique.** In-8 (16-25), 284 pages; 1958..... 3 500 F

ROBIN (Louis), Ingénieur en Chef des Télécommunications. — **Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales** (Collection Technique et Scientifique du C. N. E. T.). In-8 (16-25) :

Tome I. — Préface de M. H. VILLAT : XXXV-202 pages; 1957. Broché... 4 000 F. Cartonné... 4 300 F

Tome II. — VIII-384 pages, 34 figures; 1958. Broché..... 5 000 F. Cartonné..... 5 300 F

Tome III. — VIII-289 pages, 10 figures; 1959. Broché..... 5 500 F. Cartonné..... 6 000 F

La reproduction par tous procédés est interdite.

L'Imprimerie Gauthier-Villars se réserve le droit de fournir les microfilms des volumes épuisés.

155168-59 Dépôt légal. — 1959. — Numéro d'ordre 1343. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Dépôt légal. — 1959. — Numéro d'ordre 831. — *Gauthier-Villars*, éditeur, Paris.

Imprimé en France

La Gérante : P. GAUTHIER-VILLAR

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SEIZIEME — ANNÉE 1959

FASCICULE N° 3

(JUILLET A SEPTEMBRE)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

(Ce recueil paraît tous les trois mois.)

ÉDITIONS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

I. — *PUBLICATIONS PÉRIODIQUES*

LE BULLETIN SIGNALÉTIQUE

ABONNEMENT ANNUEL
(Y compris la table des auteurs)

	France.	Étranger.
PREMIÈRE PARTIE. — *Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences de l'Ingénieur*..	10 000 F	12 000 F
DEUXIÈME PARTIE. — *Biologie, Physiologie, Zoologie, Agriculture*.....	10 000 F	12 000 F

Des Tirés à part sont également mis en vente par abonnement.

Pour tous renseignements s'adresser au
CENTRE DE DOCUMENTATION du C. N. R. S.
16, rue Pierre-Curie, PARIS-V^e^ — Tél. : DANton 87-20
C. C. P. Paris 9131-62

II. — *OUVRAGES*

ALLOITEAU (J.). — *Contribution à la systématique des Madréporaires Fossiles.*

Ouvrage relié au format 21-27, comprenant :

un volume de textes de 464 pages..... 4 500 F
— de planches de 107 pages..... 4 700 F

LEXIQUE STRATIGRAPHIQUE INTERNATIONAL réalisé en 7 volumes et plus de 125 fascicules.
Demander les renseignements spéciaux aux Éditions du C. N. R. S., 13, quai A.-France, Paris-7^e^

NAHMIAS. — *Le neutrino*..... 240 F

GRIVET. — *La résonance paramagnétique nucléaire* ..... 1 800 F

TERROINE. — *La Synthèse protéique*..... 3 200 F

ROSE & TREGOUBOFF. — *Manuel de Planctonologie méditerranéenne.*

Ouvrage format 21-27 relié, comprenant :

un volume de textes de 592 pages.....
— d'illustrations de 225 pages..... } 7 500 F

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 76, 1959, p. 161 à 183.

SUR LES

ANNEAUX PREMIERS NŒTHÉRIENS A GAUCHE

Par MM. L. LESIEUR et R. CROISOT.

Introduction. — Rappelons qu'un *anneau premier* est un anneau A dans lequel la condition $aAb = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$. On sait que cette propriété est équivalente au fait que le produit de deux idéaux bilatères non nuls soit un idéal bilatère non nul ou encore au fait que le produit de deux idéaux à gauche non nuls soit un idéal à gauche non nul (*cf.* N. H. McCoy [11]). La notion d'*anneau d'intégrité*, c'est-à-dire d'anneau sans diviseurs de zéro (anneau tel que la condition $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$) est un cas particulier de celle d'anneau premier. Les deux notions coïncident dans le cas commutatif. Nous considérons naturellement le cas où l'anneau n'est pas nécessairement commutatif.

Un anneau A est dit *nœthérien à gauche* si l'ensemble de ses idéaux à gauche vérifie la condition maximale. Il est dit *artinien à gauche* si cet ensemble vérifie la condition minimale. On sait qu'un anneau avec élément unité qui est artinien à gauche est nœthérien à gauche (*cf.* N. Bourbaki [1], p. 72). C'est pourquoi nous examinons d'abord ce cas (§ 1). Le paragraphe 2 est consacré au cas d'un anneau d'intégrité et les paragraphes suivants concernent le cas d'un anneau nœthérien à gauche quelconque. Nous mettons en évidence certains idéaux à gauche que nous appelons *idéaux à gauche fermés* (*cf.* § 3). Un idéal à gauche fermé F est caractérisé par l'une ou l'autre des trois propriétés suivantes qui sont équivalentes dans un anneau premier nœthérien à gauche :

1° $\forall b \notin F, \exists x \in (b|$ avec $x \neq 0$ tel que $F \cap (x| = 0$;

2° F est un idéal à gauche maximal parmi ceux qui vérifient la relation $F \cap X = 0$, où X est un idéal à gauche fixé;

3° $ab \in F$, $b \notin F \Rightarrow a$ est diviseur de zéro à droite.

Les idéaux annulateurs à gauche sont des idéaux à gauche fermés particuliers. Nous montrons que l'ensemble de tous les idéaux à gauche fermés constitue un treillis géométrique de longueur finie qui permet l'étude des décompositions

de l'idéal o comme intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles (*cf.* § 4).

Dans un Mémoire récent, A. W. Goldie (*cf.* [7]) a étudié les anneaux premiers nœthériens à gauche et à droite. Pour cela, il a considéré les conditions suivantes :

($1l$) Chaque somme directe d'idéaux à gauche de A possède un nombre fini de composantes;

($2l$) L'ensemble des idéaux annulateurs à gauche vérifie la condition maximale

et les conditions symétriques ($1r$) et ($2r$). Afin de rattacher plus étroitement nos résultats à ceux de A. W. Goldie, nous faisons également usage de ces conditions. Les conditions ($1l$) et ($2l$) sont évidemment vérifiées dans un anneau nœthérien à gauche (1) ainsi que dans un anneau régulier à gauche (*cf.* P. Dubreil [4], p. 280).

Après avoir étudié quelques propriétés supplémentaires des idéaux à gauche fermés (*cf.* § 5), nous montrons que tout anneau premier satisfaisant aux conditions ($1l$) et ($2l$), en particulier *tout anneau premier* A *nœthérien à gauche est immersible dans un anneau de matrices à coefficients dans un corps* (non nécessairement commutatif), lequel anneau est l'*enveloppe injective* de A considéré comme A-module à gauche (*cf.* B. Eckmann et A. Schopf [6]) et est défini à un isomorphisme près relativement à A (*cf.* § 6).

1. Anneaux premiers artiniens a gauche avec élément unité. — La structure d'un anneau premier artinien à gauche avec élément unité est bien connue (*cf.* N. Jacobson [7], p, 39) : il est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps K, c'est-à-dire *isomorphe à l'anneau* $M_n(K)$ *des matrices carrées d'ordre n à éléments dans* K. Cet anneau est donc *simple*, en ce sens qu'il n'admet pas d'autres idéaux bilatères que o et A. Donnons quelques propriétés des idéaux à gauche d'un tel anneau qui seront susceptibles de nous éclairer dans le cas nœthérien.

Propriété 1. — *Tout idéal à gauche d'un anneau premier artinien à gauche avec élément unité est* o*-premier à droite* (2).

D'après la définition donnée par L. Lesieur et R. Croisot [10], p. 97, l'idéal

(1) Par contre, il existe des anneaux premiers non nœthériens à gauche vérifiant ces conditions, par exemple l'anneau commutatif $K[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ des polynomes à coefficients dans un corps K et à une infinité dénombrable de variables permutables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

(2) Les idéaux à gauche o-premiers à droite sont des cas particuliers d'idéaux primaires associés à l'idéal premier o, donc *a fortiori* des cas particuliers d'idéaux tertiaires (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [10]). La décomposition de l'idéal o comme intersection d'idéaux tertiaires, qui n'a qu'une seule composante, est insuffisante pour l'étude que nous faisons ici.

à gauche X est o-premier à droite si l'on a

$$a\mathrm{A}b\subseteq \mathrm{X},\ b\notin \mathrm{X}\Rightarrow a=0.$$

Supposons $a\neq 0$; l'anneau A étant simple, l'idéal bilatère (a) engendré par a est l'idéal impropre A. Il existe donc des éléments b_i et c_i tels qu'on ait, 1 désignant l'élément unité de A,

$$1=\sum_{i=1}^{i=k} b_i a c_i, \qquad \text{d'où} \qquad b=\sum_{i=1}^{i=k} b_i a c_i b\in \mathrm{X},$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Nous avons même pour tout idéal à gauche X une propriété plus forte :

Propriété 2. — *Pour tout* $b\notin \mathrm{X}$, *il existe* $v\in \mathrm{A}$ *tel que* $\mathrm{X}\cap \mathrm{A}vb=0$ *avec* $vb\neq 0$. D'après la propriété 1, on a $0=\mathrm{X}^{\cdot}.\mathrm{A}b$, d'où

$$0=\bigcap_{ab\notin \mathrm{X}} \mathrm{X}^{\cdot}.ab.$$

En vertu de la condition minimale, il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n (n\geq 1)$ tels que

$$0=\bigcap_{i=1}^{i=n} (\mathrm{X}^{\cdot}.a_i b).$$

On peut supposer cette décomposition de 0 sans idéaux à gauche superflus, et écrire en particulier

$$0=(\mathrm{X}^{\cdot}.a_1 b)\cap \mathrm{Y}, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Y}\neq 0 \quad \text{(dans le cas } n=1\text{, on prend } \mathrm{Y}=\mathrm{A}).$$

On en déduit

$$0=\mathrm{X}\cap \mathrm{Y}a_1 b,$$

avec $\mathrm{Y}a_1 b\neq 0$ car $\mathrm{Y}a_1 b=0$ entraînerait $\mathrm{Y}a_1 b\subseteq \mathrm{X}$, $\mathrm{Y}\subseteq \mathrm{X}^{\cdot}.a_1 b$ et $\mathrm{Y}=0$. En prenant $v=ya_1$ avec $ya_1 b\neq 0$, on satisfait à la propriété 2.

Enfin, la structure d'un anneau premier artinien à gauche avec élément unité A, rappelée plus haut, permet de donner celle de l'ensemble des idéaux à gauche de A :

Propriété 3. — *Les idéaux à gauche de* A *constituent un treillis modulaire complémenté irréductible de longueur finie* n (isomorphe au treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension n sur un corps K).

En particulier, les *idéaux* $\cap$*-irréductibles de* A *sont les idéaux maximaux; l'idéal* 0 *est l'intersection de* n *idéaux maximaux; il est* $\cap$*-irréductible si et seulement si* $n=1$, *c'est-à-dire lorsque* A *est un corps* (commutatif ou non).

2. Anneaux d'intégrité nœthériens a gauche. — Dans toute la suite, nous ne

supposons pas que les anneaux considérés possèdent un élément unité. Dans ce paragraphe 2, nous considérons un anneau A sans diviseurs de zéro auquel nous imposons la condition

(1 l) *Chaque somme directe d'idéaux à gauche* A *possède un nombre fini de composantes.*

Théorème 1. — *Dans un anneau d'intégrité* A *vérifiant la condition* (1 l), *en particulier dans un anneau d'intégrité nœthérien à gauche, l'idéal* 0 *est* $\cap$*-irréductible à gauche et* A *admet un corps des quotients à gauche* (3).

Supposons, en effet, qu'on ait $X \cap Y = 0$, avec des idéaux à gauche X et Y distincts de 0. On peut donc trouver $x \in X$ avec $x \neq 0$ et $y \in Y$ avec $y \neq 0$ tels que $(x| \cap (y| = 0$, où $(x|$ par exemple désigne l'idéal à gauche engendré par x.

Considérons les idéaux

$$I_n = (xy| + (xy^2| + \ldots + (xy^n|.$$

En vertu de la condition (1 l), il existe un entier n, qu'on peut supposer minimum, et des éléments $x' \in (x|$, $x'_1 \in (x|$, $x'_2 \in (x|$, $\ldots$, $x'_n \in (x|$ tels que

$$x'y^{n+1} = x'_1 y + x'_2 y + \ldots + x'_n y \neq 0,$$

d'où

$$(x'y^n - x'_2 y - \ldots - x'_n y^{n-1} - x'_1)\, y = 0. \tag{1}$$

L'élément $u = x'y^n - x'_2 y - \ldots - x'_n y^{n-1} - x'_1$ est non nul, car $u = 0$ entraînerait

$$x'_1 = x'y^n - x'_2 y - \ldots - x'_n y^{n-1} \in (x| \cap (y| = 0.$$

D'où

$$x'y^n = x'_2 y + \ldots + x'_n y^{n-1} \neq 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse de minimalité faite sur n. On déduit donc de (1) $y = 0$ puisque A est sans diviseurs de zéro, d'où une contradiction.

Le fait que 0 soit $\cap$-irréductible à gauche peut également s'exprimer par l'existence, pour tout couple (x, y) avec $x \neq 0$, $y \neq 0$, de a et b tels que $ax = by \neq 0$; il en résulte qu'un anneau d'intégrité nœthérien à gauche est régulier à gauche, donc qu'il admet un corps de quotients à gauche, c'est-à-dire que A peut être plongé dans un corps K, tout élément de K se mettant sous la forme $b^{-1}a$ avec $b \in A$, $a \in A$ (*cf.* P. Dubreil [4], p. 280).

La démonstration précédente donne en même temps la propriété suivante :

Propriété 4. — A *étant un anneau vérifiant la condition* (1 l), *la relation*

$$(x| \cap (y| = 0$$

exige que x *et* y *soient des diviseurs de zéro à droite.*

(3) Cette propriété est démontrée par A. W. Goldie (*cf.* [7]) d'une manière un peu différente. On adapte facilement le théorème 1 pour établir qu'un semi-groupe nœthérien à gauche admet un groupe des quotients à gauche.

Exemple. — Soit K un corps commutatif. Considérons l'anneau des polynomes $K[x, y]$ à deux variables non permutables x et y et à coefficients dans K, avec la relation

$$xy - yx = x.$$

Ces polynomes forment un anneau d'intégrité nœthérien à gauche (et à droite) qui admet par suite un corps des quotients à gauche (et à droite).

Plus généralement, si L est une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps K, son algèbre enveloppante universelle A(L) est un anneau d'intégrité nœthérien à gauche (et à droite) qui admet par conséquent un corps des quotients à gauche (et à droite) (cf. *Théorie des algèbres de Lie* [3], p. 1-08).

3. Cas général : Anneaux premiers nœthériens a gauche quelconques. Étude des idéaux a gauche fermés. — Abordons maintenant le cas d'un anneau premier nœthérien à gauche le plus général. Nous nous proposons de rechercher des idéaux à gauche particuliers de A qui vont jouer le rôle que jouaient dans le cas artinien tous les idéaux à gauche. Ils doivent en particulier comprendre les composantes d'une décomposition de o comme intersection d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles; ils doivent former un treillis de longueur finie modulaire et complémenté, donc vérifier aussi la condition minimale. Ce rôle ne peut être tenu par les idéaux o-premiers à droite (*cf.* propriété 1), bien qu'une composante $\cap$-irréductible de o soit nécessairement un idéal o-premier à droite. En effet, dans l'exemple déjà cité de l'anneau des polynomes $K[x, y]$ avec $xy - yx = x$, les idéaux Ay^n sont tous o-premiers à droite et forment une chaîne descendante infinie, cependant que l'idéal o est $\cap$-irréductible. En fait, les idéaux intéressants dans cette théorie sont ceux qui vérifient la propriété 2, auxquels nous allons donner le nom d'idéaux fermés.

Définition. — On dit que l'idéal à gauche X est *fermé* lorsqu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall b \notin X, \quad \exists x \in (b| \quad \text{avec} \quad x \neq o \quad \text{tel que} \quad X \cap (x| = o.$$

Propriété 5. — *Tout idéal à gauche fermé* X *d'un anneau premier* A *est* o*-premier à droite* (2).

Supposons $aAb \subseteq X$ et $b \notin X$. Il existe donc $x \in (b|$ avec $x \neq o$ tel que $X \cap (x| = o$. On a donc $aAx = o$ d'où, A étant premier, $a = o$ puisque $x \neq o$.

Propriété 6. — *Toute intersection d'idéaux à gauche fermés est un idéal à gauche fermé.*

Soit $I = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ une intersection d'idéaux à gauche fermés X_α. Prenons $b \notin I$, il existe donc un indice α tel que $b \notin X_\alpha$. On en déduit $X_\alpha \cap (x| = o$ pour un

élément $x \in (b|$ avec $x \neq o$, d'où $I \cap (x| = o$. Par suite, l'idéal à gauche I est fermé.

Rappelons qu'on appelle *annulateur à gauche* d'un ensemble $S \subseteq A$ l'idéal à gauche formé par les éléments x tels que $xS = o$. Nous noterons cet idéal à gauche $o^{\cdot}.S$. Remarquons que $o^{\cdot}.S$ est égal à $\bigcap_{s \in S} (o^{\cdot}.s.)$

Nous allons faire usage de la condition

(2 *l*) *L'ensemble des idéaux annulateurs à gauche vérifie la condition maximale* que nous supposons réalisée dans toute la suite de ce paragraphe.

Propriété 7. — *L'annulateur à gauche d'un ensemble quelconque* S *est un idéal à gauche fermé.*

D'après la propriété 6 et la remarque précédente, il suffit de le démontrer pour un annulateur de la forme $o^{\cdot}.s$, où $s \in A$. Nous utiliserons pour cela le lemme fondamental suivant :

Lemme. — *Étant donné* $b \neq o$, *il existe un idéal à gauche* $C \neq o$ *tel que*

$$(o^{\cdot}.b) \cap C = o.$$

Considérons en effet un annulateur à gauche maximal de la forme $o^{\cdot}.a$, avec $a \neq o$. A étant premier, il existe un élément t tel que $atb \neq o$. Or on a

$$o^{\cdot}.a \subseteq o^{\cdot}.atb.$$

Il en résulte $o^{\cdot}.a = o^{\cdot}.atb$. Par suite, la relation $xatb = o$ entraîne $xa = o$. On ne peut avoir $Aat = o$ puisque A est un anneau premier et que $atb \neq o$ implique $at \neq o$. On peut donc choisir $a' \in A$ tel que $a'at \neq o$ et prendre $C = (a'at|$. On a bien, alors, en effet, $C \neq o$ et $(o^{\cdot}.b) \cap C = o$.

Appliquons le lemme à la démonstration de la propriété 6. Soit $b \notin o^{\cdot}.s$; on a donc $bs \neq o$ et il existe un idéal à gauche $C \neq o$ tel que $(o^{\cdot}.bs) \cap C = o$. Cet idéal C vérifie $Cbs \neq o$ car $Cbs = o$ entraînerait $C \subseteq o^{\cdot}.bs$ et $C = o$. Prenons $c \in C$ avec $cbs \neq o$ et soit $x \in (o^{\cdot}.s) \cap (cb|$. On a $x = c'b$ avec $c' \in (c|$, d'où $c' \in (o^{\cdot}.bs) \cap C = o$ et par suite $x = o$ et $(o^{\cdot}.s) \cap (cb| = o$. L'idéal $o^{\cdot}.s$ est bien fermé car de $cbs \neq o$ résulte $cb \neq o$.

Définition. — X étant un idéal à gauche quelconque, on appelle *fermeture* $\overline{X}$ de X le plus petit idéal à gauche fermé contenant X.

L'idéal à gauche $\overline{X}$ est l'intersection de tous les idéaux à gauche fermés contenant X (remarquons que A lui-même est un idéal à gauche fermé contenant X).

Propriété 8. — *La fermeture d'un idéal à gauche* X *est l'ensemble* $\overline{X}$ *des éléments* x *tels que*

$$x' \in (x| \quad \text{avec} \quad x' \neq o \Rightarrow X \cap (x'| \neq o.$$

L'ensemble $\overline{X}$ contient X. Il est permis pour la multiplication à gauche.

Montrons qu'il est stable pour la soustraction. Soit $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{X}$ et $z' \in (x-y|$ avec $z' \neq o$. D'après le lemme, il existe un idéal $C \neq o$ tel que $(o \cdot .z') \cap C = o$. Il en résulte $Cz' \neq o$. Donc il existe $c \in C$ tel que $cz' \neq o$. On a $z' = x' - y'$ avec $x' \in (x|$ et $y' \in (y|$ et $cx' \neq o$ ou $cy' \neq o$. Supposons $cx' \neq o$. Comme $x \in \overline{X}$, on peut trouver $x'' \in (cx'| \cap X$ avec $x'' \neq o$; x'' s'écrit $c_1 x'$ avec $c_1 \in (c|$. Si $c_1 y' = o$, on a $o \neq c_1(x' - y') \in X$. Si $c_1 y' \neq o$, il existe $c_2 \in (c_1|$ avec $c_2 y' \in X$ et $c_2 y' \neq o$, en vertu de $y \in \overline{X}$. On en déduit $c_2(x' - y') \in X$ avec $c_2(x' - y') \neq o$, car $c_2(x' - y') = o$ entraînerait $c_2 \in (o \cdot .x' - y') \cap C = o$, ce qui est impossible puisque $c_2 y' \neq o$. On a donc $X \cap (x' - y'| \neq o$ et par suite $x - y \in \overline{X}$.

Montrons que $\overline{X}$ *est fermé.* Sinon, il existerait $x \notin \overline{X}$ avec $X \cap (x'| \neq o$ pour tout $x' \in (x|$ avec $x' \neq o$, ce qui signifie $x \in \overline{X}$.

Enfin $\overline{X}$ *est contenu dans tout idéal à gauche fermé* F *contenant* X. Sinon il existerait $x \in \overline{X}$ avec $x \notin F$. Puisque F est fermé, cela implique l'existence de $x' \in (x|$ avec $x' \neq o$ et $F \cap (x'| = o$ d'où $X \cap (x'| = o$ ce qui contredit $x \in \overline{X}$.

Remarque. — D'après B. Eckmann et A. Schopf (*cf.* [6], p. 77), X étant un idéal à gauche d'un anneau A, on appelle *extension essentielle* de X dans A un idéal à gauche I qui contient X et qui vérifie la condition

$$X \cap Y = o, \qquad Y \subseteq I \Rightarrow Y = o$$

dans laquelle Y désigne un idéal à gauche.

La propriété 8 montre que, pour tout idéal à gauche X, sa fermeture $\overline{X}$ est *extension essentielle maximum de* X dans A. D'abord $\overline{X}$ est extension essentielle de X car la condition

$$X \cap Y = o, \qquad Y \subseteq \overline{X} \Rightarrow Y = o$$

est vérifiée. En effet, si l'on avait $y \in Y$ avec $y \neq o$, on aurait $y \in \overline{X}$ d'où $X \cap (y| \neq o$, ce qui contredirait $X \cap Y = o$. De plus, $\overline{X}$ est extension essentielle maximum de X car, pour toute extension essentielle I de X, on a $I \subseteq \overline{X}$. En effet, soit $u \in I$; pour tout $u' \in (u|$ avec $u' \neq o$, on a $X \cap (u'| \neq o$, ce qui établit $u \in \overline{X}$, d'où $I \subseteq \overline{X}$.

L'application $X \to \overline{X}$ d'un idéal à gauche quelconque dans sa fermeture est une application de fermeture et l'ensemble des idéaux fermés ordonné par inclusion constitue un treillis complet T (*Théorie des treillis* [5], p. 36) avec élément nul o et élément universel A.

La propriété 8 va nous permettre de démontrer que ce treillis est modulaire.

PROPRIÉTÉ 9. — *Le treillis* T *des idéaux à gauche fermés est modulaire.*

Désignons par $B \vee C$ le plus petit idéal à gauche fermé contenant les idéaux

à gauche fermés B et C. On a

$$B \vee C = \overline{B + C}.$$

La modularité du treillis T s'exprime donc par la relation

$$X \supseteq B \Rightarrow X \cap \overline{(B + C)} = \overline{B + (X \cap C)},$$

les idéaux X, B et C étant supposés fermés. Il suffit de démontrer l'inclusion $X \cap \overline{(B + C)} \subseteq \overline{B + (X \cap C)}$. Soit donc $x \in X$, $x \in B + C$. Pour tout $x' \neq 0$ avec $x' \in (x|$, on a $(B + C) \cap (x'| \neq 0$. Il existe par suite $x'' \in B + C$ avec $x'' \in (x'|$ et $x'' \neq 0$. On en déduit $x'' = b + c$ avec $b \in B$, $c \in C$, d'où $c = x'' - b \in X$ et $c \in X \cap C$, Donc

$$x'' \in B + (X \cap C), \quad \text{d'où} \quad [B + (X \cap C)] \cap (x'| \neq 0 \quad \text{et} \quad x \in \overline{B + (X \cap C)}.$$

Propriété 10. — *Soient deux idéaux à gauche* X *et* Y *tels qu'on ait* $X \cap Y = 0$. *On a aussi* $\overline{X} \cap Y = 0$. *Pour tout idéal à gauche* F *fermé et distinct de* A, *il existe un idéal à gauche fermé* $Z \neq 0$ *tel qu'on ait* $F \cap Z = 0$.

Supposons, en effet, qu'on ait $\overline{X} \cap Y \neq 0$ et soit $x \in X \cap Y$ avec $x \neq 0$. D'après la propriété 8, on a $X \cap (x| \neq 0$, ce qui contredit $X \cap Y = 0$. Soit alors F un idéal à gauche fermé distinct de A. Puisqu'on a $F \neq A$, il existe $x \in A$ avec $x \notin F$, F étant fermé, on peut trouver un élément $x' \in (x|$ avec $x' \neq 0$ tel que $F \cap (x'| = 0$. On a alors $F \cap Z = 0$ avec $Z = (x'| \neq 0$.

Pour continuer, nous avons besoin de la condition maximale dans le treillis T. Elle n'est pas assurée par la condition (2 *l*) seulement comme le montre l'exemple de l'anneau des polynomes à deux variables non permutables à coefficients dans un corps. Mais elle est assurée par la condition (1 *l*) d'après la propriété suivante.

Propriété 11. — *Si l'anneau premier* A *vérifie la condition* (1 *l*), *le treillis* T *des idéaux à gauche fermés vérifie la condition maximale.*

En effet, supposons qu'il existe une chaîne strictement croissante infinie d'idéaux à gauche fermés de A, soit $F_1 < F_2 < \ldots < F_n < \ldots$. Choisissons, pour tout $i \geq 2$, $x_i \in F_i$ avec $x_i \notin F_{i-1}$. Puisque l'idéal à gauche F_{i-1} est fermé, il existe $y_i \in (x_i|$ avec $y_i \neq 0$ et $F_{i-1} \cap (y_i| = 0$; on a $F_{i-1} + (y_i| \subseteq F_i$. La somme $F_1 + (y_2| + \ldots + (y_n| + \ldots$ est alors une somme directe ayant une infinité de composantes, ce qui contredit la condition (1 *l*).

Remarque. — Réciproquement, si l'anneau premier A vérifie la condition (2 *l*) et la condition maximale sur les idéaux à gauche fermés, il vérifie la condition (1 *l*).

En effet, si l'on a une somme directe ayant une infinité de composantes

$$(x_1| + (x_2| + \ldots + (x_n| + \ldots,$$

en posant $I_n = \overline{(x_1|+(x_2|+\ldots+(x_n|}$, on a $x_{n+1} \notin I_n$ d'après la propriété 8, d'où résulte

$$I_1 \quad I_2 \quad \ldots \quad I_n \quad \ldots .$$

Théorème 2. — *Si l'anneau premier* A *vérifie les conditions* $(1\,l)$ *et* $(2\,l)$, *en particulier s'il est nœthérien à gauche, le treillis* T *de ses idéaux à gauche fermés est un treillis modulaire complémenté de longueur finie.*

En effet, soit $X \in T$; montrons que X admet un complément. Soit $X' \in T$ un idéal à gauche fermé maximal parmi ceux qui vérifient $X \cap X' = 0$. Supposons $X \vee X' \neq A$. D'après la propriété 10, il existerait $Y \in T$ tel que $Y \neq 0$ et $(X \vee X') \cap Y = 0$. On en déduirait

$$(X \vee X') \cap (X' \vee Y) = X' + [(X \vee X') \cap Y] = X';$$

d'où, en prenant l'intersection avec X, $X \cap (X' \vee Y) = 0$. Or, on a $X' \vee Y \supset X'$. Ceci contredit le fait que X' est maximal. On a donc bien $X \cap X' = 0$ et $X \vee X' = A$.

Le treillis T étant modulaire, complémenté, et vérifiant la condition de chaîne ascendante, est alors un treillis de longueur finie (propriété duale du théorème 4 de [5], *Théorie des treillis*, p. 257).

4. Applications :

Théorème 3. — *Si* A *est un anneau premier vérifiant les conditions* $(1\,l)$ *et* $(2\,l)$, *en particulier si* A *est un anneau nœthérien à gauche, pour que l'idéal* 0 *soit* $\cap$-*irréductible à gauche, il faut et il suffit que* A *soit un anneau d'intégrité.*

La condition est suffisante d'après le théorème 1. Elle est nécessaire car, de $ab = 0$ avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, on déduirait $0 \cdot b \neq 0$ d'où résulterait, d'après le lemme, l'existence de $C \neq 0$ avec $(0 \cdot b) \cap C = 0$ contrairement à l'irréductibilité de 0.

On sait que les applications $X \to 0 \cdot X$, $Y \to 0 \cdot Y$ définissent une application biunivoque de l'ensemble des idéaux annulateurs à droite d'un anneau A sur l'ensemble des idéaux annulateurs à gauche de A et son application réciproque. Cette application est anti-isotone, le treillis des idéaux annulateurs à droite est dual du treillis des idéaux annulateurs à gauche. Par suite, la condition minimale sur l'un de ces treillis est équivalente à la condition maximale sur l'autre. Il en résulte la propriété suivante :

Propriété 12. — *Si un anneau premier* A *vérifie les conditions* $(1\,l)$ *et* $(2\,l)$, *il vérifie la condition* $(2\,r)$. *De plus, tout annulateur à gauche (ou à droite) est intersection finie d'annulateurs à gauche (ou à droite) d'éléments de* A.

En effet, le treillis des idéaux à gauche fermés de A est alors de longueur finie. Il vérifie donc la condition minimale. Par suite, il en est de même du

treillis des annulateurs à gauche puisque tout annulateur à gauche est un idéal à gauche fermé et le treillis des annulateurs à droite vérifie la condition maximale.

Le treillis des annulateurs à gauche, par exemple, vérifiant la condition minimale, on a, pour tout sous-ensemble S de A,

$$o^{\cdot}.S = \bigcap_{i=1}^{n} o^{\cdot}.s_i,$$

où les éléments s_i sont des éléments de S.

Appelons suivant A. W. Goldie, *idéal à gauche complément* un idéal à gauche pour lequel il existe un idéal à gauche Y tel qu'on ait $X \cap Y = o$ et

$$X \subseteq X', \qquad X' \cap Y = o \Rightarrow X = X'.$$

Théorème 4. — *Soit* A *un anneau premier vérifiant les conditions* $(1\,l)$ *et* $(2\,l)$. *Les idéaux à gauche fermés coïncident avec les idéaux à gauche compléments.*

Soit X un idéal à gauche complément et soit Y un idéal à gauche tel qu'on ait $X \cap Y = o$ et

$$X \subseteq X', \qquad X' \cap Y = o \Rightarrow X = X'.$$

D'après la propriété 10, on a $\overline{X} \cap Y = o$, d'où $X = \overline{X}$ et X est un idéal à gauche fermé.

Réciproquement, soit X un idéal à gauche fermé et soit Y le complément de X dans le treillis T. On a donc

$$X \cap Y = o \qquad \text{et} \qquad \overline{X + Y} = A.$$

Supposons qu'il existe un idéal à gauche $X' \supset X$ tel qu'on ait $X' \cap Y = o$. Choisissons X′ maximal ayant cette propriété. D'après la première partie du théorème, X′ est fermé; d'ailleurs, il vérifie

$$X' \supset X, \qquad X' \cap Y = o \qquad \text{et évidemment} \qquad \overline{X' + Y} = A.$$

Mais ceci contredit la modularité du treillis T. Par suite, X est un idéal à gauche complément.

Théorème 5. — *Soit* A *un anneau premier. Si* $o = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ *est une décomposition de l'idéal* o *comme intersection d'idéaux à gauche* $\cap$*-irréductibles sans idéaux superflus, les idéaux à gauche* X_i *sont des idéaux à gauche fermés maximaux* (4) *et l'invariant n de Kurosh-Ore est égal à la dimension du treillis* T *augmentée d'une unité. Réciproquement, tout idéal à gauche fermé maximal est une composante* $\cap$*-irréductible de l'idéal* o.

(4) Nous entendons par idéal à gauche fermé maximal un idéal à gauche fermé distinct de A maximal parmi les idéaux à gauche fermés distincts de A.

Soit $o = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ une décomposition de l'idéal o comme intersection d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles sans idéaux superflus. Montrons que chacun des X_i, par exemple X_1, est un idéal à gauche fermé. On peut supposer $n > 1$; écrivons alors $o = X_1 \cap Y$ avec $Y \neq o$. X_1 étant $\cap$-irréductible à gauche, il est maximal parmi les idéaux X qui vérifient $o = X \cap Y$. ([9],p. 179). C'est donc un idéal à gauche complément et il est fermé d'après le théorème 4. Tout X_i est donc un idéal à gauche fermé. S'il n'était pas fermé maximal, il serait $\cap$-réductible dans le treillis T, ce qui est contraire à l'irréductibilité. On sait d'ailleurs que si la dimension du treillis T est d, o est l'intersection de $d+1$ éléments maximaux ([5], p. 261). Soit, finalement, F un idéal à gauche fermé maximal. On peut dans le treillis T, écrire o comme intersection de $d+1$ idéaux à gauche fermés maximaux F_i sans idéaux superflus, F étant une des composantes de cette intersection. Montrons que tous les idéaux intervenant dans cette décomposition sont $\cap$-irréductibles et, par suite, composantes $\cap$-irréductibles de o. En effet, s'il n'en était pas ainsi, et si l'on avait $F_1 = X \cap Y$, par exemple, avec $X \supset F_1$ et $Y \supset F_1$, on aurait

$$X \cap Y \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = o \qquad (n = d+1),$$

d'où résulterait, d'après la propriété 10,

$$\overline{X} \cap Y \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = o,$$

soit $Y \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = o$ (car on aurait $\overline{X} = A$), puis

$$\overline{Y} \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = o,$$

soit $F_2 \cap \ldots \cap F_n = o$ (car on aurait $\overline{Y} = A$), ce qui est impossible.

Considérons maintenant les éléments $a \in A$ qui engendrent un idéal fermé égal à A; ils forment *un ensemble* E caractérisé par la propriété suivante :

(1) $$\forall x \neq o, \qquad \text{on a} \quad (a|\cap(x| \neq o.$$

Considérons également *l'ensemble* D′ des éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à droite et *l'ensemble* G′ des éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à gauche.

On a le théorème suivant :

Théorème 6. — *Si* A *est un anneau premier vérifiant la condition* $(2l)$, *on a* $E \subseteq D'$. *Si* A *est un anneau premier vérifiant les conditions* $(1l)$ *et* $(2l)$, *on a* $E = D' \subseteq G'$.

Supposons que l'anneau premier A vérifie la condition $(2l)$ et soit a un élément de E qui n'appartienne pas à D′. Cet élément est donc diviseur de zéro à droite et l'on a $o \cdot a \neq o$, c'est-à-dire

$$o \subset o \cdot a.$$

Nous allons établir, par récurrence sur l'entier positif n, l'inclusion stricte

$$o^{\cdot}.a^n \subset o^{\cdot}.a^{n+1},$$

ce qui contredira la condition $(2l)$ et démontrera donc la première partie du théorème.

Il existe un élément $x_0 \neq o$ tel que $x_0 a = o$. D'après le lemme fondamental, il existe un idéal à gauche $C_0 \neq o$ tel que $(o^{\cdot}.x_0) \cap C_0 = o$. On doit avoir $C_0 x_0 \neq o$ ce qui permet de choisir un élément $c_0 \in C_0$ tel que $c_0 x_0 \neq o$. Puisque a appartient à E, on a $(a| \cap (c_0 x_0| \neq o$, d'où résulte l'existence de $a'_0 \neq o$ avec $a'_0 \in (a|$ et $a'_0 = c'_0 x_0$ avec $c'_0 \in (c_0|$. De $A a'_0 \neq o$, qu'on déduit du fait que A est un anneau premier, résulte qu'on peut supposer que a'_0 est de la forme $y_0 a$. On a donc

$$y_0 a \neq o \qquad \text{et} \qquad y_0 a^2 = a'_0 a = c'_0 x_0 a = o,$$

ce qui établit l'inclusion

$$o^{\cdot}.a \subset o^{\cdot}.a^2.$$

Supposons qu'on ait alors $o^{\cdot}.a^n \subset o^{\cdot}.a^{n+1}$. Il existe un élément $x_n \neq o$ tel que $x_n a^n = o$ et $x_n a^{n+1} \neq o$. D'après le lemme fondamental, il existe un idéal à gauche C_n tel que $(o^{\cdot}.x_n a^n) \cap C_n = o$. On doit avoir $C_n x_n a^n \neq o$, ce qui permet de choisir un élément $c_n \in C_n$ tel que $c_n x_n a^n \neq o$. Puisque a appartient à E, on a $(a| \cap (c_n x_n| \neq o$; il en résulte l'existence de $a'_n \neq o$ avec $a'_n \in (a|$ et $a'_n = c'_n x_n$ avec $c'_n \in (c_n|$. De $A a'_n \neq o$, résulte qu'on peut supposer a'_n de la forme $y_n a$. On a donc

$$y_n a^{n+2} = a'_n a^{n+1} = c'_n x_n a^{n+1} = o.$$

D'autre part, on n'a pas $y_n a^{n+1} = o$, c'est-à-dire $c'_n x_n a^n = o$ car on en déduirait $c'_n \in (o^{\cdot}.x_n a^n) \cap C_n = o$, d'où $a'_n = c'_n x_n = o$. On a donc bien

$$o^{\cdot}.a^{n+1} \subset o^{\cdot}.a^{n+2}.$$

Suppposons maintenant que l'anneau premier A vérifie aussi la condition $(1l)$ et soit $d' \in D'$ avec $d' \notin E$. Il existerait $x \neq o$ tel que $(d'| \cap (x| = o$, et d' serait diviseur de zéro à droite d'après la propriété 4. On a donc $D' \subseteq E$, d'où $E = D'$. Supposons maintenant $a \in E$ avec $a \notin G'$. Alors a serait diviseur de zéro à gauche et il existerait $b \neq o$ tel que $ab = o$ d'où $a \in o^{\cdot}.b$ qui est un idéal à gauche fermé distinct de A et, par suite, $\overline{(a|} \subseteq o^{\cdot}.b$ ce qui contredit $a \in E$.

5. Autres propriétés des idéaux a gauche fermés. — Avant de poursuivre notre étude, nous donnons quelques propriétés supplémentaires des idéaux à gauche fermés et nous comparons nos résultats à ceux de A. W. Goldie.

Suivant A. W. Goldie, appelons *idéal à gauche uniforme* un idéal à gauche U tel que l'intersection de deux idéaux à gauche de A contenus dans U et distincts de o soit distincte de o quel que soit le choix de ces idéaux. Le lemme permet

de démontrer la propriété suivante que A. W. Goldie démontre comme conséquence de la condition $(2r)$ | alors qu'elle va résulter ici de la condition $(2l)$].

PROPRIÉTÉ 13. — *Dans un anneau premier* A *satisfaisant à la condition* $(2l)$, *si* U *est un idéal à gauche uniforme, la relation* $ux = 0$ *avec* $u \in U$ *et* $u \neq 0$ *entraîne* $Ux = 0$.

En effet, supposons qu'il existe $u' \in U$ avec $u'x \neq 0$. D'après le lemme, il existe un idéal à gauche $C \neq 0$ tel qu'on ait

$$(0 \cdot .u'x) \cap C = 0.$$

Il existe donc $c \in C$ avec $cu'x \neq 0$ puisque $Cu'x = 0$ impliquerait $C = 0$. On en déduit $cu' \neq 0$ et

$$(u| \cap (cu'| \neq 0$$

puisque U est uniforme. Soit $v \in (u| \cap (cu'|$ avec $v \neq 0$. De $ux = 0$, résulte $vx = 0$. Or v est de la forme $v = au'$ avec $a \in (c|$. On a donc

$$au'x = 0 \qquad \text{et} \qquad a \in (0 \cdot .u'x) \cap (c| \subseteq (0 \cdot .u'x) \cap C = 0,$$

ce qui contredit $v \neq 0$.

La propriété suivante est une généralisation de la propriété 7. Avant de l'énoncer, faisons une remarque qui nous sera utile plusieurs fois.

Remarque. — Pour tout élément $x \in A$, on a $\overline{Ax} = (x|$. En effet, on a déjà $\overline{Ax} \subseteq (x|$. Soit $u \in (\overline{x}|$. Pour tout $u' \in (u|$ avec $u' \neq 0$, on a $(u'| \cap (x| \neq 0$. Soit $v \in (u'| \cap (x|$ avec $v \neq 0$. L'anneau A étant premier, on a $Av \neq 0$. Choisissons a tel que av soit non nul. On a alors $av \in (u'| \cap Ax$ et $(u'| \cap Ax \neq 0$, ce qui établit $u \in \overline{Ax}$, d'où $(x| \subseteq \overline{Ax}$ et l'égalité.

PROPRIÉTÉ 14. — A *étant un anneau premier vérifiant la condition* $(2l)$, *si l'idéal à gauche* A *est fermé, il en est de même de l'idéal à gauche* $X \cdot .a$, *quel que soit* $a \in A$. *Pour* $a \in X$, *on a* $X \cdot .a = A$; *pour* $a \notin X$, *l'idéal à gauche* $X \cdot .a$ *est distinct de* A.

Soit, en effet, $x \notin X \cdot .a$, c'est-à-dire $xa \notin X$. Il existe donc, puisque X est fermé, $x' \in (x|$ avec $x'a \neq 0$ tel qu'on ait $X \cap (x'a| = 0$. Choisissons, d'après le lemme, un idéal $C \neq 0$ satisfaisant à $(0 \cdot .x'a) \cap C = 0$. De $Cx'a \neq 0$, résulte l'existence de $c \in C$ avec $cx'a \neq 0$. Considérons l'idéal à gauche $Y = (X \cdot .a) \cap (cx'|$. Soit $y \in Y$. On a donc $y = c'x'$ avec $c' \in (c|$ et $ya \in X$ d'où $c'x'a \in X \cap (x'a| = 0$. Par suite, on a $c' \in (0 \cdot .x'a) \cap C = 0$, d'où $y = 0$ et $Y = 0$, ce qui montre que l'idéal à gauche $X \cdot .a$ est fermé. Pour $a \in X$, on a évidemment $X \cdot .a = A$. Pour $a \notin X$, on ne peut avoir $Aa \subseteq X$ car on aurait, d'après la remarque précédente, $(a| = \overline{Aa} \subseteq X$ et $a \in X$.

Précisons, dans un certain cas, la propriété 14.

PROPRIÉTÉ 15. — *A étant un anneau premier vérifiant les conditions* $(1\,l)$ *et* $(2\,l)$, *si l'idéal à gauche* X *est fermé maximal* (4), *pour tout élément* a *tel que* $a \notin X$, *l'idéal à gauche* $X \cdot .a$ *est fermé maximal.*

D'après la propriété 14, il suffit de montrer que $X \cdot .a$, qui est distinct de A, est maximal. Soit donc $X \cdot .a \subset Y$, idéal à gauche fermé. On a $Ya \not\subseteq X$, d'où $\overline{X \vee Ya} = A$. Par suite, pour tout $x \neq 0$, on a $(X + Ya) \cap (x| \neq 0$. Montrons que ceci est incompatible avec $Y \neq A$. Soit, en effet, $y \notin Y$ et $y' \in (y|$ avec $y' \neq 0$ et $Y \cap (y'| = 0$, d'où résulte, en particulier, $y' \notin Y$ et par suite $y'a \notin X$ et $y'a \neq 0$. On a donc $(X + Ya) \cap (y'a| \neq 0$ et il existe $y'' \in (y'|$ satisfaisant à $y''a \neq 0$ et $y''a \in X + Ya$, c'est-à-dire que $y''a$ est de la forme $u + va$ avec $u \in X$, $v \in Y$. On en déduit

$$(y'' - v)a = u \in X \qquad \text{et} \qquad y'' - v \in X \cdot .a \subset Y,$$

d'où

$$y'' \in Y \qquad \text{et} \qquad y'' \in Y \cap (y'| = 0,$$

ce qui contredit $y''a \neq 0$. On a donc $Y = A$ et $X \cdot .a$ est un idéal à gauche fermé maximal.

PROPRIÉTÉ 16. — *Si l'anneau* A *vérifie la condition* $(2\,l)$ *et si* X *est un idéal à gauche uniforme, l'idéal à gauche* $\overline{X}$ *est uniforme.*

Soit, en effet, $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{X}$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$. D'après la propriété 9, on a $X \cap (x| \neq 0$ et $X \cap (y| \neq 0$. Soit alors $x' \in (x| \cap X$ et $y' \in (y| \cap X$, avec $x' \neq 0$, $y' \neq 0$. Puisque X est uniforme, il en résulte $(x'| \cap (y'| \neq 0$ d'où $(x| \cap (y| \neq 0$ et $\overline{X}$ est uniforme.

A. W. Goldie appelle *idéaux à gauche fondamentaux* les idéaux à gauche uniformes maximaux.

THÉORÈME 7. — *Soit* A *un anneau premier vérifiant les conditions* $(1\,l)$ *et* $(2\,l)$. *Les idéaux à gauche fermés minimaux* (5) *coïncident avec les idéaux à gauche fondamentaux.*

Soit un idéal à gauche X fermé minimal et soit $x \in X$, $y \in X$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$. On a $\overline{(x|} = X$ et $y \in \overline{(x|}$ d'où résulte $(x| \cap (y| \neq 0$. Par suite, X est uniforme. De plus, X est uniforme maximal car, pour $z \notin X$, il existe $z' \in (z|$ avec $z' \neq 0$ et $X \cap (z'| = 0$ ce qui prouve qu'un idéal à gauche contenant proprement X ne peut être uniforme.

Réciproquement, supposons X uniforme maximal. D'après la propriété 16, $\overline{X}$ est uniforme d'où $X = \overline{X}$ et X est fermé. Si X n'était pas fermé minimal, il contiendrait proprement un idéal à gauche fermé minimal Y qui serait un

(5) Nous entendons par idéal à gauche fermé minimal un idéal à gauche fermé distinct de 0 minimal parmi les idéaux à gauche fermés distincts de 0.

idéal uniforme maximal d'après la première partie du théorème, ce qui constitue une contradiction.

COROLLAIRE. — *Si l'idéal à gauche* X *est fermé minimal, quel que soit* a, *l'idéal à gauche* $\overline{\mathrm{X}a}$ *est l'idéal* o *ou un idéal à gauche fermé minimal.*

En effet, X est uniforme, donc $\mathrm{X}a$ est l'idéal o ou un idéal à gauche uniforme d'après le lemme 2.3 de A. W. Goldie [5] qui résulte de la propriété 13. Par suite, si l'on a $\mathrm{X}a \neq 0$, $\overline{\mathrm{X}a}$ est uniforme d'après la propriété 16 et, puisque c'est un idéal fermé, il est fermé minimal.

Remarques. — Il résulte du théorème 7 que le lemme 3.2 de A. W. Goldie est valable moyennant seulement les conditions $(1r)$ et $(2r)$.

De plus, il résulte du théorème 7 et de la propriété 10 que le théorème 6 de A. W. Goldie est valable moyennant les seules conditions $(1r)$ et $(2r)$. En effet, les sommes directes d'idéaux à gauche fondamentaux coïncident avec les sommes d'idéaux à gauche fermés minimaux dont l'union dans le treillis T est égale à A.

D'ailleurs, du théorème 4, résulte également que les lemmes 3.4, 3.5 et 3.7 de A. W. Goldie sont valables si les conditions $(1r)$ et $(2r)$ sont vérifiées.

PROPRIÉTÉ 17. — *Soit* A *un anneau premier satisfaisant aux conditions* $(1l)$ *et* $(2l)$. *Si* X *est un idéal à gauche fermé minimal et* x *un élément non nul de* X, *l'idéal à gauche annulateur* $0\cdot.x$ *est fermé maximal. Réciproquement, si l'idéal à gauche annulateur* $0\cdot.x$ *est fermé maximal, l'idéal à gauche* $\overline{(x|}$ *est fermé minimal.*

Soit X idéal à gauche fermé minimal et $x \in \mathrm{X}$ avec $x \neq 0$. Supposons qu'il existe un idéal à gauche fermé I tel qu'on ait $0\cdot.x \subset \mathrm{I} \subset \mathrm{A}$. Choisissons un élément $y \notin \mathrm{I}$. Puisque I est fermé, il existe $y' \in (y|$ avec $y' \neq 0$ et $\mathrm{I} \cap (y'| = 0$. On a $y'x \neq 0$ car, de $y'x = 0$, résulterait $y' \in 0\cdot.x$, d'où $y' \in \mathrm{I}$ et $y' = 0$. Choisissons maintenant un élément $i \in \mathrm{I}$ avec $i \notin 0\cdot.x$, c'est-à-dire $ix \neq 0$. Puisque X est un idéal à gauche uniforme, il existe un élément $z \neq 0$ tel qu'on ait $z \in (ix|$ et $z \in (y'x|$. Cet élément est de la forme $i'x$ avec $i' \in (i|$ et de la forme $y''x$ avec $y'' \in (y'|$. On a $i'x - y''x = 0$ d'où $i' - y'' \in 0\cdot.x$ et, par suite, $i' - y'' \in \mathrm{I}$. Il en résulte $y'' \in \mathrm{I}$ et $y'' \in \mathrm{I} \cap (y'| = 0$, d'où $y'' = 0$, ce qui contredit $z \neq 0$.

Réciproquement, supposons que $0\cdot.x$ soit un idéal à gauche fermé maximal. On a $x \neq 0$. Supposons qu'il existe un idéal à gauche fermé Y tel qu'on ait $0 \subset \mathrm{Y} \subset \overline{(x|}$. Puisque Y est fermé, il en est de même de $\mathrm{Y}\cdot.x$ d'après la propriété 8 et l'on a $0\cdot.x = \mathrm{Y}\cdot.x$ ou $\mathrm{Y}\cdot.x = \mathrm{A}$. On ne peut avoir $0\cdot.x = \mathrm{Y}\cdot.x$: en effet, choisissons $y \in \mathrm{Y}$ avec $y \neq 0$. De $y \in \overline{(x|}$, résulte $(x| \cap (y| \neq 0$. Soit $z \neq 0$ avec $z \in (x| \cap (y|$. Puisqu'on ne peut avoir $\mathrm{A}z = 0$, l'anneau A étant

premier, choisissons a tel que az soit non nul. L'élément az est de la forme $a'x$ et l'on a $a'x = az \in (y|\subseteq Y$, d'où $a' \in Y^{\cdot}.x = A$, d'où $Ax \subseteq Y$ et, par suite, $\overline{Ax} \subseteq Y$. Pour obtenir une contradiction et achever la démonstration, il suffit d'appliquer la remarque précédant la propriété 13 qui montre qu'on a $\overline{Ax} = (x|$.

Remarque. — La propriété précédente permet d'obtenir des idéaux annulateurs à gauche maximaux qui sont des idéaux à gauche fermés maximaux. L'exemple 2 du paragraphe 7 montrera qu'un idéal à gauche fermé maximal n'est pas nécessairement un annulateur à gauche.

PROPRIÉTÉ 18. — *Soit* A *un anneau premier satisfaisant aux conditions* $(1l)$ *et* $(2l)$. X *étant un idéal à gauche de* A, *pour qu'il existe un idéal à gauche* $Y \neq 0$ *tel que* $X \cap Y = 0$, *il faut et il suffit que tous les éléments de* X *soient diviseurs de zéro à droite.*

La condition est nécessaire d'après la propriété 4. Montrons qu'elle est suffisante. Soit X un idéal à gauche dont tous les éléments sont diviseurs de zéro à droite; supposons qu'il n'existe pas d'idéal à gauche $Y \neq 0$ tel que $X \cap Y = 0$. Considérons une décomposition de 0 comme intersection d'idéaux à gauche fermés maximaux sans idéaux superflus :

$$0 = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n.$$

Posons

$$U_i = X \cap (X_1 \cap \ldots \cap X_{i-1} \cap X_{i+1} \cap \ldots \cap X_n) \neq 0.$$

L'idéal à gauche U_i étant contenu dans l'idéal à gauche fermé minimal

$$X_1 \cap \ldots \cap X_{i-1} \cap X_{i+1} \cap \ldots \cap X_n,$$

l'annulateur $0^{\cdot}.u_i$ est, pour tout $u_i \in U_i$ avec $u_i \neq 0$, d'après la propriété 17, un idéal à gauche fermé maximal. L'anneau A étant premier, on a $0^{\cdot}.U_i = 0$, d'où

$$0 = \bigcap_{j=1}^{j=n} (0^{\cdot}.u_{ij}),$$

les éléments u_{ij} étant convenablement choisis dans U_i.

Le treillis T des idéaux fermés étant modulaire complémenté et de longueur finie n (th. 2), et les idéaux $0^{\cdot}.u_{ij}$ étant tous maximaux dans ce treillis, on en déduit l'existence d'indices $j_1, j_2, \ldots, j_n$ tels que

$$0 = \bigcap_{i=1}^{n} (0^{\cdot}.u_{ij_i}).$$

Considérons l'élément $x = u_{1j_1} + u_{2j_2} + \ldots + u_{nj_n} \in X$. Montrons qu'il n'est

pas diviseur de zéro à droite, ce qui constituera une contradiction. La relation $ax = 0$ entraîne, en effet

$$au_{1j_1} = -(au_{2j_2} + \ldots + au_{nj_n}) \in X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = 0, \qquad \text{donc} \quad a \in 0^{\cdot}.u_{1j_1}.$$

De même, on établit

$$a \in 0^{\cdot}.u_{2j_2}, \qquad \ldots \qquad a \in 0^{\cdot}.u_{nj_n}.$$

il en résulte

$$a \in \bigcap_{i=1}^{n} (0^{\cdot}.u_{1j_i}) = 0.$$

Remarque. — La propriété 18 étend le théorème 10 de A. W. Goldie, dont la démonstration utilise le fait qu'un idéal à gauche complément maximal est l'annulateur à gauche d'un élément, propriété qui n'est pas valable avec les seules hypothèses $(1l)$ et $(2l)$.

COROLLAIRE. — *L'anneau* A *possède au moins un élément non diviseur de zéro à droite.*

THÉORÈME 8. — *Soit* A *un anneau premier vérifiant les conditions* $(1l)$ *et* $(2l)$. *Pour que l'idéal à gauche* I *soit fermé, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :*

$$(1) \qquad ab \in \mathrm{I}, \qquad a \in \mathrm{D}' \Rightarrow b \in \mathrm{I},$$

D′ *désignant l'ensemble des éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à droite.*

La condition est nécessaire. Supposons I fermé avec $ab \in \mathrm{I}$, $a \in \mathrm{D}'$. Si l'on avait $b \notin \mathrm{I}$, l'idéal $\mathrm{I}^{\cdot}.b$ serait fermé différent de A, d'après la propriété 14. Or il contiendrait l'élément $a \in \mathrm{D}' = \mathrm{E}$, d'après le théorème 6, ce qui est impossible.

La condition est suffisante. Supposons I non fermé vérifiant la condition (1). Soit b un élément de la fermeture $\bar{\mathrm{I}}$ de I n'appartenant pas à I. Montrons que la fermeture de $\mathrm{I}^{\cdot}.b$ est égale à A. Sinon il existerait un élément $x \neq 0$ tel que $(\mathrm{I}^{\cdot}.b) \cap (x| = 0$. En particulier, on aurait $xb \neq 0$ car $xb = 0$ impliquerait $x \in 0^{\cdot}.b \subseteq \mathrm{I}^{\cdot}.b$. D'après la propriété 8, on aurait $\mathrm{I} \cap (xb| \neq 0$. Il existerait donc $x' \in (x|$ avec $0 \neq x'b \in \mathrm{I}$. Cela entraîne $x' \in (\mathrm{I}^{\cdot}.b) \cap (x| = 0$, ce qui contredit $x'b \neq 0$. La fermeture de $\mathrm{I}^{\cdot}.b$ étant égale à A, il résulte de la propriété 18 et de la propriété 10 que l'idéal $\mathrm{I}^{\cdot}.b$ contient nécessairement un élément non diviseur de zéro à droite, contrairement à la condition (1).

6. IMMERSION D'UN ANNEAU PREMIER NŒTHÉRIEN A GAUCHE DANS UN ANNEAU DE MATRICES A COEFFICIENTS DANS UN CORPS :

PROPRIÉTÉ 19. — *Soit* A *un anneau premier satisfaisant aux conditions* $(1l)$ *et* $(2l)$. *Si* b *est un élément de* D′ (*c'est-à-dire non diviseur de zéro à droite*) *et* a *un élément quelconque de* A, *il existe* $a' \in \mathrm{A}$ *et* $b' \in \mathrm{D}'$ *tels que* $b'a = a'b$.

D'après le théorème 6, on a $D' = E$. Il en résulte que pour tout idéal à gauche $Y \neq 0$, on a $[(b|\cdot.a] \cap Y \neq 0$. En effet, si l'idéal à gauche Ya est nul, on a $Ya \subseteq (b|$ d'où $Y = Y \cap [b|\cdot.a] \neq 0$. Si l'idéal Ya est non nul, on a $(b| \cap Ya \neq 0$, puisque b est un élément de E. Il existe donc $t \neq 0$ tel que $t = ya \in (b|$ avec $y \in Y$. On en déduit $y \in (y|\cdot.a$ avec $y \neq 0$. La propriété 18 montre alors l'existence d'un élément $b' \in D'$ tel que $b' \in (b|\cdot.a$ d'où $b'a \in (b|$. On en déduit la propriété 19.

D'après le théorème 6, l'ensemble D' qui est évidemment multiplicativement fermé, est contenu dans G', donc est simplifiable à droite et à gauche dans A. La propriété 10 montre alors que l'anneau A peut être plongé dans un anneau de quotients à gauche Q(A) tel que tout élément de Q(A) soit de la forme $b^{-1}a$ avec $b \in D'$ et $a \in A$) (*cf.* P. Dubreil [8], p. 280). On a donc le théorème suivant :

Théorème 9. — *Un anneau premier* A *qui vérifie les conditions* $(1l)$ *et* $(2l)$ *possède un anneau de quotients à gauche* Q(A) *défini à un isomorphisme près relativement à* A.

Nous allons démontrer que Q(A) est aussi un anneau premier qui vérifie les conditions $(1l)$ et $(2l)$. On démontre d'abord comme A. W. Goldie (lemme 4.1) que l'anneau Q(A) est un anneau premier vérifiant la condition $(1l)$, mais la démonstration de A. W. Goldie ne s'applique pas à la condition $(2l)$. Pour établir cette condition, nous allons plus généralement étudier les idéaux à gauche de Q(A).

Propriété 20. — *L'application* $Y \to X = Y \cap A$ *définit un isomorphisme entre le treillis des idéaux à gauche de* Q(A) *et le treillis des idéaux à gauche fermés de* A.

D'abord, pour tout idéal à gauche Y de Q(A), l'idéal à gauche $X = Y \cap A$ de A est fermé. En effet, si l'on a $ba \in X$ avec $b \in D'$, on a aussi $a = b^{-1}ba \in X$. Donc X est fermé d'après le théorème 8.

D'autre part, de $Y \cap A = Y' \cap A$, résulte $Y = Y'$ car $y \in Y$ entraîne l'existence de $a \in A$ et $b \in D'$ avec $y = b^{-1}a$, d'où résulte

$$a = bb^{-1}a' \in Y \cap A = Y' \cap A \qquad \text{et} \qquad y \in Y'.$$

On a donc $Y \subseteq Y'$, et de même, $Y' \subseteq Y$. Par suite, l'application étudiée est injective.

Finalement, si X est un idéal à gauche fermé quelconque de A, l'ensemble des éléments de Q(A) de la forme $b^{-1}x$ avec $x \in X$ et $b \in D'$ constitue un idéal à gauche Y de Q(A); en effet, on a, quel que soit $x \in X$, $b \in D'$, $a' \in A$, $b' \in D'$,

$$b'^{-1}a'.b^{-1}x = (b''b')^{-1}(a''x)$$

avec $a'' \in A$, $b'' \in D'$ si ces éléments vérifient l'égalité $b''a' = a''b$; on a également, quel que soit x, $x' \in X$, b, $b' \in D'$,

$$b^{-1}x - b'^{-1}x' = b^{-1}b_1^{-1}b_1x - b'^{-1}b_1'^{-1}b_1'x' = b^{-1}b_1^{-1}(b_1x - b_1'x')$$

si l'on détermine b_1, $b_1' \in D'$ par l'égalité $b_1b = b_1'b'$. De plus, l'idéal à gauche Y de Q(A) est tel qu'on ait $Y \cap A = X$ car la relation $b^{-1}x \in A$ avec $x \in X$, $b \in D'$ implique $b.b^{-1}x \in X$ d'où $b^{-1}x$, d'après le théorème 8, puisque X est fermé.

Théorème 10. — *A étant un anneau premier vérifiant les conditions* (1 *l*) *et* (2 *l*), *l'anneau des quotients à gauche* Q(A) *est isomorphe à l'anneau des matrices carrées* $M_n(K)$ *d'ordre n sur un corps* K, *n étant l'invariant de Kurosh-Ore du treillis des idéaux à gauche fermés de* A.

En effet, on a déjà vu que Q(A) est un anneau premier. D'autre part, il possède un élément unité, et la propriété 20 nous montre qu'il vérifie la condition minimale sur les idéaux à gauche, cette condition étant vérifiée par le treillis T des idéaux à gauche fermés de A (th. 2). On est donc ramené au cas d'un anneau premier artinien à gauche avec élément unité, étudié au paragraphe 1.

Corollaire. — *Le treillis* T *des idéaux à gauche fermés de* A *est un treillis géométrique irréductible.*

En définitive, on a établi le théorème suivant qui est une extension du théorème 13 de A. W. Goldie :

Théorème 11. — *Un anneau premier* A *possède un anneau de quotients à gauche qui est un anneau de matrices carrées* $M_n(K)$ *sur un corps* K (*commutatif ou non*) *si et seulement si :*

1° A *vérifie la condition de chaîne ascendante sur les annulateurs à gauche.*

2° *Toute somme directe d'idéaux à gauche non nuls n'a qu'un nombre fini de termes.*

Le théorème d'immersion 10 montre que les conditions 1° et 2° sont suffisantes. On démontre qu'elles sont nécessaires comme A. W. Goldie (th. 13).

Donnons encore une propriété intéressante de Q(A).

Théorème 12. — *L'anneau* Q(A) *des quotients à gauche de* A *est l'enveloppe injective* (6) *du* A-*module* A.

D'abord, Q(A) est une extension essentielle de A. En effet, soit M un

(6) Sur la notion d'enveloppe injective, *voir* B. Eckmann et A. Schopf [6]. On sait que l'enveloppe injective d'un anneau A régulier à gauche est son corps des quotients à gauche [*Cf.* P. Gabriel, *Objets injectifs dans les catégories abéliennes* (*Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot*, 17, 1959], ce qui est un cas particulier de notre théorème 12.

A-module contenu dans Q(A) et tel que $A \cap M = o$. Soit x un élément de M; on a $x = b^{-1}a$ avec $a \in A$, $b \in D'$; il en résulte $bx = a \in A \cap M = o$ d'où $a = o$ et $x = o$. On a donc bien $M = o$.

D'autre part, Q(A) est un A-module injectif. En effet, soit I un idéal à gauche de A et f un homomorphisme du A-module I dans le A-module Q(A). Nous montrons qu'il existe un élément $b^{-1}a$ de Q(A) tel que $f(i) = ib^{-1}a$ pour tout $i \in I$. Soit J l'idéal à gauche de Q(A), ensemble des éléments de la forme $c^{-1}i$ avec $i \in I$ et $c \in D'$. Considérons l'application g de J dans Q(A) définie par $g(c^{-1}i) = c^{-1}f(i)$. On vérifie que cette application est bien définie [elle ne dépend pas de l'expression d'un élément de Q(A) sous la forme $c^{-1}i$] et qu'elle est un homomorphisme du Q(A)-module J dans le Q(A)-module Q(A). Celui-ci étant injectif (*cf.* H. Cartan et S. Eilenberg, [2], p. 11), il existe $b^{-1}a \in Q(A)$ tel que $g(c^{-1}i) = c^{-1}ib^{-1}a$ pour tout élément $c^{-1}i \in J$. On en déduit immédiatement $f(i) = ib^{-1}a$ pour tout $i \in I$.

7. Exemples. — Les deux exemples suivants sont des exemples d'anneaux premiers vérifiant les conditions $(1l)$, $(2l)$ et $(2r)$ (ils vérifient la condition maximale sur les idéaux à gauche) sans vérifier la condition $(1r)$ (7). Dans l'exemple 1, on a un anneau sans diviseurs de zéro. Dans l'exemple 2, il existe des diviseurs de zéro.

Exemple 1. — Soit K le corps des nombres réels et $K(y)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K et à une variable y. L'application $\alpha : f(y) \to f(y^2)$ est un endomorphisme injectif de $K(y)$ qui n'est pas surjectif. Considérons les polynomes à coefficients dans $K(y)$ et à une variable x non permutable avec les coefficients et imposons les relations $xf(y) = f(y^2)x$. Nous définissons ainsi un anneau A dont les éléments peuvent se mettre d'une manière unique sous la forme

$$P(x) = f_n(y)x^n + f_{n-1}(y)x^{n-1} + \ldots + f_1(y)x + f_0(y)$$

avec n entier positif ou nul et $f_n(y) \neq o$. L'anneau A n'a visiblement pas de diviseurs de zéro et est, par conséquent, premier.

Tout idéal à gauche de A est principal : il est, en effet, engendré par chacun de ses polynomes de degré minimum. Mais la condition $(1r)$ n'est pas vérifiée car la somme

$$(y^2x^2) + (y^4x^4) + \ldots + (y^{2m}x^{2m}) + \ldots$$

est directe; en effet, une égalité de la forme

$$y^{2m}x^{2m}P_0(x) = y^2x^2P_1(x) + y^4x^4P_2(x) + \ldots + y^{2m-1}x^{2(m-1)}P_{m-1}(x)$$

est impossible avec $P_0(x) \neq o$; pour le voir, il suffit de considérer les coef-

(7) On trouve, dans H. Cartan et S. Eilenberg ([2] p. 16), un exemple d'anneau nœthérien à gauche et non nœthérien à droite, mais cet anneau n'est pas premier.

ficients du terme de degré maximum (en x) dans les deux membres qui seraient, si $P_0(x)$ commence par le terme $f_0(y)x^n$ [avec $f_0(y) \neq 0$)], $y^{2^m} f_0(y^{2^m})$ et $y^2 f_1(y^4) + y^4 f_2(y^6) + \ldots + y^{2^{2^{m-1}}} f_{m-1}(y^{2^{2^{m-1}}})$ [si $f_i(y)x^{n+2(m-i)}$ est le terme en x^{n+2m-i} du polynome $P_i(x)$]; or, ces deux coefficients ne peuvent être égaux sans qu'on ait $f_1 = 0$ et, de proche en proche, $f_2 = 0, \ldots, f_{m-1} = 0$, d'où $f_0 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Exemple 2. — Considérons le corps $K(y)$ de l'exemple 1, puis l'ensemble des polynomes à une variable x non permutable avec les coefficients, ceux-ci étant les couples (f, g) avec $f \in K(y)$, $g \in K(y)$, les relations suivantes étant imposées :

$$x(f(y), g(y)) = (g(y^2), f(y^2))x.$$

On voit aisément qu'on obtient un anneau A dont les éléments se mettent d'une façon et d'une seule sous la forme des polynomes précédents

$$P(x) = (f_n(y), g_n(y))x^n + (f_{n-1}(y), g_{n-1}(y))x^{n-1} + \ldots + (f_0(y), g_0(y)).$$

L'anneau A est un anneau premier. En effet, si l'on a

$$P(x) = (f_n(y), g_n(y))x^n + \ldots, \qquad P'(x) = (f'_m(y), g'_m(y))x^m + \ldots,$$

avec $(f_n(y), g_n(y)) \neq (0, 0)$, $(f'_m(y), g'_m(y)) \neq (0, 0)$, on voit aisément que l'un ou l'autre au moins des produits $P(x)(1, 1)P'(x)$ et $(P(x)(1, 1)xP'(x)$ est différent de $(0, 0)$.

Les idéaux à gauche de A sont engendrés par un ou deux polynomes. Pour le voir, on considère un polynome $P_1(x)$ de degré minimum de l'idéal à gauche I étudié dont on peut supposer que le coefficient du terme de plus haut degré est $(0, 1)$,$(1, 0)$ ou $(1, 1)$. Dans le troisième cas, on a nécessairement $I = (P_1(x)|$. Dans les deux premiers cas, et si l'on a $I \supset (P_1(x)|$, I contient nécessairement des polynomes dont le coefficient du terme de plus haut degré est $(1, 1)$; si $P_2(x)$ est un de ces polynomes de degré minimum, on a $I = (P_1(x), P_2(x)|$.

Les idéaux à gauche fermés propres sont tous de la forme $I = (P_1(x)|$ où $P_1(x)$ est un polynome dont le coefficient du terme de plus haut degré est $(0, 1)$ ou $(1, 0)$. En effet, d'après le théorème 6, on a $D' = E$; par suite, tous les éléments de I, qui ne peuvent appartenir à E, ne peuvent appartenir à D′ et sont des diviseurs de zéro à droite; or, il est facile de voir qu'un polynome dont le coefficient du terme de plus haut degré est $(1, 1)$ ne peut être diviseur de zéro (ni à droite, ni à gauche); donc I ne contient pas de polynomes de cette forme.

L'idéal $(0, 1)|$ est l'annulateur à gauche de l'élément $(1, 0)$. C'est donc un idéal fermé et cet idéal fermé est maximal. De même, l'idéal $((1, 0)|$ est un idéal fermé maximal. D'autre part, on a

$$\{(0, 0)\} = ((0, 1)| \cap ((1, 0)|.$$

Donc, le treillis T est de dimension 1, deux idéaux fermés propres distincts sont toujours incomparables et tous les idéaux fermés propres sont maximaux.

On n'a pas ici $E = G'$. En effet, l'élément $(0, 1)x^2 + (0, y)x$, par exemple, est diviseur de zéro à droite, donc n'est pas élément de E [on a $(1, 0)[(0, 1)x^2 + (0, y)x] = (0, 0)$]; mais cet élément n'est pas diviseur de zéro à gauche car une relation telle que

$$[(0, 1)x^2 + (0, y)x][(f_n(y), 0)x^n + (f_{n-1}(y), g_{n-1}()x^{n-1} + \ldots] = (0, 0),$$

avec $f_n(y) \neq 0$, exigerait $g_{n-1}(y^4) + y f_n(y^2) = 0$, ce qui est impossible.

Finalement, l'idéal à gauche fermé engendré par l'élément $(0, 1)x^2 + (0, y)x$ est propre (d'ailleurs maximal) et n'est pas annulateur à gauche.

Donc, dans cet exemple, les ensembles $D' = E$ *et* G' *sont distincts et il existe un idéal à gauche fermé qui n'est pas annulateur à gauche.*

Exemple 3. — Soit C le corps des quotients à gauche de l'anneau A considéré à l'exemple 1 et soit $M_2(C)$ l'anneau des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans C. Le sous-anneau $M_2(A)$ de $M_2(C)$ admet $M_2(C)$ pour anneau de quotients à gauche. Par suite, d'après le théorème 11, $M_2(A)$ est un anneau premier vérifiant les conditions $(1l)$ et $(2l)$. Considérons deux éléments a et a' de A n'ayant pas de multiple commun à droite non nul, par exemple y^2x^2 et y^4x^4 : l'élément

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a' \end{pmatrix}$$

de $M_2(A)$ est diviseur de zéro à droite et n'est pas diviseur de zéro à gauche. Par suite, d'après le lemme 3.9 de A. W. Goldie et d'après notre propriété 12, l'anneau $M_2(A)$ ne vérifie pas la condition $(1r)$.

Remarquons que l'anneau de l'exemple 2 est isomorphe au sous-anneau de $M_2(A)$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} f(y) & 0 \\ 0 & g(y) \end{pmatrix}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 8 : *Modules et anneaux semi-simples*, Paris, Hermann, 1958 (*Act. Scient. et ind.*, 1261 ; *Éléments de Mathématiques*, 23).

[2] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton, 1956.

[3] P. Cartier, *Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt* (*Séminaire Sophus-Lie*, t. 1, 1954-1955 : *Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie*, exposé n° 1).

[4] P. Dubreil, *Algèbre* t. 1, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1954 (*Cahiers scientifiques*, 20).

[5] Mme M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis*,

des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques, Paris, Gauthier-Villars, 1953, *Cahiers scientifiques*, 21).

[6] B. Eckmann et A. Schopf, *Über injektive Moduln* (*Archiv. d. Math.*, t. 4, 1953, p. 75-78).

[7] A. W. Goldie, *The structure of prime rings with maximum condition* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 44, 1958, p. 589-608).

[8] N. Jacobson, *Structure of rings*, Providence, American mathematical Society, 1956 (*Amer. Soc. Coll. Publ.* 37).

[9] L. Lesieur, *Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 88, 1955, p. 161-193).

[10] L. Lesieur et R. Croisot, *Théorie nœthérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, I (*Colloque d'Algèbre supérieure*, 1956, Bruxelles); Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques), p. 79-121.

[11] N. H. McCoy, *Prime ideals in general rings* (*Amer. J. Math.*, t. 71, 1949, p. 823-833).

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 76, 1959, p. 185 à 269.

ASPECTS MATHÉMATIQUES
DE LA
THÉORIE UNITAIRE DU CHAMP D'EINSTEIN

PAR Mme F. MAURER-TISON.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 187

PREMIÈRE PARTIE.

LES ÉQUATIONS DU CHAMP.

CHAPITRE I. *Quelques généralités sur les connexions infinitésimales.*

1. Espace fibré différentiable principal 193
2. Connexion infinitésimale sur un espace fibré principal 194
3. Développement, transport, groupe d'holonomie 195
4. Différentielle absolue, courbure 196
5. Connexion linéaire 196

CHAPITRE II. — *Les bases de la théorie unitaire du champ d'Einstein.*

6. La variété fondamentale V_4 199
7. Premières propriétés des tenseurs déduits du tenseur fondamental par symétrisation et antisymétrisation 200
8. Le principe variationnel 201
9. Les équations du champ 202
10. Forme tensorielle des équations du champ 203
11. Les identités de conservation 204

CHAPITRE III. — *Connexions infinitésimales et théorie unitaire.*

I. — *Interprétation géométrique du système des équations de liaison.*

Pages.
12. Une nouvelle forme du système des équations de liaison 206
13. Transport d'un vecteur covariant et d'un vecteur contravariant reliés par le tenseur fondamental 207
14. Une relation entre les groupes d'holonomie des deux connexions linéaires ω et $\bar{\omega}$. 208
15. Connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier 209
16. Les tenseurs de courbure de deux connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier deux fois covariant 210
17. Application aux connexions ω et $\bar{\omega}$. Le principe d'hermiticité d'Einstein 211

II. — *L'espace fibré des corepères affines.*

18. Corepères affines et connexion coaffine 213
19. Connexion coaffine associée à une connexion linéaire 215
20. Géodésiques d'une connexion coaffine 217
21. La variété fondamentale V_4, variété à connexion coaffine 219

DEUXIÈME PARTIE.

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DU CHAMP.

CHAPITRE IV. — *Les coordonnées isothermes.*

22. L'expression du tenseur de Ricci en géométrie riemannienne 220
23. Extension à l'espace à connexion linéaire de la théorie du champ unifié 222
24. Quelques remarques sur la formule fondamentale 224

CHAPITRE V. — *Conditions générales d'existence des solutions.*

I. — *Analyse du système des équations du champ.*

25. Le choix des données de Cauchy et les théorèmes préliminaires 228
26. Intégration des équations du champ 230

II. — *Détermination complète des variétés caractéristiques.*

27. Formules générales de résolution pour le système des équations de liaison 232
28. Le cas de trois dimensions 233
29. Le cas particulier où le déterminant des $g_{(ij)}$ est nul 235
30. Les trois groupes de variétés caractéristiques 236

CHAPITRE VI. — *Les éléments géométriques attachés à chaque point de* V_4.

I. — *Étude algébrique des relations qui lient les tenseurs dérivés du tenseur fondamental.*

31. Relations tensorielles à deux indices 237
32. Relations scalaires entre les déterminants g, l, h, m, k; le cas où $k = 0$ 239

II. — *Les trois cônes caractéristiques.*

33. Étude approchée préliminaire 242

34. Inversion de la matrice $\gamma^{\alpha\beta}$ 243
35. Vecteurs propres de C_l par rapport à C_γ 244
36. Nature de C_γ et position relative des deux cônes C_l et C_γ 245
37. Résultats et remarques 248

TROISIÈME PARTIE.

Interprétation physique.

Chapitre VII. — *Surfaces d'ondes gravitationnelles et électromagnétiques.*

38. Le schéma fluide-champ électromagnétique en relativité générale 249
39. Hypothèses d'identification de certaines fonctions de $g^{[\alpha\beta]}$ et $g_{[\alpha\beta]}$ à un champ et à une induction 253
40. La forme pseudo-volume. Un laplacien généralisé 255
41. Les relations qui lient le champ et l'induction, le tenseur de Maxwell 256

Chapitre VIII. — *Le tenseur d'impulsion-énergie.*

42. Une autre forme de l'identité fondamentale 257
43. Le nouveau système des équations de champ et le tenseur d'impulsion-énergie ... 258
44. Hypothèses de champ faible 260
45. Les équations approchées en coordonnées isothermes 263
46. Le tenseur électrodynamique comparé au tenseur de Maxwell de la théorie « naïve ». 267

INTRODUCTION.

La théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger attire par son apparente simplicité et rebute par les calculs pénibles qu'elle nécessite; c'est une théorie jeune, dont le bagage est mince s'il est examiné avec rigueur, immense si l'on considère les efforts tentés pour explorer ses possibilités.

Considérons un tenseur fondamental d'ordre 2 sur une variété différentiable munie d'une connexion linéaire, et imposons au tenseur et à la connexion de satisfaire à un principe variationnel : c'est l'hyperchamp géométrique qui doit réunir le champ de gravitation et le champ électromagnétique, ce sont les équations qui doivent généraliser les équations de Maxwell et les équations d'Einstein du schéma électromagnétique pur; la théorie sera d'autant plus unitaire que la séparation des deux champs sera plus artificielle, d'autant plus satisfaisante qu'elle apportera des nouveautés sous forme de termes d'interaction ou autres. Après substitution à la connexion linéaire initiale d'une connexion linéaire à vecteur de torsion nul de coefficients $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ définissant le

même parallélisme, les équations finalement adoptées liant le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ et la connexion $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont les suivantes (1) :

$$\partial_\rho g_{\lambda\mu} - L^{\tau}_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} - L^{\tau}_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0, \tag{1}$$

$$\partial_\rho \left(g^{\rho\beta} \sqrt{-g} \right) = 0, \tag{2}$$

$$P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha) = 0. \tag{3}$$

Les premières définissent la connexion en fonction du tenseur fondamental sauf cas exceptionnel, les secondes traduisent la propriété de torsion de la connexion $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$, les dernières, où $P_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, Σ_α un vecteur covariant arbitraire, sont les équations de champ proprement dites. Quatre identités de conservation, déduites du principe variationnel, lient $P_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$: elles jouent un rôle primordial dans la résolution du problème de Cauchy : celui-ci a été entièrement analysé en 1953 par Lichnerowicz avec des méthodes d'approche directement inspirées de la relativité générale et sans calculs explicites; l'étude conclut à l'existence de surfaces d'ondes du champ unitaire solutions de l'équation

$$l^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0. \tag{4}$$

D'autres surfaces d'ondes, variétés caractéristiques du système des équations de champ, devaient apparaître dans l'étude d'un cas exceptionnel laissé provisoirement de côté ; ce fut le point de départ de notre travail.

Ayant montré qu'en chaque point de la variété V_4 le conoïde caractéristique était constitué de trois nappes tangentes respectivement à trois cônes du second ordre, la question s'est posée de fixer la position relative de ces trois cônes; ils sont en général emboîtés; à ce point, la tentation était grande de se lancer dans les interprétations physiques : le cône extérieur serait le cône de lumière, et déterminerait la « vraie métrique »; un des cônes intérieurs, plus probablement celui défini par $l_{\alpha\beta}$, propagerait l'énergie électromagnétique. A la suite des travaux de Pham Mau Quan [15], ceci nous menait à chercher deux tenseurs champ et induction définissant en chaque point un « libre courant » fonction des valeurs du tenseur fondamental en ce point; les sources du champ seraient donc incluses dans le cadre géométrique de la théorie sous forme d'une distribution continue de charge dans tout l'espace. Alors nous avons voulu extraire des équations (3), où $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ est supposé remplacé par la solution unique de (1) un système de la forme

$$S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \tag{5}$$

comportant au premier membre un tenseur d'Einstein formé à partir de notre métrique, et, au second membre, un tenseur de Maxwell symétrisé formé à

(1) Notations et symboles sont précisés p. 192 et 193.

partir des tenseurs champ et induction supposés. L'entreprise est grandement facilitée par l'emploi de coordonnées particulières et aboutit à un résultat comprenant le tenseur de Maxwell désiré, déjà mis en évidence par Mme Tonnelat par une autre méthode, et d'autres tenseurs dont l'interprétation est douteuse à ce stade de la théorie; nous avons dû employer en dernier ressort des hypothèses de champ faible, ce qui n'est pas pour nous étonner, car tenseur et équations de Maxwell sont directement issus de la relativité restreinte, et n'ont pas été vraiment « généralisés » par la relativité générale. Les coordonnées particulières utilisées s'inspirent des coordonnées isothermes de De Donder et Darmois; mais leur succès n'est que partiel : alors que, sur une variété riemannienne, l'usage des coordonnées isothermes sépare les potentiels dans l'expression des composantes du tenseur de Ricci en ce qui concerne les dérivées du second ordre, sur notre variété à connexion linéaire, la séparation est incomplète; cela s'explique aisément; en relativité générale, les surfaces coordonnées privilégiées satisfont à une équation invariante du deuxième ordre admettant les mêmes caractéristiques que les équations d'Einstein; en théorie unitaire, nous avons des équations de champ qui comportent un système triple de caractéristiques dont une seule famille subsiste dans l'équation invariante qui définit les coordonnées isothermes. Il nous semble donc que des coordonnées vraiment « isothermes » ne doivent pas exister en théorie unitaire; néanmoins les identités « fondamentales » que nous avons obtenues permettent des calculs d'approximation avec un maximum de simplicité et semblent indiquer la direction des interprétations physiques.

Nos identités ne sont des identités, répétons-le, que si l'on y suppose remplacée la connexion linéaire par la solution unique de (1); comme cette solution est inutilisable directement, nos calculs n'ont pu se faire que suivant une méthode qui donne le résultat correspondant en géométrie riemannienne, sans autre recours que les identités de Ricci et les équations $\nabla_\rho a_{\lambda\mu} = 0$ auxquelles se réduisent (1) si $g_{\lambda\mu}$ est symétrique. C'est ainsi que nous avons abordé la question de la signification géométrique de (1). La donnée du champ de tenseurs réguliers $g_{\alpha\beta}$ crée un isomorphisme naturel entre l'espace vectoriel tangent en un point et son dual : les équations (1) expriment que le transport d'un vecteur contravariant relativement à $L^\alpha_{\beta\gamma}$ et le transport d'un vecteur covariant relativement à la connexion transposée $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\gamma\beta}$ sont compatibles avec cet isomorphisme. Il suit de là un antiisomorphisme naturel entre les groupes d'holonomie des deux connexions et l'on retrouve une relation connue depuis longtemps entre les tenseurs de courbure de L et de $\bar{L}$. Mais on s'aperçoit que la propriété de transport que nous venons d'énoncer est vraie plus généralement pour deux connexions associées par l'intermédiaire d'un tenseur deux fois covariant par la relation

$$\omega^{*\alpha}_\beta = \omega^\alpha_\beta + g^{\lambda\alpha} \mathrm{D} g_{\lambda\beta},$$

(1) exprime que $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et $\bar{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont associées par l'intermédiaire de $g_{\alpha\beta}$. Nous rejoignons ainsi des travaux récents de Mme Cattaneo [3], [4] qui rencontrait des connexions associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier de type 1-1 en étudiant les connexions infinitésimales sur l'espace fibré des repères affines [*cf.* note (2), chap. I]. Considérant donc l'espace fibré des repères « coaffines » (un repère coaffine est la réunion d'un corepère linéaire et d'une forme différentielle linéaire jouant le rôle d'origine) il est facile de voir que l'ensemble du tenseur régulier $g_{\alpha\beta}$ et de la connexion linéaire $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ définit une connexion infinitésimale sur cet espace fibré, connexion que nous appelons coaffine. Nous avons ainsi « unifié » les données géométriques de la théorie qui ne comportent plus qu'une variété différentiable à quatre dimensions, munie d'une connexion coaffine fondamentale particularisée par le principe variationnel.

Ces résultats géométriques constituent notre première partie. Ils sont précédés de deux chapitres d'exposition : le chapitre I traite des connexions infinitésimales sur un espace fibré principal dans un formalisme assez général et abstrait pour s'appliquer à la fois aux connexions linéaires et coaffines; le chapitre II est un bref résumé, sans calculs détaillés, des notions de base de la théorie: nous avons adopté les notations de Lichnerowicz [21] qui sont celles de notre initiation aux théories unitaires, et c'est là la seule raison qui nous a fait les préférer.

La deuxième partie traite du problème de Cauchy; au chapitre IV nous avons défini les coordonnées isothermes et établi nos identités fondamentales; modulo des fonctions additives des dérivées premières des potentiels et en coordonnées isothermes, nous avons

$$(6) \qquad P_{\rho\lambda}g^{\rho\beta}g_{\beta\mu} + P_{\mu\rho}g^{\beta\rho}g_{\lambda\beta} \sim - l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu} - m^{\alpha\rho}P^{\beta}{}_{\lambda\alpha\rho}g_{\beta\mu}$$

qui généralisent les identités correspondantes en géométrie riemannienne

$$2G_{\lambda\mu} \sim - a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}a_{\lambda\mu},$$

il est remarquable que les termes contenant des dérivées premières, non écrits ici, soient les mêmes dans les deux cas, à la place près des indices [*cf.* (22.6) et (23.11)]. Au chapitre V nous reprenons le problème de Cauchy suivant la méthode de Lichnerowicz; la formule (6) apporte une légère simplification au calcul de $\partial_{00}g_{ij}$, à la fin. Nous mettons ainsi en évidence le cas exceptionnel qui n'avait pas encore été traité et qui se ramène à l'inversion du système linéaire

$$\partial_0 L^{h}_{ik}g_{hj} + \partial_0 L^{h}_{kj}g_{ih} = T_{ikj} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

où le second membre est connu, et $\det(g_{ij}) \neq 0$. Si $\det(h_{ij}) \neq 0$, ce système est justiciable des méthodes appliquées au système (1). Si $\det(h_{ij}) = 0$, un examen de trois des équations du système, écrites dans un repère particulier, montre rapidement que le système n'est pas inversible. Nous obtenons donc,

outre les caractéristiques solutions de (4), les solutions de

$$\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f = 0, \qquad \text{où} \quad \gamma^{\alpha\beta} = 2h/gh^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}, \tag{7}$$

$$h^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f = 0. \tag{8}$$

Le paragraphe 1 du chapitre VI, ne contient rien d'original dans le fond, sinon dans la forme : nous avons jugé qu'il pourrait être agréable de trouver là, justifiées dans le détail, les relations entre matrices et déterminants, instrument indispensable de tous les calculs en théorie unitaire; paragraphe 2, nous montrons que les hypersurfaces caractéristiques en un point enveloppent trois cônes du second ordre, sauf si

$$2h + 2k - g = 0.$$

Par des techniques de réduction de quadriques, on voit qu'il n'y a que deux cas possibles pour les positions relatives de ces trois cônes suivant le signe de $2h + 2k - g$; dans le cas qui rentre dans le domaine de l'interprétation physique ($k_{\alpha\beta}$ petit devant $h_{\alpha\beta}$), les trois cônes sont emboîtés, le cône extérieur correspondant à $\gamma_{\alpha\beta}$ et le cône intérieur à $l_{\alpha\beta}$; si $2h + 2k - g > 0$, les cônes correspondant à $l_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ gardent la même position relative, mais sont dans la région extérieure au troisième.

Nous abordons dans la troisième partie les problèmes d'interprétation physique. Le chapitre VII débute par un exposé des aspects relativistes de l'électromagnétisme dans la matière dont nous retiendrons essentiellement l'existence de deux cônes caractéristiques pour les équations de Maxwell et d'Einstein, et la continuité du vecteur courant électrique à la traversée d'une hypersurface où les dérivées obliques du champ peuvent être discontinues. Passant à la théorie unitaire, nous remplaçons le système (1), (3) par (3) et nos identités fondamentales, et en nous appuyant sur les idées que nous venons d'énoncer, nous proposons de choisir le tenseur champ de manière que (2) traduisent l'existence d'un potentiel vecteur pour $H_{\alpha\beta}$

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu}\sqrt{-g}\,m^{\lambda\mu} \tag{9}$$

et que, dans un des groupes d'équations du nouveau système, le tenseur induction bloque les termes contenant des dérivées de l'ordre le plus élevé, tandis que le reste définit un vecteur courant électrique. On obtient

$$K^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\,\underset{+-}{\Delta}\,k_{\lambda\mu}, \tag{10}$$

$\underset{+-}{\Delta}$ est un laplacien généralisé.

Au chapitre VIII, nous mettons l'autre groupe d'équations de notre système sous la forme (5); il est facile de voir sur l'expression (6) comment apparaît, par soustraction aux deux membres de la quantité $\frac{1}{2}\,g_{\lambda\mu}P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, d'une part le

tenseur

$$\mathfrak{C}_{\lambda\mu} = P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\lambda\rho} - \frac{h_{\lambda\mu}}{2} P_{[\alpha\beta]} m^{\alpha\beta} \tag{11}$$

qui s'identifiera au tenseur de Maxwell de la théorie « naïve » défini à partir de (9) et (10), d'autre part le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$ par l'intermédiaire du terme

$$-\sqrt{-g}\, l^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} \frac{g_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}},$$

pour poursuivre, nous précisons les hypothèses de champ faible que nous adoptons; on peut alors exhiber le tenseur d'impulsion-énergie extrait des équations du champ, avec une métrique proportionnelle à $\gamma_{\alpha\beta}$; notre méthode permet de constater l'existence de tenseurs autres que (11) parfaitement indépendants de la métrique choisie et même des hypothèses d'approximation.

Je suis profondément reconnaissante à M. Lichnerowicz pour son aide et sa bienveillance et je remercie vivement M^me^ Tonnelat qui m'a toujours aimablement conseillée.

Notations et symboles.

α et tout indice grec $= 0, 1, 2, 3$; $\qquad \partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$.
i et tout indice latin $= 1, 2, 3$;

L'indice 0 désigne la variable de temps dans les paragraphes où l'on a défini un tenseur métrique; dans les autres paragraphes, il est relatif au carré précédé du signe + de la forme hyperbolique normale

$$\Phi(u) = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta.$$

Tenseur fondamental :

$l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)}$,	partie symétrique de $g^{\alpha\beta}$	$l =$	déterminant $(l_{\alpha\beta})$;
$m^{\alpha\beta} = g^{[\alpha\beta]}$,	» antisymétrique de $g^{\alpha\beta}$	$m =$	» $(m_{\alpha\beta})$;
$h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}$,	» symétrique de $g_{\alpha\beta}$	$h =$	» $(h_{\alpha\beta})$;
$k_{\alpha\beta} = g_{[\alpha\beta]}$,	» antisymétrique de $g_{\alpha\beta}$	$k =$	» $(k_{\alpha\beta})$.

$l^{\alpha\beta}$ et $l_{\alpha\beta}$ sont toujours deux tenseurs associés, c'est-à-dire tels que

$$l^{\alpha\rho} l_{\beta\rho} = l^{\rho\alpha} l_{\rho\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

et $\delta^\alpha_\beta = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $= 1$ pour $\beta = \alpha$.

Connexion :

	Linéaire arbitraire	Linéaire à vecteur covariant de torsion nul
	$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$L^{\alpha}_{\beta\gamma}$
Tenseur de torsion	$\Sigma^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$S^{\alpha}_{\beta\gamma}$
Vecteur de torsion.....	Σ_{β}	$S_{\beta} = 0$
Dérivation covariante	d_{ρ}	D_{ρ}
Tenseur de courbure.....	$R^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}$	$P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}$
Tenseur de Ricci.....	$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\alpha,\lambda\beta}$	$P_{\alpha\beta} = P^{\lambda}_{\alpha,\lambda\beta}$
Coordonnées isothermes.....		$F^{\rho} = g^{\alpha\beta} L^{\rho}_{\alpha\beta} = 0$

Sur une variété riemannienne :

Tenseur métrique : $a_{\alpha\beta}$;

Connexion : $\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_a$ et $[\alpha\beta, \gamma]_a$;

Dérivation covariante : $\overset{a}{\nabla}_{\rho}$;

Tenseur de courbure : $G^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu}$;

Tenseur de Ricci : $G_{\alpha\beta}$;

Coordonnées isothermes : $f^{\alpha}_{a} \equiv a^{\rho\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\}_a = 0$.

La lettre a n'est pas indiquée à côté de l'accolade, du crochet, au-dessus du ∇, à côté du f quand il n'y a pas de confusion possible.

PREMIÈRE PARTIE.

LES ÉQUATIONS DU CHAMP.

CHAPITRE I.

Quelques généralités sur les connexions infinitésimales.

1. Espace fibré principal différentiable. — Nous supposons connus les axiomes de la structure de variété différentiable C^r sur un espace topologique séparé connexe. Dans tout ce paragraphe, et pour simplifier, la différentiabilité sera C^{∞}. Soit une variété différentiable V_n de dimension n et un groupe de Lie G; on dit qu'une variété différentiable E est un espace fibré principal si les

conditions suivantes sont remplies :

1° G (groupe structural) opère différentiablement et effectivement sur E

$$(z, g) \in E \times G \to zg \in E,$$

le point zh sera aussi noté $D_g z$.

2° V_n (base) est l'espace quotient de E par la relation d'équivalence induite par G et l'application canonique p est différentiable et de rang n.

3° E est localement trivial : tout point x de V_n a un voisinage ouvert U; tel que $p^{-1}(U)$ et $U \times G$ se correspondent dans un isomorphisme différentiable, plus précisément, x étant fixé, si $\gamma \in G$ et $z \in \bar{p}^{-1}(x)$ sont homologues, γg et zg le sont aussi; $\bar{p}^{-1}(x)$ est la fibre F_x au-dessus de x; un vecteur tangent à une fibre est dit vertical. On déduit de là un isomorphisme entre l'algèbre de Lie L de G et une algèbre de Lie de champs de vecteurs verticaux : à un vecteur vertical en z correspond un vecteur tangent à G en γ, soit θ_γ; ce vecteur, transporté par translation à gauche (G est considéré comme opérant sur lui-même à gauche) donne, en l'identité de G, un élément $\lambda = \bar{\gamma}^{-1}\theta_\gamma$ de l'algèbre de Lie de G; l'opération inverse fait correspondre à $\gamma \in L$ un vecteur vertical en z, $\tau(z)$, noté aussi $z\lambda$.

2. Connexion infinitésimale sur un espace fibré principal. — Rappelons, sans démonstration d'équivalence, les trois définitions :

A. Soit Θ_z l'espace vectoriel tangent à E en z, et V_z le sous-espace vectoriel tangent à la fibre en z; une connexion infinitésimale sur E est donnée par un champ de sous-espaces vectoriels $\mathcal{H}_z$ de Θ_z tels que :

1° Θ_z est la somme directe de V_z et $\mathcal{H}_z$. Les vecteurs de $\mathcal{H}_z$ sont dits horizontaux. Tout vecteur τ de Θ_z est la somme de sa partie verticale $V\tau$ et de sa partie horizontale $\mathcal{H}\tau$;

2° $\mathcal{H}_z$ dépend différentiablement de z;

3° $\mathcal{H}_z$ est invariant par G.

B. Une connexion infinitésimale sur E peut encore être définie par une 1-forme ω sur E à valeurs dans L : si $\tau \in \Theta_z$ et si λ est l'élément de L engendré par $V\tau$, $\omega(V\sigma) = \lambda$. ω satisfait aux trois propriétés :

1° si τ est vertical, $\omega(\tau)$ est l'élément de L engendré par τ;

2° ω dépend différentiablement de z;

3° $\omega(D_g\tau) = \mathrm{adj}(\bar{g}^{-1})\omega(\tau)$.

C. *Définition locale.* — Une section locale d'un espace fibré est une application différentiable d'un ouvert U de V_n dans $\bar{p}^{-1}(U)$: une telle section locale existe toujours d'après (1, 3°). Considérons un recouvrement de V_n par des

voisinages U_i, et au-dessus de chaque voisinage, prenons une section locale de E définie par $z_i(x)$. Pour $x \in U_i \cap U_j$, il existe un élément $g_{ij}(x)$ de G tel que

$$z_j(x) = z_i(x)\, g_{ij}(x) \tag{2.1}$$

au vecteur dx tangent en x à V_n correspondent des vecteurs dz_i et dz_j tangents à E en z_i et z_j tels que

$$p\, dz_i = p\, dz_j = dx$$

et un vecteur dg_{ij} tangent à G en g_{ij}. Posons

$$\omega_i(dx) = \omega(dz_i) \tag{2.2}$$

en différentiant (2.1) et en prenant la valeur de ω pour le vecteur en z_j défini par chacun des deux membres, on obtient

$$\omega(dz_j) = (\mathrm{adj}\, \bar{g}_{ij}^{1})\, \omega(dz_i) + \bar{g}_{ij}^{1}\, dg_{ij}, \tag{2.3}$$

soit, d'après (2.2), la condition dite « de cohérence »

$$\omega_j = (\mathrm{adj}\, \bar{g}_{ij}^{1})\, \omega_i + \bar{g}_{ij}^{1}\, dg_{ij}. \tag{2.4}$$

Une connexion infinitésimale sur E est définie, pour un recouvrement U_i de V_n muni de sections locales, par un système de formes locales ω_i de V_n à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe structural, et satisfaisant à (2.4).

Enfin, on voit facilement, d'après la définition B, qu'étant donné une connexion ω sur E, on peut obtenir toutes les autres par addition à ω d'une forme tensorielle à valeurs dans L, de type adjoint.

3. Développement, transport, groupe d'holonomie. — Considérons sur V_n un chemin arbitraire $x(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$: le problème se pose naturellement de l'existence et de l'unicité d'un chemin horizontal (c'est-à-dire à tangentes horizontales) au-dessus de $x(t)$; supposons-le résolu et définissons ce chemin à partir d'un chemin quelconque $z(t)$ au-dessus de $x(t)$ par

$$z'(t) = z(t)\, g^{1}(t);$$

de même qu'au paragraphe 2, on déduisait (2.3) de (2.1), on obtient

$$\omega_z(dz) = (\mathrm{adj}\, \bar{g}^{1})\, \omega_{z'}(dz') + \bar{g}^{1}\, dg,$$

donc, pour que dz' soit horizontal, il faut et il suffit que $g(t)$ satisfasse à

$$\bar{g}^{1}\, dg = \omega_z(dz), \tag{3.1}$$

la solution de (3.1) telle que $g(0) = g_0$ est dite le développement du chemin $z(t)$ sur G à partir de g_0; g_0 étant arbitraire, on voit qu'au-dessus de tout chemin $x(t)$ de V_n, il existe un chemin horizontal et un seul de E issu d'un point arbitraire de la fibre F_{x_0}.

On appelle transport le long du chemin $x(t)(0 \leq t \leq 1)$ l'application différentiable de F_{x_0} sur F_{x_1} qui, au point z_0 de F_{x_0}, fait correspondre le point z_1 de F_{x_1}, extrémité du chemin horizontal $z(t)$ de E au-dessus de $x(t)$, issu de z_0. Étant donné un point z de E, on appelle groupe d'holonomie ψ_z de la connexion en ce point l'ensemble des éléments g de G tels que z et $z\bar{g}^1$ puissent être reliés par un chemin horizontal : dans le langage du transport, on peut dire que le lacet l_x de V_n induit l'élément g du groupe d'holonomie ψ_z si le transport le long de l_x fait correspondre à l'élément z de F_x l'élément $z\bar{g}^1$ de la même fibre.

4. Différentielle absolue, courbure. — Nous nous contenterons de rappeler très brièvement les définitions. Étant donné une q-forme τ sur E à valeurs dans un espace vectoriel M, on appelle différentielle absolue de la forme τ relativement à une connexion infinitésimale, et l'on désigne par ∇_τ, la $q+1$-forme à valeurs dans M définie par

$$\nabla_\tau(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_q) = d\tau(\mathcal{H}\tau_0, \mathcal{H}\tau_1, \ldots, \mathcal{H}\tau_q),$$

où $d\tau$ est la différentielle extérieure de la forme τ, et $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_q$, $q+1$ vecteurs de Θ_z; si τ est une q-forme tensorielle de type $R(G)$, ∇_τ est une $q+1$-forme tensorielle du même type; si l'on prend la différentielle absolue de la forme de connexion elle-même, on obtient une 2-forme de type adjoint, qui est tensorielle bien que ω ne le soit pas : c'est la forme de courbure de la connexion

$$\Omega = \nabla_\omega.$$

On établit à partir de la définition du ∇ la formule

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega]. \tag{4.1}$$

5. Connexion linéaire. — Un exemple simple d'espace fibré principal différentiable est donné par la réunion de l'ensemble des repères R^x d'origine x sur V_n quand x parcourt V_n

$$E(V_n) = \bigcup_{x \in V_n} R^x,$$

la structure de variété difiérentiable peut être définie de la manière suivante : si (x^α) est un système de coordonnées locales de V_n, $R^x \in V_n$ aura pour coordonnées les coordonnées locales de son origine x et la matrice qui définit R^x par rapport au repère naturel en x. Le groupe structural G est le groupe linéaire; identifié au groupe des matrices $(n \times n)$ il opère à droite sur $E(V_n)$ suivant

$$R'^x = R^x A$$

[R^x est considéré comme la matrice à une colonne $e_\alpha(\alpha = 1, \ldots, n)$ et l'on

convient désormais que la multiplication s'effectue colonnes par lignes]. La projection canonique fait correspondre à un repère son origine. La fibre au-dessus de x est l'ensemble des repères de l'espace vectoriel T_x tangent à V_n en x; un élément λ de l'algèbre de Lie du groupe linéaire est représenté par une matrice $n \times n$ par rapport à R^x.

On appelle connexion linéaire sur V_n une connexion infinitésimale sur $E(V_n)$ (2). Pour expliciter la théorie générale dans ce cas particulier, nous utiliserons le formalisme local (*cf.* § 2, C). Étant donné un recouvrement de V_n par des voisinages ouverts U munis de repères linéaires, une connexion linéaire est définie relativement à un repère $R^x{}_U$ par un ensemble de formes locales ω_U à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire; si, pour $x \in U \cap V$,

$$R^x{}_V = R^x{}_U A^U_V(x) \quad [cf. (2.1)],$$

ces formes locales satisfont à la condition de cohérence

$$\omega_V = \bar{A}^U_V \omega_U A^U_V + \bar{A}^U_V dA^U_V \quad [cf. (2.4)], \tag{5.1}$$

les corepères duaux de $R^x{}_V$ et $R^x{}_U$, représentés par une matrice à une ligne, sont tels que

$$\theta^V_x = A^V_U(x)\, \theta^U_x, \tag{5.2}$$

où A^V_U est la matrice inverse de A^U_V.

Prenons la différentielle extérieure des deux membres de (5,2) et formons la matrice à une ligne, d'éléments les 2-formes

$$\Sigma^U = d\theta^U + \omega_U \wedge \theta^U \quad \text{pour} \quad x \in U.$$

Il résulte de (5.1) et (5.2) que les Σ^U définissent une 2-forme vectorielle contravariante, car pour $x \in U \cap V$,

$$\Sigma^V = A^V_U \Sigma^U,$$

la forme Σ s'appelle la forme de torsion de la connexion; si le voisinage U est muni des coordonnées locales (x^α) la matrice ω_U a pour éléments les ω^α_β et Σ a pour composantes

$$\Sigma^\alpha = \omega^\alpha_\rho \wedge dx^\rho.$$

Introduisons les $L^\alpha_{\beta\gamma}$, coefficients de la connexion en coordonnées locales

$$\omega^\alpha_\beta = L^\alpha_{\beta\gamma}\, dx^\gamma,$$

alors le tenseur canoniquement associé à la forme de torsion (au facteur $-\frac{1}{2}$

(2) C'est-à-dire qu'on nommait généralement une connexion affine; suivant Lichnerowicz [6], nous réserverons le nom d'affine à une connexion infinitésimale sur un espace fibré dont le groupe structural est le groupe affine.

près) a pour composantes

$$S^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(L^{\gamma}_{\alpha\beta} - L^{\gamma}_{\beta\alpha}),$$

$S^{\gamma}_{\alpha\beta}$ porte le nom de tenseur de torsion; par contraction, on en déduit le vecteur covariant de torsion

$$S_{\alpha} = \frac{1}{2}(L^{\rho}_{\alpha\rho} - L^{\rho}_{\rho\alpha}).$$

Soit un tenseur de type R(G) défini par des fonctions locales à valeurs dans un espace vectoriel M

$$t_V(x) = R(A^V_U)\, t_U(x) \qquad \text{pour} \quad x \in U \cap V$$

Si $\tilde{R}$ est la représentation de l'algèbre de Lie du groupe linéaire induite par R, on montre que la différentielle absolue de la o-forme tensorielle t est définie par

$$\nabla t_U = dt_U + \tilde{R}(\omega_U)\, t_U; \tag{5.3}$$

par exemple, pour un vecteur covariant φ,

$$\varphi_V = \varphi_U A^U_V$$

la représentation concernée de G fait correspondre à l'élément A^V_U de G l'endomorphisme de M représenté par A^U_V : ce passage à l'inverse se traduit par un passage à l'opposé pour l'élément ω_U de L, et

$$\nabla \varphi_U = d\varphi_U - \varphi_U \omega_U; \tag{5.4}$$

en coordonnées locales, le tenseur associé à cette 1-forme, ou dérivée covariante du vecteur φ, a pour composantes

$$\nabla_{\gamma} \varphi_{\alpha} = \partial_{\gamma} \varphi_{\alpha} - L^{\rho}_{\alpha\gamma} \varphi_{\rho}.$$

Explicitons maintenant la formule (4.1) qui donne la 2-forme de courbure; en utilisant la définition du crochet pour des formes à valeurs dans un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre de Lie [ici l'algèbre de Lie des matrices $(n \times n)$], on trouve

$$[\omega, \omega]^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\rho} \wedge \omega^{\rho}_{\beta}.$$

Il vient

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = d\omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{\rho} \wedge \omega^{\rho}_{\beta}$$

et le tenseur canoniquement associé a pour composantes en coordonnées locales

$$P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu} = \partial_{\lambda} L^{\alpha}_{\beta\mu} - \partial_{\mu} L^{\alpha}_{\beta\lambda} + L^{\alpha}_{\rho\lambda} L^{\rho}_{\beta\mu} - L^{\alpha}_{\rho\mu} L^{\rho}_{\beta\lambda}. \tag{5.5}$$

Sur ce tenseur d'ordre 4, l'opération de contraction permet de définir deux

tenseurs covariants :

a. en α et λ, on obtient le tenseur de Ricci

$$P_{\lambda\mu} = \partial_\rho L^\rho_{\lambda\mu} - \partial_\mu L^\rho_{\lambda\rho} + L^\rho_{\sigma\rho} L^\sigma_{\lambda\mu} - L^\rho_{\sigma\mu} L^\sigma_{\lambda\rho}; \tag{5.6}$$

b. en α et β, « le tenseur contracté antisymétrique de courbure »

$$V_{\lambda\mu} = \partial_\lambda L^\rho_{\rho\mu} - \partial_\mu L^\rho_{\lambda\rho} \tag{5.7}$$

entre dérivées covariantes secondes, courbure et torsion relatifs à une connexion linéaire, existent des relations, que nous utiliserons fréquemment par la suite, appelées identités de Ricci. Pour un tenseur $t_{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}^{\beta_1 \dots \beta_q}$,

$$\begin{aligned} &\nabla_\lambda \nabla_\mu t_{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}^{\beta_1 \dots \beta_q} - \nabla_\mu \nabla_\lambda t_{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}^{\beta_1 \dots \beta_q} \\ &\quad = -\sum_i P^\rho{}_{\alpha_i \lambda\mu} t_{\alpha_1 \dots \rho \dots \alpha_p}{}^{\beta_1 \dots \beta_q} + \sum_j P^{\beta_j}{}_{\rho,\lambda\mu} t_{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}^{\beta_1 \dots \rho \dots \beta_q} + 2 S^\rho_{\lambda\mu} \nabla_\rho t_{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}^{\beta_1 \dots \beta_q}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pour terminer, ajoutons quelques mots sur le transport le long d'un chemin $x(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ sur une variété V_n munie d'une connexion linéaire : c'est un isomorphisme de T_{x_0} sur $T_{x(t)}$ qui, au repère $R_{(0)}$ fait correspondre le repère $R_{(t)}$ de manière que le chemin $R(t)$ au-dessus de $x(t)$ soit horizontal; on en déduit la définition du transport d'un tenseur de type R(G) : si $\mathfrak{T}_{R_{(0)}}$ sont les composantes de ce tenseur par rapport à $R_{(0)}$, les composantes du tenseur image dans le transport au point $x(t)$ par rapport au repère $R_{(t)}$ sont

$$\mathfrak{T}_{R(t)} = \mathfrak{T}_{R(0)}.$$

Donc, le long du chemin $R(t)$, $d\mathfrak{T}_{R(t)} = 0$. D'autre part, $\omega(dR(t)) = 0$, puisque $R(t)$ est horizontal; de (5.3) on déduit alors

$$\nabla \mathfrak{T}_{R(t)} = 0 \tag{5.9}$$

et réciproquement : si $\mathfrak{T}_{R(t)}$ satisfait à (5.9), le tenseur $\mathfrak{T}$ a bien été transporté de $x(0)$ à $x(t)$. Et puisque $\nabla\mathfrak{T}$ est une forme tensorielle, on peut supprimer dans (5.9) l'indice du repère, et dire : pour transporter un tenseur donné $\mathfrak{T}_0$ en x_0 le long de $x(t)$, il suffit de chercher la solution du système différentiel

$$\nabla \mathfrak{T} = 0 \tag{5.10}$$

le long de $x(t)$, qui prend la valeur $\mathfrak{T}_0$ en x_0.

CHAPITRE II.

Les bases de la théorie unitaire du champ d'Einstein.

6. La variété fondamentale V_4. — Sur une variété différentiable V_4 à quatre dimensions, nous nous donnons indépendamment une connexion linéaire de coefficients $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ et un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$.

La variété différentiable est de classe C^2, C^4 par morceaux, comme en relativité générale; l'expression « C^4 par morceaux » signifie que, dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées admissibles les dérivés secondes continues du changement de coordonnées admettent encore la classe C^2, excepté dans le voisinage d'un nombre fini de surfaces de discontinuité; les discontinuités sont alors du type de Hamadard.

La connexion linéaire est arbitraire; nous désignerons par $\Sigma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ son tenseur de torsion, par Σ_{β} son vecteur covariant de torsion, par $R_{\alpha\beta}$ son tenseur de Ricci. Des hypothèses sur la différentiabilité de V_4 et des formules de changement de coordonnées pour les coefficients d'une connexion linéaire, il suit qu'il faut supposer les $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ continus et de classe C^2_1 par morceaux. De même, le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ devra être de classe C^1, C^3 par morceaux. Il devra, en outre, satisfaire aux hypothèses suivantes :

a. $g = \det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$; on dit que le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est régulier;

b. La forme quadratique $\Phi(u) = g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$ est non dégénérée et de type hyperbolique normal à un carré positif et trois carrés négatifs.

L'hypothèse *a* entraîne immédiatement l'existence d'un tenseur $g^{\alpha\beta}$ tel que

$$g_{\alpha\rho}g^{\beta\rho} = g_{\rho\alpha}g^{\rho\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{6.1}$$

$g^{\alpha\beta}$ sera dit le tenseur associé de $g_{\alpha\beta}$. Dans toute la suite, deux tenseurs associés, l'un covariant, l'autre contravariant, seront désignés par la même lettre d'appui, et le déterminant de la matrice des composantes du tenseur *covariant* sera désigné par cette même lettre.

7. Premières propriétés des tenseurs déduits du tenseur fondamental par symétrisation et antisymétrisation. — Nous poserons

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}, \qquad g^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}, \tag{7.1}$$

où (3)

$$h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}, \quad k_{\alpha\beta} = g_{[\alpha\beta]}, \qquad l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)}, \qquad m^{\alpha\beta} = g^{[\alpha\beta]}.$$

Nous allons montrer ([21], p. 491), que l'hypothèse *b* entraîne la régularité des deux tenseurs $h_{\alpha\beta}$ et $l^{\alpha\beta}$. D'après (7.1),

$$\Phi(u) = h_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}, \tag{7.2}$$

$\Phi(u)$ étant non dégénérée, de type hyperbolique normal à un carré positif et trois carrés négatifs

$$h = \det(h_{\alpha\beta}) < 0$$

(3) L'opération de symétrisation (resp. antisymétrisation) d'un tenseur par rapport à deux indices sera notée par des parenthèses (resp. crochets) comprenant les deux indices.

et en particulier $h \neq 0$, ce qui assure l'existence de $h^{\alpha\beta}$. D'autre part, d'après (6.1),

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g^{\lambda\mu},$$

en symétrisant, il vient

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + g_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu}) g^{\lambda\mu}$$

$$\frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} (g^{\lambda\mu} + g^{\mu\lambda}) = g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} l^{\lambda\mu},$$

remplaçons $h_{\alpha\beta}$ par cette dernière expression dans (7.2),

$$\Phi(u) = l^{\lambda\mu} g_{\alpha\lambda} u^{\alpha} g_{\beta\mu} u^{\beta},$$

au vecteur contravariant u associons le vecteur covariant de composantes

$$v_{\lambda} = g_{\alpha\lambda} u^{\alpha}. \tag{7.3}$$

$g_{\alpha\beta}$ étant régulier, la correspondance entre u et v est un isomorphisme de l'espace vectoriel T_x tangent en x à V_4 sur son dual T_x^*, isomorphisme que nous aurons l'occasion d'étudier au chapitre III. Pour u et v liés par (7.3),

$$\Psi(v) \equiv l^{\lambda\mu} v_{\lambda} v_{\mu} = h_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} \equiv \Phi(u),$$

$\Psi(v)$ est donc aussi non dégénérée et de signature $+---$ et $\det(l^{\alpha\beta}) < 0$, d'où l'existence de $l_{\alpha\beta}$ avec $l = \det(l_{\alpha\beta}) \neq 0$. Nous étudierons en détail au chapitre VI les formules, compliquées malgré la simplicité du point de départ, qui permettent le passage effectif de $h_{\alpha\beta}$ et $k_{\alpha\beta}$ à $l^{\alpha\beta}$ et $m^{\alpha\beta}$.

8. Le principe variationnel. — On impose au tenseur fondamental et à la connexion linéaire donnés de satisfaire à des équations, dites équations du champ, déduites d'un principe variationnel comme en relativité générale. Soit C une chaîne différentiable de dimension 4 de la variété V_4. Considérons l'intégrale à valeurs scalaires

$$I = \int_C g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3.$$

Principe. — Les équations du champ de la théorie sont celles qui définissent l'extremum de l'intégrale I vis-à-vis de toutes les variations du tenseur fondamental et de la connexion astreintes seulement à s'annuler au bord de C.

La variation de I, soit δI, est due aux variations indépendantes $\delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et $\delta g_{\alpha\beta}$, ce que nous mettons en évidence en décomposant

$$\delta I = \delta_1 I + \delta_2 I,$$

$$\delta_1 I = \int_C g^{\alpha\beta}\, \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3,$$

$$\delta_2 I = \int R_{\alpha\beta}\, \delta\left(g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\right) dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3.$$

Introduisons la notation

$$\gamma_\rho = \frac{\partial_\rho \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\rho g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta}, \tag{8.1}$$

on trouve (4)

$$\delta_1 \mathrm{I} = -\int_\Omega (\mathrm{G}_\rho^{\alpha\beta} - \delta_\rho^\beta \mathrm{G}_\lambda^{\alpha\lambda}) \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\rho \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

où

$$\mathrm{G}_\rho^{\alpha\beta} \equiv d_\rho g^{\alpha\beta} - (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho) g^{\alpha\beta} + 2 g^{\alpha\sigma} \Sigma_{\rho\sigma}^\beta + \frac{2}{3} \delta_\rho^\beta g^{\alpha\sigma} \Sigma_\sigma.$$

Donc, pour une variation des coefficients de la connexion linéaire sans variation du tenseur fondamental, $\delta \mathrm{I} = \delta_1 \mathrm{I}$ et le principe variationnel fournit les équations

$$\mathrm{G}_\rho^{\alpha\beta} = 0. \tag{8.2}$$

D'autre part, il est facile de vérifier que la donnée de la densité tensorielle $\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\sqrt{|g|}$ est équivalente à la donnée du tenseur $g_{\alpha\beta}$. Alors, si l'on varie arbitrairement $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ sans varier la connexion affine, $\delta_2 \mathrm{I}$ seule doit être nulle, ce qui entraîne

$$\mathrm{R}_{\alpha\beta} = 0, \tag{8.3}$$

(8.2) et (8.3) constituent le système des équations du champ.

9. Les équations du champ. — Nous allons modifier ce système initial en remplaçant $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ par la connexion à vecteur covariant de torsion nul qui définit le même paralléllisme, soit

$$\mathrm{L}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{2}{3} \delta_\beta^\alpha \Sigma_\gamma, \qquad \mathrm{S}_\beta = \mathrm{L}_{[\beta\alpha]}^\alpha = 0, \tag{9.1}$$

le calcul donne, en ce qui concerne le système (8.2),

$$\mathrm{G}_\rho^{\alpha\beta} = \partial_\rho g^{\alpha\beta} + \mathrm{L}_{\sigma\rho}^\alpha g^{\sigma\beta} + \mathrm{L}_{\rho\sigma}^\beta g^{\alpha\sigma} - (\mathrm{L}_{\sigma\rho}^\sigma - \gamma_\rho) g^{\alpha\beta} = 0; \tag{9.2}$$

en multipliant les deux membres de (9.2) par $g_{\alpha\beta}$ et en tenant compte de (8.1), il vient

$$\gamma_\rho = \mathrm{L}_{\sigma\rho}^\sigma = \mathrm{L}_{\rho\sigma}^\sigma.$$

Reportons dans (9.2)

$$\partial_\rho g^{\alpha\beta} + \mathrm{L}_{\sigma\rho}^\alpha g^{\sigma\beta} + \mathrm{L}_{\rho\sigma}^\beta g^{\alpha\sigma} = 0, \tag{9.3}$$

on montre aisément que (8.2) et (9.3), où la connexion L a un vecteur covariant de torsion nul, sont équivalents. Nous nommerons souvent (9.3) « équations de liaison » pour les distinguer de l'autre système d'équations

(4) Pour le détail des calculs, *voir* Lichnerowicz [21], p. 494-507.

de champ (8.3). Par multiplication par $g^{\lambda\beta}g^{\alpha\mu}$, les équations de liaison prennent encore la forme

$$\partial_\rho \mathcal{G}^{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\sigma\mu} - L^\sigma_{\rho\mu}\mathcal{G}^{\lambda\sigma} = 0. \tag{9.4}$$

Les quatre conditions qui expriment que le vecteur S_β est nul peuvent être remplacées par quatre autres portant sur le tenseur fondamental, qui sont

$$\partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho\beta]} = 0$$

[la démonstration utilise les deux contractions possible de (9.3) et essentiellement la condition $\det(l^{\alpha\beta}) \neq 0$].

Donc, chercher une connexion $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, fonction du tenseur fondamental et de ses dérivées satisfaisant au système (8.2), c'est chercher $L^\alpha_{\beta\gamma}$ solution de (9.4), les dérivées du tenseur fondamental étant supposées satisfaire aux quatre relations $\partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho\beta]} = 0$. Alors

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{2}{3}\delta^\alpha_\beta \Sigma_\gamma$$

où Σ_γ est un vecteur covariant arbitraire.

Passons maintenant au système (8.3). Substituons encore la connexion $L^\alpha_{\beta\lambda}$ à la connexion initiale suivant (9.1). Soit $P_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de la connexion L; d'après (5.6) appliqué à l'une et l'autre connexion,

$$R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha).$$

Nous adopterons dans la suite comme grandeurs déterminant le champ unitaire le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$, la connexion linéaire arbitraire $L^\alpha_{\beta\gamma}$ et le vecteur covariant Σ_α. Les équations du champ sont

$$\partial_\rho \mathcal{G}^{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\rho}g^{\sigma\mu} - L^\sigma_{\rho\mu}\mathcal{G}^{\lambda\sigma} = 0, \tag{9.5}$$

$$\partial_\rho \mathfrak{g}^{\rho\beta} = 0, \tag{9.6}$$

$$P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha) = 0. \tag{9.7}$$

10. Forme tensorielle des équations du champ. — Nous allons mettre (9.5) et (9.6) sous forme tensorielle. Appelons D_ρ le symbole de dérivation covariante relatif à la connexion L

$$D_\rho \mathcal{G}^{\lambda\mu} = \partial_\rho \mathcal{G}^{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\sigma\mu} - L^\sigma_{\mu\rho}\mathcal{G}^{\lambda\sigma},$$

les équations (9.5) s'écrivent

$$D_\rho \mathcal{G}^{\lambda\mu} + L^\sigma_{\mu\rho}\mathcal{G}^{\lambda\sigma} - L^\sigma_{\rho\mu}\mathcal{G}^{\lambda\sigma} = 0,$$

c'est-à-dire

$$D_\rho \mathcal{G}^{\lambda\mu} = 2S^\sigma_{\rho\mu}\mathcal{G}^{\lambda\sigma}.$$

Considérons maintenant (9.6). Soit

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g}\,m^{\gamma\delta}, \tag{10.2}$$

désignons par H la forme quadratique extérieure de composantes $H_{\alpha\beta}$. Calculons la quantité $\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\partial_\rho H_{\alpha\beta}$ qui, lorsque σ prend les valeurs 0, 1, 2, 3 donne les quatre composantes strictes de la forme dH

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\partial_\rho H_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\rho(\sqrt{-g}\,m^{\gamma\delta}) = \partial_\rho(\sqrt{-g}\,m^{\rho\sigma});$$

les équations (9.6) s'écrivent donc

$$d\mathrm{H} = 0 \tag{10.3}$$

et entraînent l'existence locale d'un potentiel vecteur pour $H_{\alpha\beta}$.

La forme (10.3) des équations du champ (9.6) donne une indication précieuse pour l'interprétation physique ultérieure.

11. Les identités de conservation. — Nous disposons d'exactement autant d'équations que d'inconnues, comme on a pu le constater par dénombrement des unes et des autres, à la fin du paragraphe 9. Puisque le choix du système de coordonnées permet de fixer quatre inconnues, c'est que nos équations ne sont pas indépendantes, mais vérifient identiquement quatre relations invariantes qu'on nomme identités de conservation; comme on a obtenu les équations du champ en annulant les variations d'une intégrale portant sur une densité scalaire, on peut appliquer, pour former ces identités, une méthode générale dont il serait trop long d'exposer ici le principe ([5]); nous nous contenterons de rappeler les résultats ;

1° Pour une connexion $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ et un tenseur $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant à (8.2),

$$\partial_\lambda \mathfrak{M}^\lambda_\rho + \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\alpha\beta}\,\partial_\rho \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0, \tag{11.1}$$

avec

$$\mathfrak{M}^\lambda_\rho = \sqrt{|g|}\,\mathrm{M}^\lambda_\rho, \qquad \mathrm{M}^\lambda_\rho = \mathrm{L}^\lambda_\rho - \frac{1}{2}\delta^\lambda_\rho \mathrm{L}^\xi_\xi,$$

où l'on a posé

$$2\mathrm{L}^\lambda_\rho = \mathrm{R}_{\rho\sigma}g^{\lambda\sigma} + \mathrm{R}_{\sigma\rho}g^{\sigma\lambda};$$

2° De même, pour $\mathrm{L}^\gamma_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant à (9.5) et (9.6),

$$\partial_\lambda \mathfrak{K}^\lambda_\rho + \frac{1}{2}\mathrm{P}_{\alpha\beta}\,\partial_\rho \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0, \tag{11.2}$$

([5]) Lichnerowicz [21], p. 503-507.

avec

$$\mathcal{K}_\rho^\lambda = \sqrt{|g|}\, K_\rho^\lambda, \qquad K_\rho^\lambda = H_\rho^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\rho^\lambda H_\xi^\xi,$$

où l'on a posé

$$2H_\rho^\lambda = P_{\rho\sigma}g^{\lambda\sigma} + P_{\sigma\rho}g^{\sigma\lambda}. \tag{11.3}$$

Rappelons les identités de conservation en relativité générale : soit $a_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique, $G_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de la variété riemannienne correspondante,

$$S_\rho^\lambda = G_\rho^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\rho^\lambda G$$

est le tenseur d'Einstein qui satisfait identiquement à

$$\overset{a}{\nabla}_\lambda S_\rho^\lambda = 0, \tag{11.4}$$

où $\overset{a}{\nabla}$ est le symbole de différentiation absolue associé à la connexion riemannienne définie par le tenseur $a_{\alpha\beta}$. Il est facile de mettre (11.4) sous la forme

$$\partial_\lambda(S_\rho^\lambda\sqrt{-a}) + \frac{1}{2}G_{\alpha\beta}\,\partial_\rho(a^{\alpha\beta}\sqrt{-a}) = 0,$$

la comparaison avec (11.1) et (11.2) conduit à penser que M_ρ^λ ou K_ρ^λ doivent tenir un rôle analogue à celui du tenseur d'Einstein dans l'interprétation physique.

CHAPITRE III.

Connexions infinitésimales et théorie unitaire.

La théorie d'Einstein-Schrödinger, théorie à connexion affine : c'est l'expression souvent employée pour la distinguer d'autres théories unitaires, et en effet, nous allons montrer, dans cet essai de géométrisation, le rôle primordial joué par la notion de connexion infinitésimale.

Dans ce chapitre, nous nous efforcerons de réaliser une synthèse des données mathématiques de la théorie, et de parvenir ainsi à une meilleure compréhension des résultats acquis.

I. — Interprétation géométrique du système des équations de liaison.

Rappelons que nous avons désigné par là le système (9.3) reliant le tenseur fondamental et la connexion. M.-A. Tonnelat [27], puis indépendamment Hlavatý [18] par des méthodes un peu dfférentes, ont montré que ces équations, considérées comme aux inconnues $L_{\beta\gamma}^z$, admettaient une solution et une seule sur une variété V_4 satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 6, sauf dans un

cas exceptionnel. Donc, en général, (9.3) détermine univoquement la connexion linéaire $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ à partir du tenseur fondamental. Supposons un instant $g_{\alpha\beta}$ symétrique : la solution unique de (9.3) est évidemment constituée des coefficients de la connexion riemannienne associée à la métrique définie par $g_{\alpha\beta}$: alors, les équations de liaison expriment tout simplement que la différentielle absolue du tenseur métrique dans la connexion riemannienne associée est nulle; c'est encore traduire cette évidence que le transport d'un vecteur le long d'un chemin $x(t)$ de V_n peut se faire en transportant ses composantes covariantes aussi bien que contravariantes, car

$$\frac{\overset{*}{\nabla} v_\alpha}{dt} = 0$$

est strictement équivalente à

$$\frac{\overset{*}{\nabla} (g^{\alpha\beta} v_\beta)}{dt} = 0,$$

c'est cette dernière forme qui va se généraliser à un tenseur $g_{\alpha\beta}$ régulier, ne possédant aucune propriété de symétrie.

12. Une nouvelle forme du système des équations de liaison. — Réécrivons le système

$$\partial_\gamma g^{\alpha\beta} + L^{\alpha}_{\sigma\gamma} g^{\sigma\beta} + L^{\beta}_{\gamma\sigma} g^{\alpha\sigma} = 0, \tag{12.1}$$

Considérons, sur V_n, un champ de vecteurs covariants v_α (de classe C^1, C^2 par morceaux). Multiplions les deux membres de (12.1) par v_α et faisons passer v_α sous le signe ∂_γ au premier terme. Il vient

$$\partial_\gamma (g^{\alpha\beta} v_\alpha) + L^{\alpha}_{\sigma\gamma} g^{\sigma\beta} v_\beta - L^{\beta}_{\gamma\sigma} g^{\alpha\sigma} v_\beta - g^{\alpha\beta} \partial_\gamma v_\beta = 0 \tag{12.2}$$

Après échange du nom des indices de sommation β et σ au troisième terme, on peut mettre $g^{\alpha\beta}$ en facteurs dans les deux derniers termes du premier membre : quant aux deux premiers termes, leur somme constitue la dérivée covariante, relativement à la connexion $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ du vecteur contravariant $g^{\alpha\beta} v_\beta$; (12.2) s'écrit

$$D_\gamma (g^{\alpha\beta} v_\beta) - g^{\alpha\beta} (\partial_\gamma v_\beta - L^{\sigma}_{\beta\gamma} v_\sigma) = 0. \tag{12.3}$$

Introduisons la connexion linéaire dont les coefficients

$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} - L^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{12.4}$$

se déduisent de ceux de la connexion donnée par l'addition du tenseur deux fois covariant et une fois contravariant $2S^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Dans la suite, et nous verrons la raison de cette terminologie au paragraphe 17, la connexion ω de coefficients $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ donnés par (12.4) sera dite transposée par le principe d'hermiticité d'Einstein de la connexion ω de coefficients $L^{\alpha}_{\gamma\beta}$. Si D_γ est le symbole de déri-

vation covariante relatif à $\overline{\omega}$, (12.3) prend la forme

$$\mathrm{D}_\rho(g^{\alpha\beta}v_\beta) - g^{\alpha\beta}\,\overline{\mathrm{D}}_\rho v_\beta = 0. \tag{12.5}$$

Ce système est équivalent au système donné. Remarquons que ce système donné (12.1) est invariant par la transformation

$$g^{\alpha\beta} \to \overline{g}^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha},$$
$$\mathrm{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} \to \overline{\mathrm{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha}_{\gamma\beta}.$$

En opérant cette transformation (12.5), il vient encore la forme équivalente

$$\overline{\mathrm{D}}_\rho(g^{\beta\alpha}v_\beta) - g^{\beta\alpha}\,\mathrm{D}_\rho v_\beta = 0. \tag{12.6}$$

13. Transport d'un vecteur covariant et d'un vecteur contravariant reliés par le tenseur fondamental. — Nous nous trouvons naturellement conduite à considérer l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\downarrow : \quad v \to u,$$

où $v \in \mathrm{T}^*_x$ et $u \in \mathrm{T}_x$, défini par

$$\begin{cases} u^\alpha = g^{\alpha\lambda}v_\lambda, \\ v_\beta = g_{\lambda\beta}u^\lambda. \end{cases} \tag{13.1}$$

De manière analogue, nous définissons

$$\overline{\downarrow} : \quad v \in \mathrm{T}^*_x \to w \in \mathrm{T}_x,$$

où

$$\begin{cases} w^\alpha = g^{\lambda\alpha}v_\lambda, \\ v_\beta = g_{\beta\lambda}w^\lambda. \end{cases} \tag{13.2}$$

Considérons maintenant un chemin quelconque de V_n, $x(t)\,(0 \leq t \leq 1)$ et donnons-nous arbitrairement un vecteur initial $v_\beta(0)$ au point $x(0) = x_0$. Transportons ce vecteur relativement à la connexion $\overline{\omega}$ le long du chemin $x(t)$; c'est dire que nous devons intégrer le système différentiel

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}v_\beta}{dt} = 0 \tag{13.3}$$

pour les valeurs initiales $v_\beta(0)$. Or, d'après (12.5), si (13.3) est vérifié,

$$\frac{\mathrm{D}u^\alpha}{dt} = 0, \tag{13.4}$$

nous avons donc en même temps transporté le long de $x(t)$ relativement à ω le vecteur contravariant u associé à v par l'isomorphisme $\downarrow$. Réciproquement, si (13.3) entraîne (13.4) pour tout vecteur initial $v_\beta(0)$ et tout chemin $x(t)$, le tenseur fondamental et la connexion ω sont liés par le système (12.1). En

effet, d'après (13.3),

$$\dot{x}^\rho(\partial_\rho \varphi_\beta - L^\sigma_{\rho\beta}\varphi_\sigma) = 0, \tag{13.5}$$

où nous avons posé $\dot{x}^\rho = \frac{dx^\rho}{dt}$. De même, (13.4) où u^α a été remplacé par sa valeur en fonction de φ s'écrit

$$\dot{x}^\rho[\partial_\rho(g^{\alpha\beta}\varphi_\beta) + L^\alpha_{\sigma\rho}g^{\sigma\beta}\varphi_\beta] = 0. \tag{13.6}$$

Éliminons $\dot{x}^\rho \partial_\rho \varphi_\beta$ entre (13.5) et (13.6); il vient

$$\dot{x}^\rho \varphi_\beta(\partial_\rho g^{\alpha\beta} + L^\alpha_{\sigma\rho}g^{\sigma\beta} + L^\beta_{\rho\sigma}g^{\alpha\sigma}) = 0.$$

Ce système, vérifié quels que soient φ_β et $\dot{x}^\rho$, n'est autre que (12.1).

Théorème. — *Sur la variété V_4 satisfaisant aux hypothèses de la théorie unitaire du champ, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1° *le tenseur fondamental et la connexion sont liés par le système*

$$\partial_\rho g^{\alpha\beta} + L^\alpha_{\sigma\rho}g^{\sigma\beta} + L^\beta_{\rho\sigma}g^{\alpha\sigma} = 0;$$

2° *si l'on transporte un vecteur covariant arbitraire le long d'un chemin quelconque relativement à la connexion $\overline{\omega}$, le vecteur contravariant qui lui correspond dans l'isomorphisme $\Psi : \varphi \to u$, $u^\alpha = g^{\alpha\beta}\varphi_\beta$ est transporté le long de ce chemin relativement à ω.*

On obtient un énoncé analogue en remplaçant ω par $\overline{\omega}$, Ψ par $\overline{\Psi}$.

14. Une relation entre les groupes d'holonomie des deux connexions linéaires ω et $\overline{\omega}$. — Soient Ψ_x et $\overline{\Psi}_x$ les groupes d'holonomie homogènes en x des connexions ω et $\overline{\omega}$. Prenons pour chemin $x(t)$ un lacet en $x[x(0) = x(1) = x]$ et prenons un repère arbitraire en x, soit $R^x(0)$. Le transport le long de $x(t)$ relativement à $\overline{\omega}$ fait correspondre à $R^x(0)$ le repère $R^x(1)$ tel que

$$R^x(1) = R^x(0)(\overline{A})^{-1},$$

où $\overline{A}$ est, d'après les définitions du paragraphe 3, la matrice représentative de l'élément de $\overline{\Psi}$ induit par $x(t)$. Donnons-nous un vecteur covariant $\varphi(0)$ en x et transportons-le le long de $x(t)$; après transport, on a un vecteur $\varphi(1)$ en x; les composantes de $\varphi(1)$ relativement à $R^x(1)$ sont les mêmes que celles de $\varphi(0)$ relativement à $R^x(0)$, ce que nous écrivons

$$\varphi(1)_{R^x(1)} = \varphi(0)_{R^x(0)}.$$

Mais, φ étant covariant,

$$\varphi(0)_{R^x(1)} = \varphi(0)_{R^x(0)}(\overline{A})^{-1}$$

en rapportant $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ au même repère, puis supprimant l'indice du repère,

il vient

$$v(0) = v(1)\,(\overline{A})^{-1}. \tag{14.1}$$

Cherchons la relation qui lie les transformés par ψ_x de $v(0)$ et de $v(1)$, soient $u(0)$ et $u(1)$. Nous avons pour ces transformés, d'après (13.1) dans un repère quelconque,

$$u^\alpha(0) = g^{\alpha\beta}\, v_\beta(0),$$
$$v_\lambda(1) = g_{\rho\lambda}\, u^\rho(1)$$

et dans le même repère (14.1) s'écrit

$$v_\beta(0) = v_\lambda(1)\left[(\overline{A})^{-1}\right]^\lambda_\beta.$$

Il vient

$$u^\alpha(0) = g^{\alpha\beta} g_{\rho\lambda}\left[(\overline{A})^{-1}\right]^\lambda_\beta u^\rho(1). \tag{14.2}$$

D'autre part, tandis que nous transportions v le long de $x(t)$ relativement à $\overline{\omega}$, u subissait un transport relativement à ω; comme c'est un vecteur contravariant, et par un calcul analogue à celui qui mène (14.1)

$$u^\alpha(0) = A^\alpha_\rho\, u^\rho(1), \tag{14.3}$$

la comparaison de (14.2) et (14.3), vraies quel que soit $u(1)$, donne

$$A^\alpha_\rho = g^{\alpha\beta} g_{\rho\lambda}\left[(\overline{A})^{-1}\right]^\lambda_\beta$$

ou, sous une forme plus agréable, en remplaçant A par $\overline{A}$, $g^{\alpha\beta}$ par $\overline{g}^{\alpha\beta}$, nous obtenons en tout point x de V_4 la relation

$$\overline{A}^\alpha_\beta = g^{\sigma\alpha}(A^{-1})^\rho_\sigma g_{\rho\beta}. \tag{14.4}$$

Cette loi, qui associe à un élément de Ψ_x un élément de $\overline{\Psi}_x$, est un antiisomorphisme entre les deux groupes d'holonomie.

15. Connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier. — Sous la forme (10.1) et en isolant le tenseur de torsion, les équations de liaison sont

$$2\,S^\alpha_{\gamma\beta} = g^{\lambda\alpha}\, D_\gamma g_{\lambda\beta},$$

c'est-à-dire

$$\overline{L}^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\beta\gamma} + g^{\lambda\alpha}\, D_\gamma g_{\lambda\beta};$$

plus généralement, si deux connexions linéaires ω et ω^* sont telles que leurs formes locales diffèrent du tenseur $g^{\lambda\alpha}\,D g_{\lambda\beta}$ de type adjoint, où D est le symbole de différentiation absolue relatif à ω et où $g_{\alpha\beta}$ est un tenseur régulier, nous dirons qu'*elles sont associées par l'intermédiaire de* $g_{\alpha\beta}$. Les équations de liaison expriment que ω et $\overline{\omega}$ sont associées par l'intermédiaire de $g_{\alpha\beta}$; par la suite, la définition (12.4) de $\overline{\omega}$ à partir de ω n'intervient plus; les résultats des para-

graphes 13 et 14 peuvent donc se généraliser ainsi :

THÉORÈME. — *Sur une variété différentiable* V_4, *munie d'un champ de tenseurs* $g_{\alpha\beta}$ *partout réguliers et d'une connexion linéaire* ω, *on considère la connexion* ω^* *telle que*

$$\omega^{*\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} + g^{\lambda\alpha}\, \mathrm{D} g_{\lambda\beta},$$

où D *est le symbole de différentiation absolue relatif à* ω. *Si l'on transporte un vecteur covariant arbitraire le long d'un chemin quelconque relativement à* ω^*, *le vecteur contravariant qui lui correspond dans l'isomorphisme* $\psi : \varphi \to u$, $u^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\varphi_{\beta}$, *est transporté le long de ce chemin relativement à* ω.

COROLLAIRE. — $g_{\alpha\beta}$ *établit sur* Ψ_x *et* Ψ^*_x, *groupes d'holonomie en* x *des deux connexions* ω *et* ω^*, *un antiisomorphisme naturel.*

16. LES TENSEURS DE COURBURE DE DEUX CONNEXIONS LINÉAIRES ASSOCIÉES PAR L'INTERMÉDIAIRE D'UN TENSEUR RÉGULIER DEUX FOIS COVARIANT. — Nous savons ([6]) qu'en tout point x de V_4, pour tout couple de vecteurs φ et ϖ, le tenseur $\Omega_x(\varphi, \varpi)$ définit un élément de l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie homogène local ; cette algèbre de Lie est même engendrée par transport en x des $\Omega_y(\varphi, \varpi)$, où y est un point d'un voisinage déterminé de x, le long de chemins arbitraires. Le corollaire du paragraphe 15 conduit donc à penser qu'il existe une relation simple entre les tenseurs de courbure $\mathrm{P}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}$ et $\overset{*}{\mathrm{P}}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}$ des connexions ω et ω^*, relation que nous allons obtenir par un calcul élémentaire. Posons

$$\overset{*}{\mathrm{L}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} + t^{\alpha}_{\beta\gamma}, \tag{16.1}$$

où

$$t^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\sigma\alpha}\, \mathrm{D}_{\gamma} g_{\sigma\beta} = -\, g_{\sigma\beta}\, \mathrm{D}_{\gamma} g^{\sigma\alpha}. \tag{16.2}$$

Si nous remplaçons $\overset{*}{\mathrm{L}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ par son expression (16.1) dans la formule (5.5) appliquée à $\overset{*}{\mathrm{P}}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}$, il vient

$$\overset{*}{\mathrm{P}}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} = \mathrm{P}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} - 2\,\mathrm{S}_{\lambda\mu}\, t^{\alpha}_{\beta\rho} + \mathrm{D}_{\lambda} t^{\alpha}_{\beta\mu} - \mathrm{D}_{\mu} t^{\alpha}_{\beta\lambda} + t^{\alpha}_{\rho\lambda}\, t^{\rho}_{\beta\mu} - t^{\alpha}_{\rho\mu}\, t^{\rho}_{\beta\lambda}. \tag{16.3}$$

Utilisons maintenant la définition (16.2) pour calculer la quantité

$$\mathrm{D}_{\lambda} t^{\alpha}_{\beta\mu} + t^{\alpha}_{\rho\lambda}\, t^{\rho}_{\beta\mu} = \mathrm{D}_{\lambda}(g^{\sigma\alpha}\, \mathrm{D}_{\mu} g_{\sigma\beta}) - (g_{\sigma\rho}\, \mathrm{D}_{\lambda} g^{\sigma\alpha})\,(g^{\nu\rho}\, \mathrm{D}_{\mu} g_{\nu\beta}) = g^{\sigma\alpha}\, \mathrm{D}_{\lambda}\, \mathrm{D}_{\mu} g_{\sigma\beta}.$$

De même, par échange de λ et μ,

$$\mathrm{D}_{\mu} t^{\alpha}_{\beta\lambda} + t^{\alpha}_{\rho\mu}\, t^{\rho}_{\beta\lambda} = g^{\sigma\alpha}\, \mathrm{D}_{\mu}\, \mathrm{D}_{\lambda} g_{\sigma\beta}.$$

La différence de ces deux quantités représente les quatre derniers termes

([6]) Lichnerowicz [6], chap. III.

de (16.3). Servons-nous des identités de Ricci (5.8)

$$g^{\sigma\alpha}(D_\lambda D_\mu g_{\sigma\beta} - D_\mu D_\lambda g_{\sigma\beta}) = g^{\sigma\alpha}\left(-P^\rho_{\sigma\lambda\mu} g_{\rho\beta} - P^\rho_{\beta\lambda\mu} g_{\sigma\rho} + 2S^\rho_{\lambda\mu} D_\rho g_{\sigma\beta}\right)$$
$$= -g^{\sigma\alpha} P^\rho_{\sigma\lambda\mu} g_{\rho\beta} - P^\alpha_{\beta\lambda\mu} + 2S^\rho_{\lambda\mu} t^\alpha_{\beta\rho}.$$

Il reste, pour (16.3),

$$\mathring{P}^\alpha_{\beta\lambda\mu} = -g^{\sigma\alpha} P^\rho_{\sigma\lambda\mu} g_{\rho\beta}; \tag{16.4}$$

en multipliant les deux membres par $v^\lambda w^\mu$, où v et ω sont deux vecteurs quelconques, on obtient, au point x,

$$\mathring{\Omega}^\alpha_\beta = -g^{\sigma\alpha}\Omega^\rho_\sigma g_{\rho\beta}$$

qui est la formule attendue, d'après (14.4).

17. Application aux connexions ω et $\overline{\omega}$. Le principe d'hermiticité d'Einstein. — Dans tout ce qui suit, la barre surmontant un tenseur qui ne dépend que des coefficients d'une connexion linéaire signifie qu'il faut prendre ce tenseur relativement à la connexion transposée. Si deux connexions associées par l'intermédiaire de $g_{\alpha\beta}$ sont en plus transposées par le principe d'hermiticité d'Einstein, c'est-à-dire si le système des équations de liaison est satisfait, nous avons les identités

$$\overline{P}^\alpha_{\beta\lambda\mu} = -g^{\sigma\alpha} P^\rho_{\sigma\lambda\mu} g_{\rho\beta} \tag{17.1}$$

déjà connues sous le nom de conditions d'intégrabilité. Schrödinger et Bose [17] les ont obtenues en dérivant (12.1) et en écrivant que $\partial_{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} = \partial_{\sigma\rho} g^{\alpha\beta}$; après les considérations des paragraphes précédents, la forme du résultat n'apparaît plus miraculeuse. Les identités (17.1) permettent d'obtenir rapidement des résultats qui nécessitent autrement quelques calculs.

a. Contractons (17.1) en α et β; il vient immédiatement, d'après la définition (5.7),

$$V_{\lambda\mu} = -V_{\lambda\mu} \tag{17.2}$$

qui est déjà vraie pour deux connexions associées; si nous ajoutons que les deux connexions sont transposées et que leur vecteur covariant de torsion est nul, $L^\sigma_{\sigma\rho} = \overline{L}^\sigma_{\rho\sigma} = L^\sigma_{\sigma\rho}$ comme nous l'avons vu au paragraphe 9, et

$$V_{\lambda\mu} = \partial_\lambda L^\rho_{\rho\mu} - \partial_\mu L^\rho_{\rho\lambda} = \partial_\lambda \overline{L}^\rho_{\rho\mu} - \partial_\mu \overline{L}^\rho_{\rho\lambda} = \overline{V}_{\lambda\mu}; \tag{17.3}$$

de (17.2) et (17.3), il suit $V_{\lambda\mu} = 0$ et

$$\partial_\lambda L^\rho_{\rho\mu} = \partial_\mu L^\rho_{\rho\lambda}. \tag{17.4}$$

b. Comparons $P_{\lambda\mu}$ et $\overline{P}_{\mu\lambda}$. Reprenons pour cela la formule (5.6),

$$P_{\lambda\mu} = \partial_\rho L^\rho_{\lambda\mu} - \partial_\mu L^\rho_{\lambda\rho} + L^\rho_{\sigma\rho} L^\sigma_{\lambda\mu} - L^\rho_{\sigma\mu} L^\sigma_{\lambda\sigma},$$
$$\overline{P}_{\mu\lambda} = \partial_\rho \overline{L}^\rho_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \overline{L}^\rho_{\mu\rho} + \overline{L}^\rho_{\sigma\rho} \overline{L}^\sigma_{\mu\lambda} - \overline{L}^\rho_{\sigma\lambda} \overline{L}^\sigma_{\mu\rho},$$

toujours dans l'hypothèse du vecteur covariant de torsion nul, les seconds membres sont identiques par colonnes, sauf à la deuxième colonne où l'égalité résulte de (17.4). Donc

$$P_{\lambda\mu} = \overline{P}_{\mu\lambda} \tag{17.5}$$

Einstein avait proposé d'appeler hermitienne par rapport à deux indices une grandeur qui, dépendant du tenseur fondamental et d'une connexion linéaire, reste invariante par l'échange des deux indices et l'échange simultané de $g_{\alpha\beta}$ en $\bar{g}_{\alpha\beta}$ et de la connexion en sa transposée. Ainsi nous avons démontré que $P_{\lambda\mu}$ est hermitien au sens d'Einstein. Comme

$$\Sigma_\alpha = -\overline{\Sigma}_\alpha, \tag{17.6}$$

nous avons aussi démontré le théorème suivant :

Théorème. — *Si* $(g_{\alpha\beta}, L^{\gamma}_{\alpha\beta}, \Sigma_\alpha)$ *définissent une solution des équations de champ* (9.5), (9.6), (9.7), *il en est de même de* $(\bar{g}_{\alpha\beta}, \overline{L}_{\alpha\beta}, \overline{\Sigma}_\alpha)$.

En effet, nous l'avons déjà vérifié pour (9.5); pour (9.6) il est évident et pour (9.7) il résulte de (17.5) et (17.6).

c. Contractons (17.1) en α et λ

$$\overline{P}_{\beta\alpha} = -g^{\sigma\lambda} P^{\rho}_{\sigma\lambda\alpha} g_{\rho\beta}$$

et tenant compte de (17.5), nous obtenons une relation intéressante entre le tenseur de Ricci et le tenseur de courbure de la connexion ω à vecteur covariant de torsion nul

$$P_{\alpha\beta} + g^{\sigma\lambda} P^{\rho}_{\sigma\lambda\alpha} g_{\rho\beta} = 0.$$

II. — L'espace fibré des corepères affines.

I. Cattaneo-Gasparini a étudié récemment des connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier de type (1, 1) désigné par Φ^{α}_{β} ; les coefficients de l'une se déduisent de ceux de l'autre par addition d'un tenseur formé à partir de Φ^{α}_{β} exactement comme (16.2) l'est à partir de $g_{\alpha\beta}$ ([1], p. 150, § 3). Soient ω et ω' ces deux connexions

$$\omega'^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} + \Psi^{\alpha}_{\rho} D\Phi^{\rho}_{\beta},$$

où D est le symbole de différentiation absolue relatif à ω et où Ψ^{α}_{β} est tel que

$$\Psi^{\alpha}_{\rho}\Phi^{\rho}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta};$$

Φ^{α}_{β} définit un automorphisme T_Φ ; la liaison entre les deux connexions ω et ω' peut s'interpréter exactement comme nous l'avons fait pour ω et ω^* : le transport d'un vecteur relativement à une des connexions suivi de l'automorphisme Φ

donne le même résultat que l'automorphisme Φ suivi du transport par rapport à l'autre connexion; on en déduit pour les tenseurs de courbure une relation de même forme que (16. 4). Il faut maintenant voir comment M^me^ Cattaneo a été conduite à considérer des connexions ainsi associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier, alors que l'association analogue nous a été fournie directement par le principe variationnel. C'est en étudiant les connexions infinitésimales sur l'espace fibré des repères affines, ou connexions affines, qui induisent la même connexion linéaire ω sur $E(V_n)$ que M^me^ Cattaneo a introduit (7) (1956) le tenseur mixte régulier qui caractérise chacune d'elles à partir de la connexion linéaire; l'étude des géodésiques d'une telle connexion amène à considérer la connexion ω'. Sur notre variété V_4 le tenseur régulier $g_{\alpha\beta}$ doit donc aussi caractériser une connexion infinitésimale sur un espace fibré convenable à partir de la connexion linéaire $L^{\alpha}_{\alpha\beta}$; $g_{\alpha\beta}$ est associé à 1-forme à valeurs vectorielles covariantes et Φ^{α}_{β} à 1-forme à valeurs vectorielles contravariantes: ce qui suit correspond par dualité à l'étude de M^me^ Cattaneo.

18. Corepères affines et connexion affine. — Considérons une variété différentiable V_n; le dual T^*_x de T_x est un espace vectoriel qui admet une structure naturelle d'espace affine : une forme de T^*_x définit un point; un repère Σ de cet espace, ou corepère affine d'origine φ sera constitué par l'ensemble de la forme φ, élément de T^*_x et d'une base Θ de T^*_x. Nous noterons Σ comme la matrice à 1 ligne et $(n+1)$ colonnes

$$\Sigma = (\varphi, \Theta), \qquad \text{où} \quad \Theta = (\theta^{\alpha}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit un autre corepère affine au même point x,

$$\Sigma' = (\varphi', \Theta'), \qquad \text{où} \quad \Theta' = (\theta^{\beta'}).$$

Si $A = (A^{\alpha}_{\beta'})$ est la matrice de passage de Θ' à Θ et si $\psi = \varphi' - \varphi$ a pour composantes ψ_{α} par rapport à Θ, les formules de changement de repère

$$\varphi' = \varphi + \psi_{\alpha}\theta^{\alpha},$$
$$\Theta = A\,\Theta'$$

se traduisent par la relation matricielle unique

$$\Sigma' = B\,\Sigma,$$

où B est la matrice $(n+1)\times(n+1)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi_{\alpha} & A^{\beta'}_{\alpha} \end{pmatrix}$$

l'ensemble des matrices B constitue un groupe de Lie pour la multiplication,

(7) *Voir* [3].

soit Γ, qui n'est autre que le groupe affine ; tout corepère linéaire au point x, peut être identifié au corepère affine

$$\Sigma = (o, \Theta)$$

sur de tels corepères affines d'origine o opèrent les matrices de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_\alpha^{\beta'} \end{pmatrix} \tag{18.1}$$

dont l'ensemble est le sous-groupe γ de Γ, antiisomorphe au groupe linéaire dans l'antiisomorphisme qui fait correspondre à B la matrice $A = (A_{\beta'}^{\alpha})$ du groupe linéaire; dans cette correspondance, l'élément $dB\,\bar{B}^1$ de l'algèbre de Lie de γ s'identifie à l'élément $-\bar{A}^1\,dA$ de l'algèbre de Lie du groupe linéaire. La réunion $\mathcal{E}^\star(V_n)$ des corepères Σ relatifs aux différents points x de V_n constitue une variété différentiable : si (x^α) sont les coordonnées locales de x, un élément Σ_x aura pour coordonnées (x^α), et la matrice B qui le définit par rapport au corepère naturel des coordonnées locales. Γ opère différentiablement sur $\mathcal{E}^\star(V_n)$ *à gauche* en transformant un corepère en x en un corepère au même point x : $\mathcal{E}^\star(V_n)$ est donc un espace fibré principal différentiable, de base V_n, et de groupe structural Γ, l'espace fibré des corepères affines. Chaque fibre, ensemble des corepères affines en x, admet pour sous-variété l'ensemble des corepères linéaires en x qui s'identifie par dualité à la fibre de $E(V_n)$ au-dessus de x. Notons que toutes les formules générales rappelées dans le chapitre I ayant été établies pour un groupe structural opérant à droite, il faudra les transcrire pour les appliquer ici.

Définition. — Nous appellerons *connexion coaffine* sur V_n une connexion infinitésimale sur $\mathcal{E}^\star(V_n)$,

Dans chaque voisinage U, muni de corepères affines, d'un recouvrement de V_n, nous nous donnons une telle connexion par une 1-forme locale π_U à valeurs dans l'algèbre de Lie de Γ. Voyons quelle forme ont les éléments de l'algèbre de Lie de Γ; ils sont encore représentés par des matrices $(n+1)\times(n+1)$ et par dérivation, on constate que ces matrices ont leur première ligne constituée uniquement de zéros .

$$\pi_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_U & \varpi_U \end{pmatrix}; \tag{18.2}$$

p_U est une matrice à une colonne et n lignes, ϖ_U une matrice $n \times n$, les éléments de ces matrices étant des 1-formes différentielles linéaires. Pour $x \in U \cap V$, les voisinages U et V étant munis respectivement des sections locales Σ^V et Σ^U telles que

$$\Sigma^V = B_U^V \Sigma^U,$$

les formes π_U et π_V doivent satisfaire à la condition de cohérence déduite de (2.4)

$$\pi_V = B_U^V \pi_U \overline{B}_U^{-1V} + dB_U^V \overline{B}_U^{-1V}, \tag{18.3}$$

où

$$B_U^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi_U^V & \overline{A}_V^{-1U} \end{pmatrix}, \tag{18.4}$$

ψ_U^V est la matrice à une colonne représentant la forme $\varphi_V - \varphi_U$ (φ_U et φ_V origines respectivement des corepères Σ^U et Σ^V) par rapport à Σ^U.

19. Connexion coaffine associée a une connexion linéaire. — 1° Soit une connexion linéaire définie, pour un recouvrement dont les voisinages sont munis de repères d'origine x, par les matrices ω_U à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire; à cette section locale de $E(V_n)$, nous pouvons associer de manière naturelle une section locale de $\mathcal{E}^*(V_n)$: au repère R_U nous faisons correspondre son dual Θ^U qui s'identifie au corepère affine $\Sigma^U = (o, \Theta^U)$. Alors la matrice

$$\pi_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega_U \end{pmatrix} \tag{19.1}$$

à valeurs dans l'algèbre de Lie de γ, définit, pour cette section locale de $\mathcal{E}^*(V_n)$, une connexion coaffine; en effet, pour $x \in U \cap V$, les formes locales ω_U et ω_V satisfont par hypothèse à

$$\omega_V = \overline{A}_V^{-1U} \omega_U A_V^U + \overline{A}_V^{-1U} dA_V^U \quad \text{pour} \quad R_V = A_V^U R_U. \tag{19.2}$$

Il s'ensuit que la condition de cohérence (18.3) est vérifiée pour des matrices B_U^V de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{A}_V^{-1U} \end{pmatrix},$$

donc pour $\Sigma^V = B_U^V \Sigma^U$, où Σ^V et Σ^U correspondent à R_U et R_V comme il a été indiqué,

2° Soit un voisinage U muni de corepères affines Σ_U d'origine o et un voisinage V muni de corepères affines d'origine φ dont nous désignons par φ_U les composantes dans le repère Σ^U; Σ^V se déduit de Σ^U par la multiplication par

$$B_U^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_U & A_U^V \end{pmatrix},$$

la condition de cohérence nous donne la forme des matrices π_V pour les

repères Σ^V à partir de (19.1)

$$B_U^{-1V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_V & A_V^U \end{pmatrix}, \qquad dB_U^V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\varphi_U & dA_U^V \end{pmatrix},$$

$$B_U^V \pi_U B_U^{-1V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_U & A_U^V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_V & A_V^U \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varphi_U \omega_U A_V^U & -A_V^{-1U} \omega_U A_V^U \end{pmatrix},$$

$$dB_U^V B_U^{-1V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\varphi_U & dA_U^V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_V & A_V^U \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\varphi_U A_V^U & dA_U^V A_V^U \end{pmatrix},$$

par addition

$$\pi_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (d\varphi_U - \varphi_U \omega_U) A_V^U & -(A_V^{-1U} \omega_U A_V^U + \bar{A}_V^{-1U} dA_V^U) \end{pmatrix};$$

d'après (5.4) et (19.2) et si D est le symbole de différentiation absolue par rapport à la connexion linéaire ω,

$$\pi_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D\varphi_V & -\omega_V \end{pmatrix},$$

ω_V correspond à la section locale de $E(V_n)$ au-dessus de V déduite de la section de $\mathcal{E}^*(V_n)$ donnée en prenant pour chaque x la classe du repère Σ^V modulo l'origine.

3° Nous sommes maintenant en mesure de caractériser la forme π de la connexion coaffine la plus générale (18.2) telle que $\varpi_U = -\omega_U$, la connexion linéaire ω étant donnée. Nous dirons qu'une telle connexion coaffine est associée à ω, ou encore qu'elle induit la connexion linéaire ω. Sur un voisinage U, muni de corepères affines d'origine φ_U, nous disposons d'une connexion coaffine particulière induisant la connexion linéaire ω

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D\varphi_U & -\omega_U \end{pmatrix}. \tag{19.3}$$

Nous en déduisons une connexion coaffine quelconque par addition d'une 1-forme matricielle $(n+1)\times(n+1)$ de type adjoint; pour que cette addition n'altère pas le terme $-\omega_U$, cette 1-forme doit être représentée par une matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta_U & 0 \end{pmatrix}$$

et la condition imposée au type fournit la relation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta_V & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi_U^V & A_U^V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta_U & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\psi_V^U A_V^U & A_V^U \end{pmatrix}$$

qui se réduit à

$$\zeta_V = A_V^U \zeta_U.$$

Ceci signifie que ζ définit une 1-forme vectorielle covariante sur $E(V_n)$. Sous une autre forme, si les ζ_α sont les composantes de ζ et (θ^α) le corepère pour la section locale considérée, on a

$$\zeta_\alpha = g_{\alpha\beta}\theta^\beta, \tag{19.4}$$

où les coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont *les composantes d'un tenseur*. Nous obtenons le résultat suivant : la connexion coaffine la plus générale induisant la connexion linéaire ω est définie, pour une certaine section locale de $\mathcal{E}^*(V_n)$ par la forme locale

$$\pi_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_U & -\omega_U \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad p_U = D\varphi_U + \zeta_U, \tag{19.5}$$

où D est le symbole de différentiation absolue relatif à ω, φ est l'origine du corepère affine de la section locale au-dessus de U et ζ est une 1-forme vectorielle covariante sur $E(V_n)$. Il y a donc correspondance biunivoque entre les connexions coaffines sur V_n et les couples $(g_{\alpha\beta}, L^\alpha_{\beta\gamma})$ composés d'une connexion linéaire et d'un champ de tenseurs deux fois covariants sur V_n. La connexion coaffine est dite *régulière* si le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est régulier.

20. Géodésiques d'une connexion coaffine. — Pour définir ce que nous entendrons par géodésique d'une connexion coaffine, il faut d'abord revenir à la notion de développement telle que nous l'avons exposé au paragraphe 3 et en faire l'application à la connexion infinitésimale que nous considérons, connexion π du type (19.5). Soit un chemin $x(t)$ de $V_n(0 \leq t \leq 1)$ et un chemin quelconque $\Sigma(t)$ de $\mathcal{E}^*(V_n)$ au-dessus de $x(t)$. Pour que le chemin $\Sigma'(t)$ au-dessus de $x(t)$ soit horizontal, il faut et il suffit que, si

$$\Sigma'(t) = B^{-1}(t)\,\Sigma(t)$$

on ait le long de $\Sigma(t)$

$$dB\,B^{-1} = \pi_\Sigma(d\Sigma) \tag{20.1}$$

la solution de (20.1) telle que B(0) soit la matrice identité est le développement de $\Sigma(t)$ sur le groupe Γ à partir de l'identité. Mais nous pouvons représenter le groupe Γ sur la fibre $T^*_{x_0}$ à partir du corepère affine $\Sigma(0)$ en x_0 :

à la matrice $B(t)$ correspond dans cette représentation le corepère en x_0

$$\Sigma'_{x_0}(t) = B(t)\,\Sigma(0), \qquad \text{où} \quad \Sigma'_{x_0} = (\varphi'_{x_0}, \Theta'_{x_0}). \tag{20.2}$$

Nous définissons alors le développement de $\Sigma(t)$ sur $T^*_{x_0}$ par la solution de la transformée de (20.1) par (20.2), soit

$$d\Sigma'_{x_0} = \pi_\Sigma(\Sigma)\,\Sigma'_{x_0}, \tag{20.3}$$

avec comme conditions initiales $\Sigma'_{x_0}(o) = \Sigma(o)$. Nous choisirons un chemin $\Sigma(t)$ tel que l'origine de chacun de ses repères soit o

$$\Sigma(t) = (o, \Theta(t)).$$

Nous avons donc, si la connexion coaffine considérée est définie par les formes ζ et ω,

$$\pi_\Sigma(d\Sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta_\Theta(d\Theta) & -\omega_\Theta(d\Theta) \end{pmatrix}.$$

(20.3) se décompose comme suit :

$$(20.4) \qquad \begin{cases} d\varphi'_{x_0} = \zeta_\Theta(d\Theta)\,\Theta'_{x_0}, \\ d\Theta'_{x_0} = -\omega_\Theta(d\Theta)\,\Theta'_{x_0} \end{cases}$$

On montre exactement comme dans le cas affine, que le chemin de $T^*_{x_0}$ défini par $\varphi'_{x_0}(t)$ ne dépend que de $x(t)$ et non pas du chemin $\Sigma(t)$ choisi dans $\mathcal{E}^*(V_n)$. Alors nous pouvons supprimer dans (20.4) tout ce qui se rapporte à $\Sigma(t)$. Nous supprimons aussi les accents et l'indice x_0, et nous avons, sous forme condensée, les « formules du repère mobile »

$$(20.5) \qquad d\varphi = \zeta\Theta,$$

$$(20.6) \qquad d\Theta = -\omega\Theta.$$

Par définition, $x(t)$ sera un arc géodésique pour la connexion coaffine (ζ, ω), si le chemin de $T^*_{x_0}$ défini par $\varphi(t)$ solution du système (20.5), (20.6) est un segment de droite. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe un scalaire $\lambda(t)$ tel que

$$(20.7) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda(t)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Or, d'après (20.5),

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\zeta}{dt}\Theta.$$

Soit (w^α) le vecteur vitesse du chemin $x(t)$ par rapport à la famille de corepères à partir desquels on fait le développement

$$w^\alpha = \frac{0^\alpha}{dt},$$

d'après (19.4) et (13.2) $\frac{\zeta}{dt}$ est la matrice à une colonne représentant le vecteur covariant qui correspond au vecteur vitesse dans l'isomorphisme $\bar{\psi}$. Soit $v = \frac{\zeta}{dt}$

$$v_\beta = g_{\beta\alpha} w^\alpha.$$

Nous avons alors

$$\frac{d\varphi}{dt} = v\Theta;$$

dérivons une seconde fois en tenant compte de (20.6),

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \left(\frac{dv}{dt} - v\frac{\omega}{dt}\right)\Theta = \frac{Dv}{dt}\Theta.$$

Donc, pour que le chemin $x(t)$ soit un arc géodésique de la connexion coaffine (ζ, ω), il faut et il suffit qu'il existe un scalaire $\lambda(t)$ tel que

$$\frac{Dv}{dt} = \lambda v, \tag{20.8}$$

où v est le vecteur covariant associé au vecteur vitesse du chemin $x(t)$ dans l'isomorphisme ψ.

21. La variété fondamentale V_4, variété a connexion affine. — Au paragraphe 6, nous nous donnions sur une variété différentiable deux êtres géométriques distincts : un champ de tenseurs réguliers à deux indices de même type et une connexion linéaire. Les conclusions du paragraphe 19 nous permettent de fondre ces deux éléments en un seul : une connexion coaffine régulière sur V_4. Dans ce nouveau langage, voyons de quelle manière le principe variationnel va particulariser la connexion coaffine, du moins dans son expression partielle (9.5).

Soit C un arc géodésique de la connexion coaffine (ζ, ω), paramétré par t; avec les notations du paragraphe précédent, le vecteur v associé au vecteur vitesse de C par ψ satisfait à (20.8); mais on peut trouver un paramètre s tel que (20.8) s'écrive

$$\frac{Dv}{ds} = 0.$$

Appliquons alors le théorème du paragraphe 15; v étant invariant par transport relativement à ω le long de C, le vecteur vitesse w est invariant par transport le long de C relativement à ω^*, associée à ω par l'intermédiaire de $g_{\alpha\beta}$. C est donc aussi un arc géodésique pour la connexion linéaire ω^*; si maintenant les équations (9.5) sont supposées satisfaites, ω^* n'est autre que $\bar{\omega}$, transposée de ω par le principe d'hermiticité d'Einstein. Ceci nous permet de géométriser et de condenser les prémisses de la théorie exposées au chapitre II.

En théorie d'Einstein-Schrödinger, on se donne sur une variété différentiable V_4 une connexion coaffine régulière qui sera dite fondamentale. La connexion coaffine fondamentale doit avoir mêmes géodésiques que la connexion linéaire transposée de la connexion linéaire qu'elle induit. Cette connexion linéaire induite a un vecteur covariant de torsion nul et son tenseur de Ricci $P_{\alpha\beta}$ satisfait à

$$P_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha),$$

où Σ_α est un vecteur covariant arbitraire.

DEUXIÈME PARTIE.

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DU CHAMP.

CHAPITRE IV.

Les coordonnées isothermes.

En relativité générale, une étude directe du problème de Cauchy, problème de l'intégration des équations d'Einstein, mène à conclure que la gravitation se propage par ondes, comme la lumière. L'introduction d'un système particulier de coordonnées permet de mettre en évidence ce caractère sous une forme familière et de simplifier tous les problèmes d'intégration et d'approximations; ce privilège et ce succès des coordonnées isothermes, longtemps appelées intrinsèques, s'explique par l'identité des caractéristiques et bicaractéristiques des équations qui les déterminent et des équations d'Einstein. Soit $a_{\lambda\mu}$ le tenseur métrique de la variété espace-temps riemannienne de la relativité générale; considérons l'équation de Laplace-Beltrami, où g est la fonction inconnue (8)

$$\Delta_2 g \equiv a^{\lambda\mu}\left(\partial_{\lambda\mu} g - \begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda\mu \end{Bmatrix} \partial_\rho g\right) = 0.$$

Un système de coordonnées locales (x^ρ) est dit isotherme si les quatre familles de surfaces $x^\rho = \text{Cte}$ satisfont à l'équation ci-dessus, c'est-à-dire si

$$f^\rho \equiv -\, a^{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda\mu \end{Bmatrix} = 0.$$

Nous allons exposer le calcul classique des composantes du tenseur de Ricci $G_{\alpha\beta}$ en fonction des f^ρ par une méthode qui se généralise en théorie unitaire.

22. L'expression du tenseur de Ricci en géométrie riemannienne. — Pour un vecteur contravariant quelconque, les identités de Ricci s'écrivent

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu v^\alpha - \nabla_\mu \nabla_\lambda v^\alpha = G^\alpha_{\rho,\lambda\mu} v^\rho, \tag{22.1}$$

∇ désigne toujours le symbole de différentiation absolue dans la connexion

---

(8) La notation $\begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda\mu \end{Bmatrix}$ désigne les symboles de Christoffel relatifs au tenseur métrique $a_{\lambda\mu}$.

riemannienne $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}$. $G^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}$ est le tenseur de courbure de cette même connexion. Appliquons les identités (22.1) à $a^{\alpha\underline{\beta}}$, où l'indice souligné désigne un indice « mort » sur lequel ne portera pas l'opération de dérivation covariante

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu a^{\alpha\underline{\beta}} - \nabla_\mu \nabla_\lambda a^{\alpha\underline{\beta}} = G^{\alpha}_{\rho,\lambda\mu} a^{\rho\underline{\beta}}.$$

Contractons en α et λ de manière à faire apparaître le tenseur de Ricci au deuxième membre

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu a^{\lambda\underline{\beta}} - \nabla_\mu \nabla_\lambda a^{\lambda\underline{\beta}} = G_{\rho\mu} a^{\rho\underline{\beta}}. \tag{22.2}$$

Calculons $\nabla_\mu a^{\lambda\underline{\beta}}$; comme le tenseur métrique est à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne associée,

$$\nabla_\mu a^{\lambda\underline{\beta}} = \partial_\mu a^{\lambda\underline{\beta}} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a^{\alpha\underline{\beta}} = - \left\{ \begin{matrix} \underline{\beta} \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a^{\lambda\alpha}$$

par contraction, on en déduit $\nabla_\lambda a^{\lambda\underline{\beta}}$

$$\nabla_\lambda a^{\lambda\underline{\beta}} = - \left\{ \begin{matrix} \underline{\beta} \\ \alpha\lambda \end{matrix} \right\} a^{\lambda\alpha} = f^{\underline{\beta}};$$

(22.2), après multiplication par $a_{\lambda\beta}$, s'écrit alors

$$\begin{aligned} G_{\lambda\mu} = & - a_{\lambda\beta} \partial_\rho \left[\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a^{\rho\alpha} \right] \\ & - a_{\lambda\beta} \partial_\mu f^\beta - a_{\lambda\beta} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a^{\sigma\alpha} + a_{\lambda\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} a^{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{22.3}$$

Transformons le premier terme du second membre

$$- a_{\lambda\beta} \partial_\rho \left[\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a^{\rho\alpha} \right] = - a^{\rho\alpha} \partial_\rho \left[\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a_{\lambda\beta} \right] + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a^{\rho\alpha} \partial_\rho a_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} \partial_\rho a^{\rho\alpha} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\};$$

reportons cette expression dans (22.3) et remarquons que $- \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a_{\lambda\beta}$ se trouve facteur de

$$\partial_\rho a^{\rho\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} a^{\sigma\alpha} = - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} a^{\rho\sigma} = f^\alpha,$$

on obtient

$$\begin{aligned} G_{\lambda\mu} = & - a^{\rho\alpha} \partial_\rho \left[\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} a_{\lambda\beta} \right] - a_{\lambda\beta} \partial_\mu f^\beta - a_{\lambda\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} f^\alpha \\ & + a_{\lambda\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} a^{\rho\alpha} + a^{\rho\alpha} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} \partial_\rho a_{\lambda\beta}, \end{aligned} \tag{22.4}$$

échangeons λ et μ, nous obtenons, en vertu de la symétrie de $G_{\lambda\mu}$, une autre expression de $G_{\lambda\mu}$ que nous ajoutons à la première. En tenant compte encore une fois de

$$\partial_\alpha a_{\lambda\mu} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \lambda\alpha \end{matrix} \right\} a_{\mu\beta} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} a_{\lambda\beta},$$

il vient

$$(22.5) \qquad {}_2G_{\lambda\mu} \equiv - a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}a_{\lambda\mu} - a_{\lambda\beta}\,\partial_\mu f^\beta - a_{\mu\beta}\,\partial_\lambda f^\beta - f^\alpha\,\partial_\alpha a_{\lambda\mu} + {}_2L_{\lambda\mu},$$

avec

$$(22.6) \qquad {}_2L_{\lambda\mu} \equiv a^{\rho\alpha}\left[\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\mu\end{matrix}\right\}\partial_\rho a_{\lambda\beta} + \left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\lambda\end{matrix}\right\}\partial_\rho a_{\mu\beta} + a_{\lambda\beta}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \mu\rho\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\sigma\end{matrix}\right\} + a_{\mu\beta}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \lambda\rho\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\sigma\end{matrix}\right\}\right].$$

On retrouve facilement la forme de Lanczos (9) à partir de l'expression (22.6) de ${}_2L_{\lambda\mu}$. Si nous désignons par le signe $\sim$ une convergence modulo des fonctions additives du tenseur $a_{\lambda\mu}$ et de ses dérivées *premières*, nous avons

$$(22.7) \qquad {}_2G_{\lambda\mu} \sim - a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}a_{\lambda\mu} - a_{\lambda\beta}\,\partial_\mu f^\beta - a_{\mu\beta}\,\partial_\lambda f^\beta.$$

23. Extension a l'espace a connexion linéaire de la théorie du champ unifié. — En théorie d'Einstein-Schrödinger, une analyse directe du problème de Cauchy a été faite par A. Lichnerowicz [21] et fournit les caractéristiques; nous verrons au chapitre V que les hypersurfaces $f(x^\alpha) = 0$ d'un premier groupe de caractéristiques satisfont à

$$(23.1) \qquad g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f \equiv l^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f = 0$$

et si nous appelons isotherme, comme l'a proposé M.-A. Tonnelat, un système de coordonnées locales dans lequel

$$(23.2) \qquad F^\rho \equiv - g^{\alpha\beta}L^\rho_{\alpha\beta} = 0,$$

nous avons une interprétation géométrique des nouvelles surfaces coordonnées analogue à celle que nous avons rappelée dans l'introduction de ce chapitre : l'équation qui généralise celle de Laplace-Beltrami

$$(23.3) \qquad \Delta_2 f \equiv D_\alpha(g^{\alpha\beta}\,\partial_\beta f) = 0,$$

admet pour caractéristiques les solutions de (23.1). Nous pouvons espérer qu'il s'en suivra certaines simplifications. Mais les second et troisième groupes de caractéristiques des équations de champ est absent de (23.3); il paraît peu probable qu'on puisse trouver en théorie unitaire des surfaces coordonnées aussi privilégiées qu'en relativité générale; alors que $f^\rho = 0$ entraînent, d'après (22.7),

$${}_2G_{\lambda\mu} \sim - a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}a_{\lambda\mu},$$

nous verrons que les systèmes « isothermes » (23.2) ne séparent pas complètement les dérivées secondes dans les équations de champ (9.7). Reprenons le calcul précédent; dans l'espace à connexion linéaire $L^\alpha_{\beta\gamma}$, les identités de Ricci (5.8) pour un vecteur contravariant, sont

$$D_\lambda D_\mu v^\alpha - D_\mu D_\lambda v^\alpha = P^\alpha_{\rho\lambda\mu}v^\rho + 2S^\rho_{\lambda\mu}D_\rho v^\alpha.$$

(9) *Voir* [9], p. 117.

Appliquées à $g^{\alpha\beta}$ et après contraction en α et λ elles donnent

$$(23.4) \qquad D_\lambda D_\mu g^{\lambda\beta} - D_\mu D_\lambda g^{\lambda\beta} = P_{\rho\mu} g^{\rho\beta} + 2 S^\rho_{\lambda\mu} D_\rho g^{\lambda\beta}.$$

Chaque fois que, au paragraphe 22, nous avons utilisé la condition exprimant que le tenseur métrique est à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne associée à ce tenseur, nous utiliserons ici les relations de liaison (9.3) ou (9.4). Ainsi

$$D_\mu g^{\lambda\beta} = \partial_\mu g^{\lambda\beta} + L^\lambda_{\alpha\mu} g^{\alpha\beta} = - L^\beta_{\mu\alpha} g^{\lambda\alpha},$$
$$D_\lambda g^{\lambda\beta} = - L^\beta_{\lambda\alpha} g^{\lambda\alpha} = F^\beta.$$

Explicitons maintenant (23.4),

$$(23.5) \qquad P_{\rho\mu} g^{\rho\beta} - 2 S^\rho_{\lambda\mu} L^\beta_{\rho\alpha} g^{\lambda\alpha} = - \partial_\rho (L^\beta_{\mu\alpha} g^{\rho\alpha}) - \partial_\mu F^\beta - L^\rho_{\sigma\rho} L^\beta_{\mu\alpha} g^{\sigma\alpha} + L^\sigma_{\mu\rho} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha},$$

remarquons d'abord que les derniers termes de chaque membre se groupent en un seul après échange du nom des indices pour le premier, par exemple,

$$2 S^\sigma_{\rho\mu} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha} + L^\sigma_{\mu\rho} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha} = L^\sigma_{\rho\mu} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha};$$

(23.5) s'écrit plus simplement

$$(23.6) \qquad P_{\rho\mu} g^{\rho\beta} = - \partial_\rho (L^\beta_{\mu\alpha} g^{\rho\alpha}) - \partial_\mu F^\beta - L^\rho_{\sigma\rho} L^\beta_{\mu\alpha} g^{\sigma\alpha} + L^\sigma_{\rho\mu} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha}.$$

Multiplions les deux membres par $g_{\beta\lambda}$ et faisons sur le premier terme du deuxième membre l'opération effectuée au paragraphe 22 qui consiste à faire sortir $g^{\rho\alpha}$ du ∂_ρ et à y faire rentrer $g_{\beta\lambda}$

$$- g_{\beta\lambda} \partial_\rho (L^\beta_{\mu\alpha} g^{\rho\alpha}) = - g^{\rho\alpha} \partial_\rho (L^\beta_{\mu\alpha} g_{\beta\lambda}) + g^{\rho\alpha} L^\beta_{\mu\alpha} \partial_\rho g_{\beta\lambda} - g_{\beta\lambda} L^\beta_{\mu\alpha} \partial_\rho g^{\rho\alpha};$$

comme précédemment se présente le groupement

$$L^\beta_{\mu\alpha} g_{\beta\lambda} (\partial_\rho g^{\rho\alpha} + S^\rho_{\sigma\rho} g^{\sigma\alpha}) = L^\beta_{\mu\alpha} g_{\beta\lambda} F^\alpha.$$

Il vient donc pour (23.6)

$$(23.7) \qquad \begin{aligned} P_{\rho\mu} g^{\rho\beta} g_{\beta\lambda} = & - g^{\rho\alpha} \partial_\rho (L^\beta_{\mu\alpha} g_{\beta\lambda}) - g_{\beta\lambda} \partial_\mu F^\beta \\ & - g_{\beta\lambda} L^\beta_{\mu\alpha} F^\alpha + g_{\beta\lambda} L^\sigma_{\rho\mu} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha} + g^{\rho\alpha} L^\beta_{\mu\alpha} \partial_\rho g_{\beta\lambda}, \end{aligned}$$

cette formule est une conséquence des identités de Ricci jointes aux équations de liaison. Or nous savons que ces dernières sont invariantes par la transformation

$$g^{\alpha\beta} \to \overline{g}^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha},$$
$$L^\alpha_{\beta\gamma} \to \overline{L}^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\gamma\beta},$$

laquelle entraîne, d'après (17.5),

$$P_{\alpha\beta} \to \overline{P}_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}.$$

Quant aux identités de Ricci (23.4), si nous leur faisons subir cette transformation, elles restent identités de Ricci (appliquées à $g^{\beta\lambda}$). Nous déduisons donc de (23.7) la formule, vraie dans les mêmes conditions,

$$(23.8)\qquad \begin{aligned} P_{\mu\rho}g^{\beta\rho}g_{\lambda\beta} = &- g^{\alpha\rho}\,\partial_\rho\left(L^\beta_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta}\right) - g_{\lambda\beta}\,\partial_\mu F^\beta \\ &- g_{\lambda\beta}L^\beta_{\alpha\mu}F^\alpha + g_{\lambda\beta}L^\sigma_{\mu\rho}L^\beta_{\alpha\sigma}g^{\alpha\rho} + g^{\alpha\rho}L^\beta_{\alpha\mu}\,\partial_\rho g_{\lambda\beta}. \end{aligned}$$

D'autre part, échangeons λ et μ dans (23.7),

$$(23.9)\qquad \begin{aligned} P_{\rho\lambda}g^{\rho\beta}g_{\beta\mu} = &- g^{\rho\alpha}\,\partial_\rho\left(L^\beta_{\lambda\alpha}g_{\beta\mu}\right) - g_{\beta\mu}\,\partial_\lambda F^\beta \\ &- g_{\beta\mu}L^\beta_{\lambda\alpha}F^\alpha + g_{\beta\mu}L^\sigma_{\rho\lambda}L^\beta_{\sigma\alpha}g^{\rho\alpha} + g^{\rho\alpha}L^\beta_{\lambda\alpha}\,\partial_\rho g_{\beta\mu} \end{aligned}$$

ajoutons enfin membre à membre (23.8) et (23.9) en tenant compte de

$$\partial_\alpha g_{\lambda\mu} = L^\beta_{\lambda\alpha}g_{\beta\mu} + L^\beta_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta}.$$

Dans la première colonne au deuxième membre, il faut scinder $g^{\rho\alpha}$ en partie symétrique et partie antisymétrique. Il vient

$$(23.10)\qquad \begin{aligned} P_{\rho\lambda}g^{\rho\beta}g_{\beta\mu} + P_{\mu\rho}g^{\beta\rho}g_{\lambda\beta} = &- l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu} - 2m^{\alpha\rho}\,\partial_\rho\left(L^\beta_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta}\right) \\ &- g_{\lambda\beta}\,\partial_\mu F^\beta - g_{\beta\mu}\,\partial_\lambda F^\beta - F^\alpha\,\partial_\alpha g_{\lambda\mu} + 2\Lambda_{\lambda\mu}, \end{aligned}$$

avec

$$(23.11)\qquad 2\Lambda_{\lambda\mu} = g^{\alpha\rho}L^\beta_{\alpha\mu}\,\partial_\rho g_{\lambda\beta} + g^{\rho\alpha}L^\beta_{\lambda\alpha}\,\partial_\rho g_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta}L^\sigma_{\mu\rho}L^\beta_{\alpha\sigma}g^{\alpha\rho} + g_{\beta\mu}L^\sigma_{\rho\lambda}L^\beta_{\sigma\alpha}g^{\rho\alpha};$$

(23.10) et (23.11) fournissent une généralisation satisfaisante de (22.5) et (22.6). C'est une identité si l'on suppose les coefficients $L^\alpha_{\gamma\beta}$ remplacés par la solution unique des équations de liaison. Nous nommerons par la suite (23.10) « la formule fondamentale ».

24. Quelques remarques sur la fonction fondamentale. — 1° L'allure du premier membre n'est pas inattendue : nous avons déjà un exemple de ces sortes de formes polaires avec les identités de conservation. Transformons-le en introduisant le tenseur défini par (11.3), soit

$$(24.1)\qquad 2H^\beta_\lambda = P_{\lambda\rho}g^{\beta\rho} + P_{\rho\lambda}g^{\rho\beta}.$$

Multiplions les deux membres de (24.1) par $g_{\beta\mu}$,

$$2H^\rho_\lambda g_{\rho\mu} = P_{\lambda\mu} + P_{\rho\lambda}g^{\rho\beta}g_{\beta\mu}.$$

De même, en remplaçant λ par μ dans (24.1) et en multipliant les deux membres par $g_{\lambda\beta}$,

$$2H^\rho_\mu g_{\lambda\rho} = P_{\mu\rho}g^{\beta\rho}g_{\lambda\beta} + P_{\lambda\mu}.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$(24.2)\qquad P_{\rho\lambda}g^{\rho\beta}g_{\beta\mu} + P_{\mu\rho}g^{\beta\rho}g_{\lambda\beta} = 2\left[H^\rho_\lambda g_{\rho\mu} + H^\rho_\mu g_{\lambda\rho} - P_{\lambda\mu}\right].$$

2° Les termes du second membre comprenant F^ρ sont formellement les mêmes qu'en géométrie riemannienne; nous allons voir qu'il existe un tenseur symétrique déduit du tenseur fondamental tel que les f^ρ qui lui correspondent soient proportionnels à F^ρ. Considérons les équations de liaison après une contraction

$$\partial_\rho g^{\rho\alpha} + L^\rho_{\sigma\rho} g^{\sigma\alpha} + L^\alpha_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} = 0.$$

Donc, d'après (8.1) qui donne une expression de $L^\rho_{\sigma\rho}$,

$$F^\alpha = \partial_\rho g^{\rho\alpha} + \frac{\partial_\rho \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} g^{\rho\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho (g^{\rho\alpha} \sqrt{|g|});$$

or, d'après les équations de champ (9.6),

$$\partial_\rho (g^{\rho\alpha} \sqrt{|g|}) = 0,$$

d'où

$$F^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho (l^{\rho\alpha} \sqrt{|g|}). \tag{24.3}$$

Considérons le tenseur symétrique

$$a_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, l_{\lambda\mu},$$

$a = \det(a_{\lambda\mu}) = \frac{g^2}{l}$, et le tenseur associé est tel que

$$\sqrt{|a|}\, a^{\lambda\mu} = \sqrt{|g|}\, l^{\lambda\mu},$$

on déduit alors de (24.3)

$$F^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho (\sqrt{|a|}\, a^{\rho\alpha}) = \sqrt{\frac{a}{g}} f^\alpha, \qquad \text{où} \quad f^\alpha = -a^{\rho\sigma} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \sigma\rho \end{Bmatrix}.$$

Donc on peut douer V_4 d'une structure de variété riemannienne de manière qu'un système de coordonnées locales isotherme au sens de la métrique introduite soit en même temps isotherme relativement à la connexion linéaire $L^\alpha_{\beta\gamma}$. Ce résultat à été démontré pour la première fois par Pham Tan Hoang [25].

3° Au second membre, le dalembertien ordinaire $l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}$ et tous les termes de $\Lambda_{\lambda\mu}$ correspondent de manière naturelle aux termes du second membre de (22.5), mais nous avons un terme supplémentaire auquel il est difficile de donner une forme définitive, qui contient des dérivées secondes du tenseur fondamental. Introduisons le tenseur de courbure pour absorber ces dérivées secondes

$$\begin{aligned} -2 m^{\alpha\rho} \partial_\rho (L^\beta_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}) &= 2 m^{\alpha\rho} \partial_\rho (L^\beta_{\lambda\alpha} g_{\beta\mu}) \\ &= 2 m^{\alpha\rho} g_{\beta\mu} (\partial_\rho L^\beta_{\lambda\alpha} + L^\beta_{\sigma\rho} L^\sigma_{\lambda\alpha}) + 2 m^{\alpha\rho} L^\beta_{\lambda\alpha} \partial_\rho g_{\beta\mu} + 2 m^{\alpha\rho} g_{\beta\mu} L^\beta_{\sigma\alpha} L^\sigma_{\lambda\rho}; \end{aligned}$$

au premier terme du second membre, nous avons fait apparaître une somme

qui, antisymétrisée en α et ρ n'est autre que le tenseur de courbure $P^{\beta}_{\lambda\rho\alpha}$. Si nous posons

$$\Omega^{\alpha}_{\beta}(t) = \frac{1}{2} P^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} t^{\lambda\mu},$$

où $t^{\lambda\mu}$ est un tenseur antisymétrique contravariant, nous avons

$$(24.4) \quad -2m^{\alpha\rho}\partial_{\rho}\left(L^{\beta}_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta}\right) = -2\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu} + 2m^{\alpha\rho}L^{\beta}_{\lambda\alpha}\partial_{\rho}g_{\beta\mu} + 2m^{\alpha\rho}g_{\beta\mu}L^{\beta}_{\sigma\alpha}L^{\sigma}_{\lambda\rho},$$

tous les termes de cette égalité sont hermitiens en λ et μ au sens d'Einstein : pour le premier membre c'est évident; pour le terme en Ω, cela résulte de la formule (17.1), c'est donc vrai pour les deux derniers termes. Il vient, en mettant en évidence cette hermiticité,

$$\begin{aligned} -2m^{\alpha\rho}\partial_{\rho}\left(L^{\beta}_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta}\right) = &-\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu} - \overline{\Omega}^{\beta}_{\mu}(m)g_{\lambda\beta} + m^{\alpha\rho}L^{\beta}_{\lambda\alpha}\partial_{\rho}g_{\beta\mu} \\ &+ m^{\rho\alpha}L^{\beta}_{\alpha\mu}\partial_{\rho}g_{\lambda\beta} + m^{\alpha\rho}g_{\beta\mu}L^{\beta}_{\alpha\sigma}L^{\sigma}_{\lambda\rho} + m^{\rho\alpha}g_{\lambda\beta}L^{\beta}_{\alpha\sigma}L^{\sigma}_{\rho\mu}, \end{aligned}$$

avec notre notation de congruence et dans un système de coordonnées où $F^{\alpha} = 0$, nous avons donc

$$2H^{\rho}_{\lambda}g_{\rho\mu} + 2H^{\rho}_{\mu}g_{\lambda\rho} - 2P_{\lambda\mu} \sim -l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu} - \Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu} - \overline{\Omega}^{\beta}_{\mu}(m)g_{\lambda\beta},$$

la formule complète étant

$$\begin{aligned} (24.5) \quad 2H^{\rho}_{\lambda}g_{\rho\mu} + 2H^{\rho}_{\mu}g_{\lambda\rho} - 2P_{\lambda\mu} = &-l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu} - \Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu} - \overline{\Omega}^{\beta}_{\mu}(m)g_{\lambda\beta} \\ &- g_{\lambda\beta}\partial_{\mu}F^{\beta} - g_{\beta\mu}\partial_{\lambda}F^{\beta} - F^{\alpha}\partial_{\alpha}g_{\lambda\mu} + 2\Lambda'_{\lambda\mu}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 2\Lambda'_{\lambda\mu} = l^{\alpha\rho}\big[&L^{\beta}_{\lambda\alpha}\partial_{\rho}g_{\beta\mu} + L^{\beta}_{\alpha\mu}\partial_{\rho}g_{\lambda\beta} + L^{\sigma}_{\lambda\rho}L^{\beta}_{\sigma\alpha}g_{\beta\mu} + L^{\sigma}_{\rho\mu}L^{\beta}_{\alpha\sigma}g_{\lambda\beta} \\ &+ 2S^{\sigma}_{\rho\lambda}L^{\beta}_{\sigma\alpha}g_{\beta\mu}g^{\rho\alpha} + 2S^{\sigma}_{\mu\rho}L^{\beta}_{\alpha\sigma}g_{\lambda\beta}g^{\alpha\rho}\big], \end{aligned}$$

cette nouvelle forme a l'intérêt de rendre tensoriel le terme supplémentaire. Nous utiliserons notre formule fondamentale au prochain chapitre et surtout dans l'interprétation physique de la troisième partie.

CHAPITRE V.

Conditions générales d'existence des solutions.

C'est seulement en 1950 que Y. Fourès [12] a montré l'existence et l'unicité dans le cas non analytique des solutions du système des équations d'Einstein de la relativité générale satisfaisant à des conditions initiales bien déterminées. La théorie unitaire n'en est pas encore au stade où l'on peut espérer résoudre complètement un tel problème pour le système des équations du champ; néanmoins on pourra étendre ou généraliser bien des résultats donnés par

l'analyse du problème de Cauchy en relativité générale; rappelons brièvement ceux-ci dans le cas extérieur. Avec les notations du paragraphe 11, étant donné sur une hypersurface S les potentiels de gravitation $a_{\lambda\mu}$ et leurs dérivées premières, le problème consiste à déterminer en dehors de S les potentiels supposés satisfaire aux équations

$$G_{\alpha\beta} = 0.$$

Pour une étude élémentaire locale, on cherche à déterminer les dérivées successives des $a_{\lambda\mu}$ sur une hypersurface S représentée par l'équation $x^0 = 0$, en fonction des « données de Cauchy », valeurs sur S de $a_{\lambda\mu}$ et $\partial_0 a_{\lambda\mu}$. Mettons en évidence les dérivées secondes des potentiels; seules les dérivées secondes d'indice 2 sont inconnues (on appelle indice d'une dérivée de $a_{\lambda\mu}$ le nombre de fois que 0 figure sous le signe ∂); on trouve que le système $G_{\alpha\beta} = 0$ est équivalent, au voisinage de S, et si $a^{00} \neq 0$ au système (10)

$$G_{ij} \simeq -\frac{1}{2} a^{00} \partial_{00} a_{ij} = 0,$$

$$S^0_\lambda \simeq 0 = 0,$$

où le signe $\simeq$ désigne une congruence modulo des fonctions additives des données de Cauchy et de leurs dérivées premières par rapport aux x^k. Ce nouveau système détermine $\partial_{00} a_{ij}$ sur S à condition que $a^{00} \neq 0$; les $\partial_{00} a_{0\lambda}$ n'interviennent pas : nous dirons que ce sont des dérivées secondes non significatives (dont les discontinuités n'ont pas de sens physique); au contraire, dire que $\partial_{00} a_{ij}$ n'est pas définie pour $a^{00} = 0$, c'est dire qu'elle admet une discontinuité de type de Hadamard à la traversée d'une hypersurface S qui, si son équation locale est $f(x^\alpha) = 0$ satisfait à

$$\Delta_1 f \equiv a^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0,$$

donc est tangente au cône élémentaire au point considéré; de telles hypersurfaces reçoivent le nom de variétés caractéristiques, car, à partir de l'une d'elles, le problème posé est indéterminé; les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre $\Delta_1 f = 0$ s'appellent bicaractéristiques des équations d'Einstein : ce sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne considérée. Enfin on constate que le système des équations d'Einstein est en involution, ce qui entraîne une séparation du problème posé en problème des conditions initiales : recherches de données de Cauchy satisfaisant à $S^0_\lambda = 0$ et problème de l'évolution dans le temps : intégration du système $G_{ij} = 0$ pour ces données de Cauchy.

En théorie unitaire, nous allons d'abord reprendre l'étude de Lichnerowicz [21], qui nous conduira à résoudre un problème algébrique de système

---

(10) i, j et tout indice latin = 1, 2, 3.

linéaire, à la suite de quoi les variétés caractéristiques des équations du champ seront complètement déterminées.

I. — Analyse du système des équations du champ.

25. Le choix des données de Cauchy et les théorèmes préliminaires. — Si nous écartons dans ce chapitre le cas exceptionnel ([11]) où les équations de liaison ne déterminent pas la connexion en fonction du tenseur fondamental, nous pouvons prendre pour $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ les fonctions de $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées premières définies par la solution unique de (9.5); ainsi nous n'aurons plus à considérer comme grandeurs de champ que les $g_{\lambda\mu}$ et le vecteur covariant Σ_α, et comme équations du champ

$$\partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho\beta]} = 0, \tag{25.1}$$

$$P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha) = 0, \tag{25.2}$$

l'expression de $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ en fonction du tenseur fondamental et de ses dérivées premières est d'une telle complication qu'elle ne permet pas de mettre en évidence les dérivées secondes dans (25.2); notre formule fondamentale nous y aidera (sans être du tout indispensable) et surtout deux théorèmes qui évitent les calculs explicites.

Nous nous posons donc le problème local suivant : étant donné sur une hypersurface S les composantes du tenseur fondamental et leurs dérivées premières ainsi que les composantes du vecteur covariant Σ_α, déterminer au voisinage de S le tenseur fondamental et le vecteur Σ_α supposés satisfaire aux équations (25.1) et (25.2). Nous devons choisir les données de Cauchy de manière à utiliser les relations (25.1); définissons localement S par $x^0 = 0$; le calcul montre que, au voisinage de S et si $g^{00} \neq 0$ dans ce système de coordonnées locales, la donnée de $g_{\lambda\mu}$ est équivalente à la donnée des quantités g_{ij}, $\mathfrak{g}^{[0i]}$, $\mathfrak{g}^{(0\lambda)}$. Nous supposons donc désormais remplie la condition $g^{00} \neq 0$ (l'utilisation des densités tensorielles a cet inconvénient d'obliger à la poser d'emblée, masquant ainsi les points précis où elle intervient). Les $\partial_0 \mathfrak{g}^{[0i]}$ s'exprimant d'après (25.1) en fonction des $\partial_k \mathfrak{g}^{[ki]}$, nous prendrons pour données de Cauchy les valeurs sur S de

$$g_{ij}, \quad \mathfrak{g}^{[0i]}, \quad \mathfrak{g}^{(0\lambda)}, \quad \partial_0 g_{ij}, \quad \partial_0 \mathfrak{g}^{(0\lambda)}, \quad \Sigma_\alpha.$$

Alors considérons le changement de coordonnées

$$x^{\lambda'} = x^\lambda + \frac{(x^0)^2}{6}[\varphi^{(\lambda)}(x^i) + \varepsilon^\lambda] \tag{25.3}$$

([11]) Ce cas est celui où l'on a simultanément $k = 0$, $g = 2h$ d'après [18] et [27]; or pour l'interprétation physique on se place en général dans des conditions où g est voisin de h.

($\lambda = \lambda'$ numériquement, $\varepsilon^{\lambda} \to 0$ quand $x^0 \to 0$). Un calcul simple (le même qu'en relativité générale) montre que S est conservée point par point, de même que les valeurs des données de Cauchy et les $\partial_{00} g_{ij}$; un calcul un peu plus long, à cause de l'intervention de $\sqrt{|g|}$, prouve que les $\partial_{00}\mathfrak{g}^{[0i]}$ sont également conservés tandis qu'on peut donner des valeurs arbitraires sur S aux $\partial_{00}\mathfrak{g}^{(0\lambda)}$ en agissant sur les fonctions $\varphi^{(\lambda)}$: les $\partial_{00}\mathfrak{g}^{(0\lambda)}$ sont des dérivées secondes non significatives. C'est le premier théorème préliminaire qui admet un corollaire immédiat : dans le changement de coordonnées (25.3) on a sur S

$$P_{\alpha'\beta'} = P_{\alpha\beta},$$

c'est donc que pour toute connexion linéaire $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ solution des équations de liaison, le tenseur de Ricci est indépendant des dérivées d'indice $2\partial_{00}\mathfrak{g}^{(0\lambda)}$.

Le deuxième théorème préliminaire concerne les K^0_λ que nous avons définis au paragraphe 11, 2°; *a priori*, les K^0_λ contiennent, comme les $P_{\alpha\beta}$, des dérivées d'indice 2. Mais, d'après les identités de conservation (11.2),

$$\partial_0 \mathcal{H}^0_\lambda = -\partial_i \mathcal{H}^i_\lambda - \frac{1}{2} P_{\alpha\beta}\, \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\alpha\beta},$$

et les $\partial_0 \mathcal{H}^0_\lambda$ ne contiennent toujours que des dérivées d'indice 2; c'est dire que $\mathcal{H}^0_\lambda$ ne contient que des dérivées d'indice 1 et, par suite, sont calculables sur S à partir des données de Cauchy relatives au tenseur fondamental.

Enfin, on démontre que le système (25.2) est équivalent au voisinage de S au système suivant :

$$(25.4)_a \qquad P_{ij} - \frac{2}{3}(\partial_i \Sigma_j - \partial_j \Sigma_i) = 0,$$

$$(25.4)_b \qquad P_{[i0]} - \frac{2}{3}(\partial_i \Sigma_0 - \partial_0 \Sigma_i) = 0,$$

$$(25.5) \qquad M^0_\lambda = K^0_\lambda + \Phi^0_\lambda(\partial_i S_\lambda, g^{\alpha\beta}) = 0$$

(M^{ε}_λ a été défini au paragraphe 11, 1°). Au total, le système (25.1)-(25.2) se décompose en deux systèmes; l'un est constitué de conditions que doivent nécessairement remplir les données de Cauchy : c'est (25.5) auquel on adjoint (25.1), où $\beta = 0$, soit

$$(25.6) \qquad \partial_k \mathfrak{g}^{[k0]} = 0,$$

l'autre devra être intégré pour de telles données de Cauchy : c'est (25.4) et

$$(25.7) \qquad \partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho i]} = 0;$$

le problème initial se trouve ramené à ces deux problèmes distincts, de conditions initiales et d'intégration d'un système tronqué, car on établit, à l'aide d'une part des identités de conservation, d'autre part des identités $\partial_{\rho\sigma}\mathfrak{g}^{[\rho\sigma]} = 0$ que si une solution $(g_{\lambda\mu}, \Sigma_\alpha)$ de (25.4), (25.7) satisfait *sur* S à (25.5) et (25.6), elle y satisfait aussi *au voisinage de* S.

26. Intégration des équations du champ. — Soit une solution de (25.4), (25.7) pour des données de Cauchy satisfaisant à (25.5) et (25.6); cherchons à déterminer les valeurs sur S des dérivées successives du tenseur fondamental et du vecteur covariant Σ^α. Les équations (25.7) fournissent immédiatement les valeurs sur S des $\partial_0 \mathfrak{g}^{[0i]}$, donc aussi des $\partial_{00} \mathfrak{g}^{[0i]}$ en fonction des données de Cauchy et de leurs dérivées premières par rapport aux x^k; les $\partial_{00} \mathfrak{g}^{[0\lambda]}$ ne figurent dans aucune équation d'après le premier théorème préliminaire. Reste à calculer $\partial_{00} g_{ij}$, car, une fois ce calcul fait, $P_{[i0]}$ est connu sur S et les équations $(25.4)_b$ fournissent les $\partial_0 \Sigma_i$; $\partial_0 \Sigma_0$ pourra être déduit d'une condition auxiliaire invariante à imposer au vecteur Σ_α. Pour calculer $\partial_{00} g_{ij}$, utilisons notre formule fondamentale (23.10), avec $\lambda = i$, $\mu = j$. Avec la notation de congruence définie dans l'introduction de ce chapitre, elle donne

$$(26.1) \qquad P_{\rho i} g^{\rho\beta} g_{\beta j} + P_{j\rho} g^{\beta\rho} g_{i\beta} \simeq - l^{00} \partial_{00} g_{ij} + 2 m^{0h} \partial_0 L^k_{hj} g_{ik} + 2 m^{0h} \partial_0 L^0_{hj} g_{i0}.$$

Les équations $(25.4)_a$ nous donnent les valeurs de P_{ij} sur S; et *elles nous donnent aussi les valeurs des* $\partial_0 L^0_{ij}$ *sur* S, car d'après l'expression (5.6) des composantes du tenseur de Ricci en fonction des coefficients de la connexion, où nous ne retenons que les termes qui peuvent contenir des dérivées d'indice 2 du tenseur fondamental, il vient

$$P_{ij} \simeq \partial_0 L^0_{ij}.$$

Pour tirer $\partial_{00} g_{ij}$ de (26.1), il nous reste donc à montrer qu'on peut calculer sur S les P_{0i} et P_{i0} qui figurent au premier membre et les $\partial_0 L^h_{ik}$ qui figurent au deuxième membre; ce que nous allons faire en prouvant que ces quantités ne dépendent que des $\partial_0 L^0_{ij}$ modulo des fonctions additives des données de Cauchy et de leurs dérivées premières par rapport aux x^k.

a. Calcul des $\partial_0 L^h_{ik}$. — D'après les relations de liaison, qui sont supposées vérifiées comme nous l'avons dit au début du paragraphe 25,

$$\partial_k g_{ij} = L^h_{ik} g_{hj} + L^h_{kj} g_{ih} + L^0_{ik} g_{0j} + L^0_{kj} g_{i0},$$

dérivons par rapport à x^0

$$\partial_{0k} g_{ij} \simeq \partial_0 L^h_{ik} g_{hj} + \partial_0 L^h_{kj} g_{ih} + \partial_0 L^0_{ik} g_{0j} + \partial_0 L^0_{kj} g_{i0},$$

soit

$$(26.2) \qquad \partial_0 L^h_{ik} g_{hj} + \partial_0 L^h_{kj} g_{ih} \sim T_{ikj},$$

où T_{ikj} est une combinaison linéaire des $\partial_0 L^0_{rs}$; nous avons à résoudre ce système aux inconnues $\partial_0 L^k_{ik}$ sur une variété V_3, les coefficients des inconnues étant g_{ij} tels que $\det(g_{ij}) = g g^{00} \neq 0$; du point de vue algébrique (26.2) a la même forme que (9.5); il est à présumer, et nous admettrons pour l'instant, que les résultats obtenus pour quatre dimensions sont valables pour trois, c'est-à-dire que sauf dans un cas exceptionnel, le système (26.2) admet une solution et une seule; la démonstration détaillée de ce résultat fera l'objet de la

deuxième partie de ce chapitre. De (26.2) on déduit donc

$$\partial_0 L^h_{ik} \simeq T'^h_{ik}, \tag{26.3}$$

où la lettre T′ a la même signification que T dans (26.2).

b. Calcul de P_{0i} et P_{i0}. — La formule (5.6) nous donne encore

$$P_{i0} \simeq \partial_0 L^0_{i0} - \partial_0 L^\alpha_{i\alpha} = -\partial_0 L^h_{ih},$$
$$P_{0i} \simeq \partial_0 L^0_{0i};$$

par contraction de (26.3) en h et k, on voit que P_{i0} dépend linéairement des $\partial_0 L^0_{rs}$. Quant à P_{0i}, remarquons que

$$L^0_{0i} = L^\alpha_{\alpha i} - L^h_{hi}.$$

Or $L^\alpha_{\alpha i}$ n'est autre que γ_i, (8.1) qui ne contient que des dérivées d'indice o du tenseur fondamental, d'où l'on déduit que

$$\partial_0 L^\alpha_{\alpha i} \simeq 0$$

et le résultat cherché est aussi acquis pour P_{i0}.

Donc on peut tirer $\partial_{00} g_{ij}$ de (26.1) à condition que $l^{00} \neq 0$, qui est une conséquence de $g^{00} \neq 0$, et sauf dans le cas exceptionnel signalé au *a*.

Nous avons obtenu le résultat suivant : à la traversée de $S(x^0 = 0)$ les dérivées secondes $\partial_{00} g_{ij}$ et $\partial_{00} \mathfrak{g}^{[0i]}$ sont continues, de même que $\partial_0 \Sigma_0$ et $\partial_0 \Sigma_i$ sous réserve que :

1° $g^{00} \neq 0$;
2° le système (26.2) soit inversible.

Par dérivation par rapport à x^0 de (25.4), (25.7), de la condition auxiliaire et de la formule fondamentale, on peut calculer sur S les dérivées successives du tenseur fondamental et du vecteur covariant Σ_α dans les mêmes conditions. Dans le cas trop particulier où les données de Cauchy sont analytiques, le théorème de Cauchy-Kowalewska conclut à l'existence et à l'unicité de la solution des équations du champ sous les réserves faites. Il est permis de penser que les méthodes de Y. Fourès pourraient s'étendre aux cas non analytiques.

II. — Détermination complète des variétés caractéristiques.

Les dérivées secondes d'indice 2 ne sont pas déterminées par des données de Cauchy relatives à une hypersurface S qui ne satisfait pas aux conditions 1° et 2° du paragraphe 26; il peut exister une infinité de solutions des équations du champ ayant un contact du premier ordre le long d'une telle hypersurface; ce sont ces propriétés qu'on traduit en appelant caractéristiques les hypersurfaces exceptionnelles. Donc une hypersurface d'équation $x^0 = 0$ sera une

variété caractéristique des équations du champ unitaire si $g^{00}=0$ ou si le système

$$\partial_k g_{ij}=\mathrm{L}^h_{ik}g_{hj}+\mathrm{L}^h_{kj}g_{ih},\qquad \text{avec } \det(g_{ij})\neq 0$$

n'admet pas une solution unique; nous devons préciser ce deuxième cas exceptionnel; si $\det(h_{ij})\neq 0$, les méthodes de M^me^ Tonnelat ou de Hlavatý sont applicables, mais les calculs effectifs n'ont été faits que dans le cas de quatre dimensions, et les résultats dépendent *a priori* de cette dimension : nous allons rappeler les formules générales et diriger les calculs de manière à trouver le plus rapidement possible le discriminant du système, qui nous intéresse seul ici. Dans le cas où $\det(h_{ij})=0$, nous prouverons que le système est impossible ou indéterminé en exhibant trois équations en général incompatibles.

27. Formules générales de résolution pour le système des équations de liaison. — Dans ce paragraphe, nous utiliserons des indices grecs bien que ceux-ci puissent parcourir un ensemble fini quelconque d'entiers $1, \ldots, n$.

Étant donné sur V_n le champ de tenseurs $g_{\lambda\mu}$ tel que

$$\det[g_{(\lambda\mu)}]=\det(h_{\lambda\mu})\neq 0,$$

soit à résoudre le système aux inconnues $\mathrm{L}^\alpha_{\beta\gamma}$

$$\partial_\rho g_{\lambda\mu}=\mathrm{L}^\sigma_{\lambda\rho}g_{\sigma\mu}+\mathrm{L}^\sigma_{\rho\mu}g_{\lambda\sigma}. \tag{27.1}$$

Il est naturel de prendre la partie symétrique de (27.1),

$$\partial_\rho h_{\lambda\mu}=\mathrm{L}^\sigma_{(\lambda\rho)}h_{\sigma\mu}+\mathrm{L}^\sigma_{(\rho\mu)}h_{\lambda\sigma}+\mathrm{S}^\sigma_{\lambda\rho}k_{\sigma\mu}+\mathrm{S}^\sigma_{\rho\mu}k_{\lambda\sigma}$$

et de former la combinaison qui conduit aux symboles de Christoffel

$$\frac{1}{2}(\partial_\lambda h_{\mu\rho}+\partial_\mu h_{\rho\lambda}-\partial_\rho h_{\lambda\mu})=[\lambda\mu,\ \rho]_h,$$

on obtient ainsi

$$[\lambda\mu,\ \rho]_h=\mathrm{L}^\sigma_{(\lambda\mu)}h_{\sigma\rho}+\mathrm{S}^\sigma_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}+\mathrm{S}^\sigma_{\rho\mu}k_{\sigma\lambda}$$

ou encore

$$\mathrm{L}^\sigma_{(\lambda\mu)}=\begin{Bmatrix}\sigma\\ \lambda\mu\end{Bmatrix}_h+h^{\sigma\rho}(\mathrm{S}^\alpha_{\rho\lambda}k_{\mu\alpha}+\mathrm{S}^\alpha_{\rho\mu}k_{\lambda\alpha}).$$

Nous poserons désormais

$$\mathrm{U}^\sigma_{\lambda\mu}=h^{\sigma\rho}(\mathrm{S}^\alpha_{\rho\lambda}k_{\mu\alpha}+\mathrm{S}^\alpha_{\rho\mu}k_{\lambda\alpha}),\qquad \text{où}\quad \mathrm{U}^\sigma_{\lambda\mu}=\mathrm{U}^\sigma_{\mu\lambda}. \tag{27.2}$$

Ainsi les coefficients de la connexion inconnue sont la somme des coefficients de la connexion riemannienne relative au tenseur symétrique $h_{\alpha\beta}$, du tenseur de torsion et du tenseur symétrique à trois indices défini par (27.2). Nous allons substituer ces deux derniers aux inconnues $\mathrm{L}^\alpha_{\beta\gamma}$. Cherchons l'autre système des relations qui les lient à partir de la forme tensorielle (10.1)

de (27.1), soit

$$\mathrm{D}_\rho g_{\lambda\mu} = 2\,\mathrm{S}^\alpha_{\rho\mu} g_{\lambda\alpha}. \tag{27.3}$$

Explicitons la dérivée covariante du premier nombre en y faisant apparaître $\overset{h}{\nabla}_\rho$ suivant la décomposition indiquée des coefficients $\mathrm{L}^\alpha_{\beta\gamma}$. Comme $\overset{h}{\nabla}_\rho h_{\lambda\mu} = 0$, il vient

$$\overset{h}{\nabla}_\rho k_{\lambda\mu} - (\mathrm{U}^\alpha_{\lambda\rho} + \mathrm{S}^\alpha_{\lambda\rho}) g_{\alpha\mu} - (\mathrm{U}^\alpha_{\mu\rho} + \mathrm{S}^\alpha_{\mu\rho}) g_{\lambda\alpha} = 2\,\mathrm{S}^\alpha_{\rho\mu} g_{\lambda\alpha}$$

et, après une simplification,

$$\overset{h}{\nabla}_\rho k_{\lambda\mu} - \mathrm{U}^\alpha_{\lambda\rho} g_{\alpha\mu} - \mathrm{U}^\alpha_{\mu\rho} g_{\lambda\alpha} = \mathrm{S}^\alpha_{\rho\mu} g_{\lambda\alpha} + \mathrm{S}^\alpha_{\lambda\rho} g_{\alpha\mu}. \tag{27.4}$$

Permutons circulairement (27.4) deux fois

$$\overset{h}{\nabla}_\lambda k_{\mu\rho} - \mathrm{U}^\alpha_{\mu\lambda} g_{\alpha\rho} - \mathrm{U}^\alpha_{\rho\lambda} g_{\mu\alpha} = \mathrm{S}^\alpha_{\lambda\rho} g_{\mu\alpha} + \mathrm{S}^\alpha_{\mu\lambda} g_{\alpha\rho},$$
$$\overset{h}{\nabla}_\mu k_{\rho\lambda} - \mathrm{U}^\alpha_{\rho\mu} g_{\alpha\lambda} - \mathrm{U}^\alpha_{\lambda\mu} g_{\rho\alpha} = \mathrm{S}^\alpha_{\mu\lambda} g_{\rho\alpha} + \mathrm{S}^\alpha_{\rho\mu} g_{\alpha\lambda}$$

et retranchons de (27.4) ces deux nouvelles équations. Il apparaît une combinaison des $\overset{h}{\nabla}_\alpha k_{\beta\gamma}$ analogue à celle des symboles de Christoffel. Nous poserons, suivant Hlavatý,

$$\mathrm{K}_{\lambda\mu\rho} = \overset{h}{\nabla}_\lambda k_{\rho\mu} + \overset{h}{\nabla}_\mu k_{\lambda\rho} + \overset{h}{\nabla}_\rho k_{\lambda\mu} \qquad (\mathrm{K}_{\lambda\mu\rho} = -\mathrm{K}_{\mu\lambda\rho});$$

après réduction dans chaque membre, il vient

$$\mathrm{K}_{\lambda\mu\rho} + 2\,\mathrm{U}^\alpha_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + 2\,\mathrm{U}^\alpha_{\rho\mu} k_{\alpha\lambda} + 2\,\mathrm{U}^\alpha_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} = 2\,\mathrm{S}^\alpha_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} + 2\,\mathrm{S}^\alpha_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + 2\,\mathrm{S}^\alpha_{\rho\mu} k_{\lambda\alpha}; \tag{27.5}$$

en tenant compte de (27.2) on constate que le dernier terme du premier membre et les deux derniers termes du second membre disparaissent. Nous obtenons le système

$$\begin{cases} \mathrm{U}^\sigma_{\lambda\mu} = h^{\sigma\rho}(\mathrm{S}^\alpha_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + \mathrm{S}^\alpha_{\rho\mu} k_{\lambda\alpha}), \\ 2\,\mathrm{S}^\alpha_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} = \mathrm{K}_{\lambda\mu\rho} + 2\,\mathrm{U}^\alpha_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + 2\,\mathrm{U}^\alpha_{\rho\mu} k_{\alpha\lambda} \end{cases} \tag{17.6}$$

équivalant au système proposé pourvu que $\det(h_{\mu\nu}) \neq 0$. L'emploi d'un système de coordonnées particulier simplifiera suffisamment ces équations pour que $\mathrm{U}^\sigma_{\lambda\mu}$ s'élimine aisément et qu'il reste un système linéaire aux inconnues $\mathrm{S}_{\lambda\mu}$ $\left[\text{au nombre de } \frac{n^2(n-1)}{2} \text{ au lieu de } n^3 \text{ coefficients } \mathrm{L}^\alpha_{\beta\gamma}\right]$.

28. Le cas de trois dimensions. — Les coefficients g_{ij} du système (26.2) ne sont pas les composantes d'un tenseur, ce qui n'empêche nullement que du point de vue algébrique les formules précédentes soient valables en chaque point à condition que $\det(h_{ij}) \neq 0$. Dans ce cas, nous allons réduire la matrice g_{ij} à une forme canonique. Remarquons que $\det(k_{ij}) = 0$ comme déterminant symétrique gauche d'ordre impair; il existe donc un vecteur u

(et un seul, sans quoi g_{ij} serait symétrique) tel que

$$k_{ij}u^j = 0.$$

Prenons un repère e_1, e_2, e_3 tel que $u = e_3$ et e_1 et e_2 orthogonaux (au sens de h_{ij}) entre eux et à e_3. Ce choix de repère entraîne

$$h_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j, \qquad k_{13} = k_{23} = 0.$$

Prenons $k_{12} = -k_{21} = a$ et nous avons

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_{11} & a & 0 \\ -a & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \det(g_{ij}) &= (h_{11} \times h_{22} + a^2) h_{33}, \\ \det(h_{ij}) &= h_{11} h_{22} h_{33}, \end{aligned}$$

l'utilisation d'une forme réduite est spécialement avantageuse en dimension 3 parce qu'il n'y en a qu'une, ce qui n'est déjà plus vrai en dimension 4. Reprenons maintenant le système (27.6)

$$2S'_{ijk} = K_{ijk} + 2U^l_{ki}k_{jl} + 2U^l_{kj}k_{li}, \tag{28.1}$$

$$U^l_{ij} = h^{lk}(S^m_{ki}k_{jm} + S^m_{kj}k_{im}), \tag{28.2}$$

où nous avons posé, pour simplifier l'écriture,

$$S'_{ij}h_{lk} = S'_{ijk}, \qquad \text{où} \quad S'_{ijk} = -S'_{jik}.$$

Explicitons les équations en les groupant suivant le degré de simplification apporté par le choix du repère; a et b désignent des indices qui ne pourront prendre que les valeurs 1 et 2 :

1° $i = k = 3$, $j = a$; d'après (28.2), $U^a_{33} = 0$. Il n'y a plus de termes en U dans (28.1),

$$2S'_{3a3} = K_{3a3};$$

2° $j = 3$, $i = k = a$; il reste un terme en U, $2U^b_{a3}k_{ba}$, mais $K_{a3a} = 0$. Toutes les équations qui suivent sont sans sommation en a et b ($a \neq b$),

$$2S'_{a3a} = -2a^2(h^{bb})^2 S'_{b3b};$$

3° $j = 3$, $i = a$, $k = b$; un terme en U subsiste comme au 2°, mais $K_{a3b} \neq 0$,

$$2S'_{a3b} = K_{a3b} + 2a^2 h^{11} h^{22} S'_{b3a};$$

4° Si l'indice 3 ne peut figurer qu'à la place de k, avec $i = 1$, $j = 2$, les deux groupes de termes en U sont représentés dans (28.1)

$$2S'_{12k} = K_{12k} - 2a^2 h^{11} h^{22}(S'_{k21} - S'_{k12}).$$

Le système proposé se sépare. Les équations du 1° sont tout résolues; au 2° nous avons un système homogène de deux équations aux inconnues S'_{131}

et S'_{232}, de déterminant

$$\Delta^1 = (1 + a^2 h^{11} h^{22})(1 - a^2 h^{11} h^{22}).$$

Si $k = 1$ ou 2, au 4^o, les deux équations correspondantes ne contiennent chacune qu'une inconnue. Leur déterminant est le même

$$\Delta^2 = 1 + a^2 h^{11} h^{22}.$$

Enfin, l'équation du 4^o où $k = 3$ et les deux équations du 3^o constituent un système aux inconnues S'_{123}, S'_{231}, S'_{312}, dont le déterminant est

$$\Delta^3 = (1 + a^2 h^{11} h^{22})(1 - a^2 h^{11} h^{22}) = \Delta^1.$$

Au total, l'existence et l'unicité de la solution seront garanties par

$$(28.3) \qquad (1 + a^2 h^{11} h^{22})(1 - a^2 h^{11} h^{22}) \neq 0,$$

or

$$1 + a^2 h^{11} h^{22} = \text{dét}(g_{ij})/\text{dét}(h_{ij}),$$
$$1 - a^2 h^{11} h^{22} = 2 - \text{dét}(g_{ij})/\text{dét}(h_{ij}).$$

Donc la condition (28.3) s'écrit

$$\text{dét}(g_{ij})\,[2\,\text{dét}(h_{ij}) - \text{dét}(g_{ij})] \neq 0,$$

c'est-à-dire seulement

$$(28.4) \qquad 2\,\text{dét}(h_{ij}) - \text{dét}(g_{ij}) \neq 0.$$

Le calcul que nous venons d'indiquer est identiquement celui fait par Hlavatý [18] dans le cas de quatre variables sur une des formes réduites possibles de $g_{\lambda\mu}$. A cette occasion nous constatons que les calculs sont les mêmes quelle que soit la dimension de la variété V_n envisagée pourvu que la 2-forme associée à $k_{\lambda\mu}$ soit de rang 2.

29. Le cas particulier où le déterminant des $g_{(ij)}$ est nul. — Nous allons montrer que ce cas particulier est un cas singulier pour le système

$$(29.1) \qquad \partial_k g_{ij} = \mathrm{L}^h_{ik} g_{hj} + \mathrm{L}^h_{kj} g_{ih}.$$

Prenons d'abord comme précédemment la forme canonique de la matrice g_{ij}. Du moment que

$$\text{dét}(h_{ij}) = 0,$$
$$\text{dét}(k_{ij}) = 0,$$

il existe deux vecteurs u et v non nuls et distincts [parce que $\text{dét}(g_{ij}) \neq 0$] tels que

$$h_{ij} u^j = 0,$$
$$k_{ij} v^j = 0.$$

Prenons $u = e_1$ et $v = e_2$. Il vient

$$h_{11} = h_{12} = h_{13} = 0, \qquad k_{12} = k_{32} = 0.$$

Choisissons c_3 de manière à annuler h_{23} et posons $k_{13} = -k_{31} = a$, Alors

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & a \\ -a & 0 & h_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{dét}(g_{ij}) = a^2 h_{22} \neq 0.$$

Nous allons extraire du système (29.1) les trois équations telles que i, j, k prennent les valeurs 1, 2, 2 :

1° pour $k = 1$, $i = j = 2$,

$$\partial_1 h_{22} = \mathrm{L}^2_{21} h_{22} + \mathrm{L}^2_{12} h_{22}; \tag{29.2}$$

2° pour $k = 2$, $i = 1$, $j = 2$,

$$0 = \mathrm{L}^2_{12} h_{22} + \mathrm{L}^3_{22} a; \tag{29.3}$$

3° pour $k = i = 2$, $j = 1$,

$$0 = -\mathrm{L}^3_{22} a + \mathrm{L}^2_{21} h_{22}, \tag{29.4}$$

ajoutons (29.3) et (29.4); nous obtenons l'équation

$$\mathrm{L}^2_{12} + \mathrm{L}^2_{21} = 0$$

qui contredit (29.2)

$$\mathrm{L}^2_{12} + \mathrm{L}^2_{21} = \frac{\partial_1 h_{22}}{h_{22}},$$

si $\partial_1 h_{22} \neq 0$ il y a impossibilité; si $\partial_1 h_{22} = 0$, il y a indétermination; de toutes manières, (29.1) n'est pas inversible.

30. Les trois groupes de variétés caractéristiques. — A la condition initiale $g^{00} \neq 0$, nous venons de voir que l'inversibilité du système (26.2) ajoute les deux conditions :

$$2\,\text{dét}(h_{ij}) - \text{dét}(g_{ij}) \neq 0, \qquad \text{dét}(h_{ij}) = 0.$$

Mettons-les sous une forme plus agréable en rappelant que

$$\text{dét}(h_{ij}) = g g^{00}, \qquad \text{dét}(h_{ij}) = h h^{00}$$

et rassemblons les résultats obtenus : une hypersurface S, localement représentée par $x^0 = 0$, est variété caractéristique des équations du champ unitaire si les composantes du tenseur fondamental au point considéré satisfont à l'une des trois conditions

$$g^{00} = 0, \qquad 2h h^{00} - g g^{00} = 0, \qquad h^{00} = 0.$$

Si S est localement représentée au point x par $f(x^\alpha) = 0$, elle satisfait à l'une des trois équations aux dérivées partielles

$$l^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0, \tag{30.1}$$

$$\gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0, \qquad \text{où} \quad \gamma^{\alpha\beta} = \left(\frac{2h}{g}\right) h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}, \tag{30.2}$$

$$h^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0. \tag{30.3}$$

Dans nos hypothèses, (30.1) et (30.3) sont les équations tangentielles de deux cônes convexes de sommet x; quant à (30.2), nous ne pouvons pas l'interpréter géométriquement avant d'avoir étudié le tenseur $\gamma^{\alpha\beta}$.

CHAPITRE VI.

Les éléments géométriques attachés a chaque point de V_4.

En chaque point de V_4 nous avons un tenseur $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux hypothèses précisées au paragraphe 6; mais il y a plus : les équations du champ (9.5), (9.6), (9.7) affectent chaque point du système de leurs variétés caractéristiques (30.1), (30.2), (30.3); les équations de ces variétés sont exprimées en fonctions des tenseurs déduits de $g_{\alpha\beta}$ et du tenseur associé par symétrisation et antisymétrisation; pour les étudier, nous aurons besoin des relations entre ces tenseurs, leurs associés et les déterminants de leurs matrices, relations que nous allons d'abord rappeler [27], [29]. Nous indiquerons le détail des calculs en les transposant dans nos notations.

I. — Étude algébrique des relations qui lient les tenseurs dérivés du tenseur fondamental.

31. Relations tensorielles a deux indices. — Nos hypothèses sur le tenseur $g_{\alpha\beta}$ assurent l'existence de $h^{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$(§ 6). Pour pouvoir utiliser les écritures $k^{\alpha\beta}$, $m_{\alpha\beta}$ nous ferons provisoirement les hypothèses supplémentaires $\det(k_{\alpha\beta}) \neq 0$ et $\det(m^{\alpha\beta}) \neq 0$.

1° *Coefficient d'un élément dans le développement du déterminant d'une matrice d'ordre 4, somme de deux matrices.* — Calculons le coefficient $aa^{\alpha\beta}$ de l'élément $a_{\alpha\beta}$ dans un déterminant a où

$$a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta},$$

les $b_{\alpha\beta}$ et $c_{\alpha\beta}$ ne possédant aucune propriété de symétrie; $aa^{\alpha\beta}$ est un déterminant d'ordre 3 qui se décompose comme suit en une somme de huit déterminants :

— 1 déterminant ne contenant que des b, égal à $bb^{\alpha\beta}$; soit B ce déterminant;
— 1 déterminant ne contenant que des c, égal à $cc^{\alpha\beta}$; soit C ce déterminant;
— 3 déterminants avec deux colonnes de b et une de c; soit S leur somme;
— 3 déterminants avec deux colonnes de c et une de b; soit S′ leur somme

Il suffit de calculer S; S′ s'en déduira par échange de b et de c,

$$S = c_{\rho\sigma} \times \text{coefficient de } b_{\rho\sigma} \text{ dans le développement de B},$$

$$S = c_{\rho\sigma} \times \frac{\partial(bb^{\alpha\beta})}{\partial b_{\rho\sigma}} = c_{\rho\sigma}(bb^{\rho\sigma})b^{\alpha\beta} + c_{\rho\sigma} b \frac{\partial b^{\alpha\beta}}{\partial b_{\rho\sigma}}.$$

D'après une formule classique,

$$\frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial b_{\rho\sigma}} = - b^{\alpha\mu} b^{\lambda\beta} \frac{\partial b_{\lambda\mu}}{\partial b_{\rho\sigma}} = - b^{\alpha\sigma} b^{\rho\beta}.$$

Donc

$$S = b b^{\rho\sigma} b^{\alpha\beta} c_{\rho\sigma} - b b^{\alpha\sigma} b^{\rho\beta} c_{\rho\sigma}.$$

On en déduit l'expression cherchée

$$a a^{\alpha\beta} = b b^{\alpha\beta} + c c^{\alpha\beta} + b b^{\rho\sigma} b^{\alpha\beta} c_{\rho\sigma} - b b^{\alpha\sigma} b^{\rho\beta} c_{\rho\sigma} + c c^{\rho\sigma} c^{\alpha\beta} b_{\rho\sigma} - c c^{\alpha\sigma} c^{\rho\beta} b_{\rho\sigma}.$$

Cette formule, appliquée à la décomposition canonique

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta},$$

se simplifie : le 3e et le 5e terme du 2e membre disparaissent par suite des propriétés de symétrie

$$g g^{\alpha\beta} = h h^{\alpha\beta} + k k^{\alpha\beta} + h h^{\alpha\rho} h^{\beta\sigma} k_{\rho\sigma} + k k^{\alpha\rho} k^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma},$$

partant de $g^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}$, nous en déduirons la relation analogue

$$\frac{g_{\alpha\beta}}{g} = \frac{l_{\alpha\beta}}{l} + \frac{m_{\alpha\beta}}{m} + \frac{1}{l} l_{\alpha\rho} l_{\beta\sigma} m^{\rho\sigma} + \frac{1}{m} m_{\alpha\rho} m_{\beta\sigma} l^{\rho\sigma}.$$

Partie symétrique et partie antisymétrique se séparent aisément et nous obtenons les quatre formules :

$$(31.1) \qquad l^{\alpha\beta} = \frac{h}{g} h^{\alpha\beta} + \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma},$$

$$(31.2) \qquad m^{\alpha\beta} = \frac{k}{g} k^{\alpha\beta} + \frac{h}{g} h^{\alpha\rho} h^{\beta\sigma} k_{\rho\sigma},$$

$$(31.3) \qquad h_{\alpha\beta} = \frac{g}{l} l_{\alpha\beta} + \frac{g}{m} m_{\alpha\rho} m_{\beta\sigma} l^{\rho\sigma},$$

$$(31.4) \qquad k_{\alpha\beta} = \frac{g}{m} m_{\alpha\beta} + \frac{g}{l} l_{\alpha\rho} l_{\beta\sigma} m^{\rho\sigma}.$$

2° *Les quatre formules inverses.* — Partons de la définition

$$g_{\alpha\sigma} g^{\alpha\beta} = g_{\sigma\alpha} g^{\beta\alpha} = \delta^{\beta}_{\sigma}$$

qui s'écrit, avec nos notations,

$$\delta^{\beta}_{\sigma} = h_{\alpha\sigma}(l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}) + k_{\alpha\sigma}(l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}),$$
$$\delta^{\beta}_{\sigma} = h_{\sigma\alpha}(l^{\beta\alpha} + m^{\beta\alpha}) + k_{\sigma\alpha}(l^{\beta\alpha} + m^{\beta\alpha}).$$

Ce système est équivalent au suivant, obtenu par addition et soustraction

$$(31.5) \qquad \delta^{\beta}_{\sigma} = h_{\alpha\sigma} l^{\alpha\beta} + k_{\alpha\sigma} m^{\alpha\beta},$$

$$(31.6) \qquad 0 = h_{\alpha\sigma} m^{\alpha\beta} + k_{\alpha\sigma} l^{\alpha\beta},$$

Éliminons, par exemple, $m^{\alpha\beta}$ en multipliant la deuxième ligne par $h^{\mu\sigma}$,

$$m^{\mu\beta} = - k_{\alpha\sigma} l^{\alpha\beta} h^{\mu\sigma}.$$

Reportons cette valeur de $m^{\mu\beta}$ dans la première ligne avec changement du nom des indices de sommation

$$\delta^{\beta}_{\sigma} = h_{\alpha\sigma} l^{\alpha\beta} - k_{\mu\sigma} l^{\alpha\beta} h^{\mu\lambda} k_{\alpha\lambda},$$
$$\delta^{\beta}_{\sigma} = l^{\alpha\beta} (h_{\alpha\sigma} - k_{\alpha\lambda} k_{\mu\sigma} h^{\mu\lambda}),$$

ce qui signifie, par définition,

$$l_{\alpha\sigma} = h_{\alpha\sigma} + k_{\alpha\lambda} k_{\sigma\mu} h^{\lambda\mu}$$

et en y joignant les trois formules analogues,

$$l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\rho\sigma}, \tag{31.1'}$$
$$m_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} + h_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} k^{\rho\sigma}, \tag{31.2'}$$
$$h^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\rho} m^{\beta\sigma} l_{\rho\sigma}, \tag{31.3'}$$
$$k^{\alpha\beta} = m^{\alpha\beta} + l^{\alpha\rho} l^{\beta\sigma} m_{\rho\sigma}, \tag{31.4'}$$

3° *Formules conséquences des deux premiers groupes.* — Considérons les formules (31.1) et (31.1').

$$l^{\alpha\mu} = \frac{h}{g} h^{\alpha\mu} + \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma},$$
$$l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\rho\sigma}.$$

Multiplions membre à membre,

$$\delta^{\mu}_{\beta} = \frac{h}{g} \delta^{\mu}_{\beta} + \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} + \frac{h}{g} h^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} + \frac{k}{g} \delta^{\mu}_{\beta},$$

on obtient la formule

$$kk^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} + hh^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = \delta^{\mu}_{\beta} (g - h - k). \tag{31.7}$$

32. Relations scalaires entre les déterminants g, l, h, m, k; le cas où $k = 0$. — 1° *Relations entre les déterminants.* — Rappelons d'abord la formule classique (12)

$$g = h + k + \frac{h}{2} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma}. \tag{32.1}$$

Compte tenu de cette formule, la contraction de (31.7) en β et μ donne

$$kk^{\alpha\rho} k^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} = hh^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = 2(g - h - k), \tag{32.2}$$

(12) Pour la démonstration de cette formule, *voir* Lichnerowicz, *Les théories relatives de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1954, p. 257 et Schrödinger [26].

d'où l'on peut déduire une relation analogue en l et m,

$$\frac{1}{m} m_{\alpha\rho} m_{\beta\sigma} l^{\rho\sigma} l^{\alpha\beta} = 2\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m}\right). \tag{32.2'}$$

Multiplions maintenant (31.1) par (31.3) en croisant

$$4\frac{g}{l} + \frac{g}{m} m_{\alpha\rho} m_{\beta\sigma} l^{\rho\sigma} l^{\alpha\beta} = 4\frac{h}{g} + \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta}$$

et, d'après (32.2) et (32.2'), il vient

$$(g^2 - lh)\, m = (g^2 - mk)\, l. \tag{32.3}$$

Reprenons alors (31.6),

$$m^{\beta\alpha} h_{\alpha\sigma} = l^{\beta\alpha} k_{\alpha\sigma},$$

chacun des deux nombres peut être considéré comme l'élément d'une matrice produit de deux matrices; en passant aux déterminants

$$\det(m^{\alpha\beta}) \det(h_{\alpha\beta}) = \det(l^{\alpha\beta}) \det(k_{\alpha\beta}).$$

Cette relation montre que, dans nos hypothèses, les cas particuliers

$$\det(k_{\alpha\beta}) = 0, \qquad \det(m^{\alpha\beta}) = 0$$

ne peuvent se produire que simultanément; nous considérerons donc désormais que lorsque k est nul, $\frac{1}{m}$ est nul aussi, et nous avons *dans tous les cas* $\frac{h}{m} = \frac{k}{l}$, soit

$$lh = mk,$$

ce qui donne, pour (32.3),

$$(g^2 - lh)(m - l) = 0,$$

l étant négatif par hypothèse, et m positif puisque symétrique gauche d'ordre pair, m est certainement différent de l. Donc

$$g^2 = lh = mk. \tag{32.4}$$

2° *Le cas* $k = 0$. — Rappelons des formules classiques concernant un déterminant symétrique gauche d'ordre pair

$$\varepsilon\sqrt{k} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\sigma\mu\rho\sigma} k_{\mu\nu} k_{\rho\sigma}, \qquad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1,$$

si $k \neq 0$, $k^{\mu\nu}$ a un sens et

$$k^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{k}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{\rho\sigma}, \qquad k_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon\sqrt{k}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^{\rho\sigma}, \tag{32.5}$$

si $k = 0$, nous conviendrons d'attribuer à l'expression $\sqrt{k}\, k^{\mu\nu}$ la valeur qu'elle a dans le cas général, soit $\frac{\varepsilon}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{\rho\sigma}$. Avec cette convention, une formule

comme (31.1), établie dans le cas général, et qui conserve un sens dans le cas particulier puisqu'elle ne fait intervenir $k^{\mu\nu}$ que sous la forme $\sqrt{k}\,k^{\mu\nu}$, est toujours vraie. De même, les formules

$$\varepsilon'\sqrt{m}=\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}m_{\mu\nu}m_{\rho\sigma},\qquad \text{où}\quad \varepsilon'=\pm 1,$$

$$m^{\mu\nu}=\frac{\varepsilon'}{2\sqrt{m}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}m_{\rho\sigma},\qquad m_{\mu\nu}=\frac{\varepsilon'\sqrt{m}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}m^{\rho\sigma} \tag{32.6}$$

conduiront à attribuer un sens à l'expression $\frac{m_{\mu\nu}}{\sqrt{m}}$, dans tous les cas une formule comme (31.4′) doit être modifiée pour être toujours correcte : il suffit de multiplier les deux membres par la même quantité, le premier membre par $\sqrt{k}$, le second par $-\frac{g}{\sqrt{m}}$. Désormais, lorsque des raisonnements de ce genre permettront de rendre valables pour $k=0$ des résultats obtenus dans le cas général, nous ne mentionnerons pas le cas particulier. Pour terminer, remarquons que ε et ε' ne sont pas indépendants, Multipliant (31.2) par $k_{\alpha\beta}$, (31.4′) par $m_{\alpha\beta}$, et tenant compte de (32.2) et (32.2′), il vient

$$m^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta}=2\frac{g-h+k}{g},\qquad m_{\alpha\beta}k^{\alpha\beta}=2\frac{g-h+k}{k}. \tag{32.7}$$

D'autre part, d'après (32.6) et (32.5),

$$m^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta}=\left(\frac{\varepsilon'}{2\sqrt{m}}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}m_{\rho\sigma}\right)\left(\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}k^{\mu\nu}\right),$$

$$m^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta}=\varepsilon\varepsilon'\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}m_{\rho\sigma}k^{\rho\sigma}, \tag{32.8}$$

la comparaison avec (32.7) fournit

$$\sqrt{m}\sqrt{k}=\varepsilon\varepsilon' g,$$

on en conclut que ε et ε' sont de signes contraires.

II. — Les trois cônes caractéristiques.

La nature de l'enveloppe d'une hypersurface S d'équation $f(x^\alpha)=0$ telle que

$$\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial^\beta f=0,\qquad \text{avec}\quad \gamma^{\alpha\beta}=\frac{2h}{g}h^{\alpha\beta}-l^{\alpha\beta},$$

la position relative de cette enveloppe et des deux cônes associés aux tenseurs $h_{\alpha\beta}$ et $l_{\alpha\beta}$: voici les questions essentielles que nous avons à résoudre; nous ferons d'abord une étude approchée, dans les conditions qui paraissent les plus propices à l'interprétation physique; les renseignements qu'elle fournit permettent d'abréger l'étude complète qui suivra.

33. Étude approchée préliminaire. — Plaçons-nous dans une région de V_4 où le tenseur fondamental satisfasse aux conditions suivantes, que nous nommerons désormais, pour la commodité du langage, « *hypothèse* A » : $k_{\alpha\beta}$ est petit devant $h_{\alpha\beta}$, ce que nous noterons, ε étant l'infiniment petit principal,

$$k_{\alpha\beta} = o(\varepsilon),$$
$$h_{\alpha\beta} = o(1),$$

les formules (32.1), et (31.1) montrent que, dans ce cas,

$$g = h + o(\varepsilon^2),$$
$$l^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + o(\varepsilon^2),$$

donc

$$\gamma^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + o(\varepsilon^2).$$

Ceci prouve que, dans les limites que nous nous sommes fixées, la matrice $(\gamma^{\alpha\beta})$ est inversible, et que la forme quadratique $\gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ est non dégénérée de type hyperbolique normal; une variété caractéristique des équations du champ est donc tangente, en un point x de la région considérée, à l'un des trois cônes voisins de sommet x

$$C_l : \quad l_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = o,$$
$$C_h : \quad h_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = o,$$
$$C_\gamma : \quad \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = o.$$

Toujours dans l'hypothèse A, nous allons placer l'un par rapport à l'autre les cônes C_l et C_γ. Considérons, en un point x, les variétés caractéristiques solutions de (30.2); le vecteur φ, de composantes

$$\varphi^\alpha = l^{\alpha\beta}\,\partial_\beta f$$

définit la direction conjuguée, par rapport à C_l du plan tangent en x à une telle variété; le lieu de φ est un cône de sommet x d'équation

$$\varphi(\varphi) \equiv \left(\frac{2h}{g}h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}\right) l_{\lambda\alpha}\varphi^\lambda l_{\mu\beta}\varphi^\mu.$$

Dans cette équation, exprimons $h^{\alpha\beta}$ en fonction de $l^{\lambda\mu}$ et $m^{\lambda\mu}$ suivant la formule (31.3'),

$$\varphi(\varphi) = \left[\left(\frac{2h}{g} - 1\right) l^{\alpha\beta} + \frac{2h}{g}\, m^{\alpha\rho} m^{\beta\sigma} l_{\rho\sigma}\right] l_{\lambda\alpha} l_{\mu\beta}\varphi^\lambda\varphi^\mu = o,$$

soit

$$\varphi(\varphi) \equiv \left[\left(\frac{2h}{g} - 1\right) l_{\lambda\mu} + \frac{2h}{g} f^\rho_\lambda f^\sigma_\mu l_{\rho\sigma}\right]\varphi^\lambda\varphi^\mu = o, \tag{33.1}$$

où nous avons posé $f^\rho_\lambda = m^{\alpha\rho} l_{\alpha\lambda}$. Appelons C'_γ ce cône lieu de φ, qui est le conjugué de C_γ par rapport à C_l. Soit maintenant ϖ un vecteur de C_l

$$l_{\lambda\mu}\varpi^\lambda\varpi^\mu = o, \tag{33.2}$$

les $u^\rho = f^\rho_\lambda w^\lambda$ sont les composantes d'un vecteur u conjugué de w par rapport à C_l; en effet, par suite de l'antisymétrie de $m^{\alpha\beta}$,

$$l_{\rho\sigma} w^\sigma u^\rho = l_{\rho\sigma} w^\sigma f^\rho_\lambda w^\lambda = m^{\alpha\rho} l_{\alpha\lambda} l_{\rho\sigma} w^\sigma w^\lambda = 0,$$

mais u, conjugué d'une génératrice de C_l par rapport à C_l est dans le plan tangent à C_l le long de cette génératrice, c'est-à-dire extérieur à C_l; on en déduit

$$l_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma = l_{\rho\sigma} f^\rho_\lambda f^\sigma_\mu w^\lambda w^\mu \leq 0 ; \tag{33.3}$$

de (33.1), (33.2) et (33.3) on déduit

$$\varphi(w) \leq 0,$$

toute génératrice de C_l est extérieure à C'_γ, donc intérieure à C_γ; nous avons obtenu le résultat partiel suivant : C_l *est tout entier à l'intérieur de* C_γ *lorsque* $g_{\alpha\beta}$ *est peu différent de sa partie symétrique* $h_{\alpha\beta}$.

34. Inversion de la matrice $\gamma^{\alpha\beta}$. — Afin de poursuivre, il faut calculer $\gamma_{\alpha\beta}$, tenseur associé de

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{2h}{g} h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}. \tag{34.1}$$

Pour cela nous utiliserons la formule (31.7),

$$kk^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} + hh^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = \delta^\mu_\beta (g - h - k) \tag{31.7}$$

dans laquelle nous exprimerons les deux premiers termes du premier membre en fonction linéaire de $\gamma^{\alpha\mu}$. D'après (34.1) et (31.1),

$$\gamma^{\alpha\mu} = \frac{h}{g} h^{\alpha\mu} - \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma}, \tag{34.2}$$

on en tire une expression de $kk^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma}$ qui donne

$$kk^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} = (hh^{\alpha\mu} - g\gamma^{\alpha\mu}) h_{\alpha\beta} = h\delta^\mu_\beta - g\gamma^{\alpha\mu} h_{\alpha\beta}.$$

Dans le second terme du premier membre de (31.7), remplaçons $hh^{\alpha\mu}$ par sa valeur tirée de (34.2),

$$hh^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = (g\gamma^{\alpha\mu} + kk^{\alpha\gamma} k^{\mu\delta} h_{\gamma\delta}) h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = g\gamma^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} + k\delta^\mu_\beta ;$$

(31.7) s'écrit alors

$$g\gamma^{\alpha\mu} (h_{\alpha\beta} - k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\rho\sigma}) = \delta^\mu_\beta (2h + 2k - g)$$

à la condition que $2h + 2k - g$ soit non nul, ceci exprime que

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g}{2h + 2k - g} (h_{\alpha\beta} - h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma}),$$

la formule (31.1′) permet de donner une autre forme à cette expression

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g}{2h + 2k - g}(2h_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta}). \tag{34.3}$$

Nous poserons désormais, pour $2h + 2k - g \neq 0$,

$$\frac{g}{2h + 2k - g} = \frac{1}{F^2},$$

cette notation se justifiera par la suite. Le calcul de $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$ n'est pas difficile; on trouve

$$\gamma = \frac{g^2}{h F^4}.$$

Remarquons que le cas exceptionnel

$$g = 2h, \qquad k = 0$$

de la résolution des équations de liaison est aussi un cas où l'inversion de $\gamma^{\alpha\beta}$ est impossible.

35. Vecteurs propres de C_l par rapport à C_γ. — Nous supposerons $F^2 \neq 0$ et nous cherchons les directions conjuguées communes aux deux cônes. D'après (34.3), il vient

$$F^2 l^{\alpha\lambda}\gamma_{\alpha\rho} = l^{\alpha\lambda}(2h_{\alpha\rho} - l_{\alpha\rho})$$

ou encore, en remplaçant $l^{\alpha\lambda}h_{\alpha\rho}$ par sa valeur tirée de (31.5),

$$F^2 l^{\alpha\lambda}\gamma_{\alpha\rho} = \delta^\lambda_\rho - 2m^{\alpha\lambda}k_{\alpha\rho}. \tag{35.1}$$

Désignons l'opérateur linéaire $m^{\alpha\lambda}k_{\alpha\rho}$ par le symbole $\mathcal{F}^\lambda_\rho$. La formule (35.1) montre que tout vecteur propre de $\mathcal{F}$ est un vecteur propre de C_l par rapport à C_γ et inversement. En effet, les égalités

$$\mathcal{F}^\lambda_\rho \rho^\rho = s\rho^\lambda$$

jointes à (35.1), dont on multiplie les deux membres par ρ^ρ, entraînent

$$\gamma_{\alpha\rho}\rho^\rho = S l_{\alpha\rho}\rho^\rho, \qquad \text{avec} \quad S = \frac{1 - 2s}{F^2}$$

et réciproquement puisque $l \neq 0$. Nous avons donc remplacé le problème par celui de la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{F}$. Ces valeurs propres s sont les racines de l'équation

$$\Phi(s) = \det[k_{\rho\nu}m^{\lambda\nu} - s\delta^\lambda_\rho] = 0,$$

multiplions les deux membres par $m = \det(m_{i\alpha})$

$$m\Phi(s) = \det[k_{\rho\alpha} - s m_{\rho\alpha}] = 0,$$

le déterminant écrit au premier membre de l'équation est symétrique gauche d'ordre 4, donc égal à un carré parfait, Nous allons appliquer les formules du paragraphe (32.2); les valeurs propres distinctes de $\mathcal{F}$ sont les solutions de

$$\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{8}(k_{\mu\nu}-sm_{\mu\nu})(k_{\rho\sigma}-sm_{\rho\sigma})=0$$

et, en effectuant le produit,

$$\varepsilon\sqrt{k}+s^2\varepsilon'\sqrt{m}-\frac{s}{4}(\varepsilon'\sqrt{m}\,m^{\rho\sigma}k_{\rho\sigma}+\varepsilon\sqrt{k}\,k^{\rho\sigma}m_{\rho\sigma})=0.$$

Dans la parenthèse, les deux termes sont égaux d'après (32.8), et (32.7) nous donne leur valeur commune

$$\varepsilon\sqrt{k}+s^2\varepsilon'\sqrt{m}-\frac{s\varepsilon}{\sqrt{k}}(g-h+k)=0,$$

enfin nous savons que $\varepsilon\varepsilon' g=\sqrt{m}\sqrt{k}$. D'où l'équation aux valeurs propres

$$\chi(s)=s^2g-s(g-h+k)+k=0,$$

son discriminant est $(g-h-k)^2-4hk$, somme de deux termes positifs, donc nécessairement positif ou nul. Le cas de la racine double (nulle) exige qu'on ait simultanément

$$g=h, \qquad k=0;$$

lorsqu'il a deux racines distinctes, l'une est négative, soit s_0, l'autre est positive, soit s_1 [toutes deux $o(\varepsilon)$ dans l'hypothèse A]. Nous avons obtenu le résultat suivant : l'équation $\Phi(s)=0$ a en général deux racines doubles, l'opérateur $\mathcal{F}$ a deux 2- plans de vecteurs propres, sauf cas exceptionnel où il n'a qu'un 3-plan de vecteurs propres, les cônes C_l et C_ν sont bitangents ou exceptionnellement ont un contact d'ordre 4.

36. — Nature de C_ν et position relative des deux cônes C_l et C_ν. — L'étude précédente nous oblige à distinguer deux cas, suivant la classe algébrique de $g_{\alpha\beta}$ ([13]).

1° *Cas général.* — L'équation $\chi(s)=0$ a deux racines distinctes; l'un des 2-plans de vecteurs propres coupe C_l et C_ν; dans ce 2-plan prenons un vecteur e_0 intérieur à C_l, le vecteur e_1 aura la direction conjuguée dans le même 2-plan propre, et l'on complète par deux vecteurs conjugués e_2 et e_3 appartenant à l'autre 2-plan propre; normons ces quatre vecteurs de manière que dans le repère qu'ils constituent l'équation de C_l soit

$$C_l: \quad (x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2=0,$$

([13]) Hlavatý [19].

étudions le signe des valeurs propres S_0 et S_1 correspondant à s_0 et s_1 par

$$S = \frac{1 - 2s}{F^2}.$$

Comme $\chi\left(\frac{1}{2}\right) = 2h + 2k - g$, $g\chi\left(\frac{1}{2}\right)$ est du signe de F^2,

a. $F^2 > 0$. — Nous avons la disposition suivante :

$$s_0 < 0 < s_1 < \frac{1}{2},$$

d'où

$$0 < S_1 < S_0;$$

nous ignorons à laquelle des valeurs propres appartient le vecteur e_0 ; cependant, comme elles sont toutes deux positives, nous sommes sûrs que C_γ, comme C_l, est un cône convexe, et comme elles sont toujours rangées dans le même ordre tant que $F^2 > 0$, nous sommes sûrs aussi que l'un des cônes est constamment intérieur à l'autre dans les mêmes conditions; or nous avons vu que sous l'hypothèse A c'est C_l qui est intérieur à C_γ alors que $F^2 = 1 + 0(\varepsilon^2) > 0$; il en est donc toujours ainsi, et l'équation de C_γ est

$$C_\gamma : \quad S_0[(x_0)^2 - (x^1)^2] - S_1[(x^2)^2 + (x^3)^2] = 0.$$

b. $F^2 = 0$. — Dans le repère du paragraphe *a* et tant que F^2 n'est pas nul,

$$\gamma^{00} = \gamma^{11} = \frac{1}{S_0}, \qquad \gamma^{22} = \gamma^{33} = \frac{1}{S_1},$$

si $F^2 \to 0$ par valeurs positives, s_1 tend vers $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{S_1}$ a une vraie valeur tandis que $\frac{1}{S_0}$ tend vers 0 avec F^2 ; à la limite

$$\gamma^{00} = \gamma^{11} = 0.$$

Une hypersurface satisfaisant à (30.2) est donc telle que

$$(\partial_2 f)^2 + (\partial_3 f)^2 = 0$$

les plans tangents aux variétés caractéristiques $\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$ tournent autour du 2-plan $x^0 = x^1 = 0$: C_γ est dégénéré tangentiellement en un 2-plan extérieur à C_l.

c. $F^2 < 0$. — La disposition des *s* est

$$s_0 < \frac{1}{2} < s_1,$$

donc

$$S_0 < 0 < S^1,$$

que S_0 soit la valeur propre correspondant au 2-plan qui coupe C_l ou à l'autre,

le résultat est le même ; C_γ est bien un cône convexe, mais contenant e_1 à son intérieur : les deux cônes sont extérieurs l'un à l'autre.

2° $g = h$ et $k = 0$. — Dans ce cas $F^2 = 1$ et C_γ existe toujours. Cherchons une forme réduite pour le tenseur $g_{\alpha\beta}$; la 2-forme de composantes $k_{\alpha\beta}$ est de rang 2; prenons pour vecteur e_3 un vecteur propre de $k_{\alpha\beta}$ correspondant à une valeur propre nulle : alors $k_{03} = k_{13} = k_{23} = 0$; complétons par trois vecteurs orthogonaux à e_3 et orthogonaux entre eux au sens de $h_{\alpha\beta}$; dans un tel repère,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{00} & k_{01} & k_{02} & 0 \\ -k_{01} & h_{11} & k_{12} & 0 \\ -k_{02} & -k_{12} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix},$$

ces composantes de $g_{\alpha\beta}$ doivent satisfaire à la condition qui exprime, d'après (32.1), que $g = h$ et $k = 0$

$$k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} = 0,$$

soit

(36.1) $$(k_{01})^2 h^{00} h^{11} + (k_{02})^2 h^{00} h^{22} + (k_{12})^2 h^{11} h^{22} = 0.$$

Dans le 3-plan orthogonal à e_3, puisque dét $(k_{uv}) = 0$ ($u, v = 0, 1, 2$), il existe un vecteur w non nul tel que

(36.2) $$k_{uv} w^v = 0.$$

Dans ce 3-plan, nous choisirons e_2 perpendiculaire à w de sorte que $w^2 = 0$ et que, d'après (36.2),

$$k_{01} = 0;$$

la condition (36.1) devient

(36.3) $$(k_{02})^2 h^{00} + (k_{12})^2 h_{11} = 0$$

compatible avec la signature hyperbolique normale de $h_{\alpha\beta}$ ($h^{00} > 0$, $h^{11} < 0$). Normons maintenant les quatre vecteurs du repère et posons, d'après (36.3),

$$(k_{02})^2 = (k_{12})^2 = \gamma^2.$$

Alors

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon\gamma & 0 \\ 0 & -1 & \gamma & 0 \\ -\varepsilon\gamma & -\gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

à l'aide des formules

$$\gamma_{\alpha\beta} = 2 h_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta}, \qquad l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\rho\sigma},$$

écrivons les équations de C_l et C_γ

$$C_l : \quad (1 - \gamma^2)(x^0)^2 - (1 + \gamma^2)(x^1)^2 - 2\varepsilon\gamma^2 x^0 x^1 \quad (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,$$
$$C_\gamma : \quad (1 + \gamma^2)(x^0)^2 - (1 - \gamma^2)(x^1)^2 + 2\varepsilon\gamma^2 x^0 x^1 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,$$

le changement de repère $x^1 = x^1 - \varepsilon x^0$ permet l'étude au voisinage de la génératrice commune

$$C_l : \quad -(1+\gamma^2)(X^1)^2 + 2\varepsilon x^0 X^1 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,$$
$$C_\gamma : \quad (\gamma^2 - 1)(X^1)^2 + 2\varepsilon x^0 X^1 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,$$

la signature de $\gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ est toujours hyperbolique normale. C_γ est toujours un cône convexe et contient C_l à son intérieur.

37. Resultats et remarques. — Il nous reste à préciser la position de C_h par rapport aux deux autres cônes, ce qui sera très simple avec les renseignements dont nous disposons; de (31.5),

$$i^{\alpha\beta} h_{\alpha\sigma} = \delta^\beta_\sigma - k_{\alpha\sigma} m^{\alpha\beta},$$

il résulte

$$h_{\alpha\beta} v^\beta = S' l_{\alpha\beta} v^\beta, \quad \text{avec} \quad S' = 1 - s,$$

où v est vecteur propre de l'opérateur $\mathcal{F}$ et s racine de

$$\chi(s) \equiv s^2 g - s(g - h + k) + k = 0,$$

$g\chi(1) = gh > 0$, ce qui entraîne $S'_0 > S'_1 > 0$: C_h contient toujours C_l. D'autre part, C_γ fait partie du faisceau linéaire (ponctuel ou tangentiel) défini par C_l et C_γ

$$(37.1) \qquad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{F^2}(2h_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta}) \qquad \text{pour} \quad F^2 \neq 0, \qquad \frac{1}{F^2} = \frac{g}{2h + 2k - g};$$

prenons un vecteur l sur C_h

$$h_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta = 0, \qquad l_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta \leq 0,$$

$F^2 > 0$ entraîne d'après (37.1),

$$\gamma_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta \geq 0$$

et C_γ contient C_h aussi bien dans le cas général que dans le cas singulier tandis que pour $F^2 < 0$ les deux cônes emboîtés C_h et C_l sont dans la région extérieure à C_γ.

En résumé, dans la région de V_4 où $2h + 2k - g < 0$, les trois cônes convexes C_γ, C_h et C_l sont emboîtés, bitangents ou surosculateurs, C_γ à l'extérieur et C_l à l'intérieur. Si $2h + 2k - g = 0$, C_γ est dégénéré tangentiellement en un 2-plan extérieur aux cônes bitangents C_l et C_h. Aux points où $2h + 2k - g > 0$, C_γ est un cône convexe bitangent extérieurement à C_h, lequel contient toujours C_l à son intérieur.

La condition $2h + 2k - g < 0$ est une limitation du module des composantes $k_{\alpha\beta}$ par rapport aux $h_{\alpha\beta}$. Admettons cette limitation et revenons aux trois équations aux dérivées partielles (30.1), (30.2), (30.3); leurs caractéristiques, ou bicaractéristiques des équations du champ unitaire, sont les géodésiques de longueur nulle des trois ds^2 de type hyperbolique normal correspondants; en

un point x le conoïde caractéristique a trois nappes distinctes : celle qui est engendrée par les géodésiques de longueur nulle de

$$ds_1^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

enveloppe les deux autres. Prenons le point x dans le voisinage d'une hypersurface S portant des données de Cauchy : des formules de Kirchoff, généralisées par M^me^ Fourès en relativité générale, font prévoir que les valeurs des fonctions inconnues au point x dépendent des données de Cauchy de la région de S intérieure au conoïde caractéristique de sommet x, par conséquent intérieure au conoïde engendré par les caractéristiques de

$$\gamma^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta = 0$$

$\gamma_{\alpha\beta}$ semble donc jouer un rôle prépondérant parmi les trois tenseurs symétriques $h_{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$. En termes de fronts d'onde et de rayons, une interprétation « relativiste » exige que le cône C_1, dont les génératrices définissent la plus grande vitesse, soit identifié au cône de lumière, tandis que les variétés caractéristiques solutions de (30.1) et (30.3) seraient des fronts d'onde orientés dans le temps. Il faut cependant noter que $\gamma_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ sont apparus de manière assez mystérieuse alors que le tenseur $l_{\alpha\beta}$ intervient constamment et pas seulement à propos du problème de Cauchy; on ignore d'ailleurs complètement au terme de cette étude, la part qui revient à chacune des trois conditions $g^{00} = 0$, $\gamma^{00} = 0$, $h^{00} = 0$ dans les discontinuités des fonctions inconnues à la traversée de l'hypersurface d'équation $x^0 = 0$.

TROISIÈME PARTIE.

INTERPRÉTATION PHYSIQUE.

CHAPITRE VII.

Surfaces d'ondes gravitationnelles et électromagnétiques.

38. Le schéma fluide-champ électromagnétique en relativité générale. — En relativité générale, on représente un milieu continu par un domaine d'une variété riemannienne de tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$; dans les théories qui nous intéressent ici, les sources d'énergie de ce milieu sont décrites par un champ

de tenseurs $T_{\alpha\beta}$, et le tenseur métrique est lié au tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ par les équations d'Einstein dites « du cas intérieur »

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}. \tag{38.1}$$

Si la forme quadratique $T(x) = T_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$ est définie positive, $T_{\alpha\beta}$ admet relativement à $a_{\alpha\beta}$ un vecteur propre réel orienté dans le temps. Ce vecteur propre définit en chaque point du fluide le vecteur vitesse unitaire u. On appelle repère propre un repère orthonormé $V^{(\alpha)}$ constitué de vecteurs propres de $T_{\alpha\beta}$, où $V^{(0)} = u$. En fonction de ces vecteurs, $T_{\alpha\beta}$ a l'expression suivante :

$$T_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta}, \quad \text{avec} \quad \pi_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} \pi_{ik} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(k)}, \tag{38.2}$$

ρ est la densité propre du fluide, $\pi_{\alpha\beta}$ est le tenseur des pressions partielles, dont les composantes, négligeables devant ρ, sont homogènes à $\frac{1}{c^2}$ (c, vitesse de la lumière), ce que nous indiquerons en posant $\pi_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{c^2}$. En chaque point de la variété, le repère propre définit un temps et un espace associés qu'on peut identifier à l'espace temps de Minkowski à l'aide de la métrique euclidienne osculatrice, ce qui permettra le passage des grandeurs physiques aux tenseurs sur la variété.

Supposons maintenant que le domaine étudié contienne, en plus d'une énergie provenant de la matière et des pressions, une distribution électromagnétique; les phénomènes électromatiques seront représentés par deux tenseurs antisymétriques $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ définis de la manière suivante par l'intermédiaire du repère propre (les composantes dans ce repère sont notées par des indices accentués) :

$$(H_{\lambda'\mu'}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & E_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (K_{\lambda'\mu'}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix},$$

nous introduirons également le vecteur courant

$$(J_{\lambda'}) = (\delta, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3).$$

où les lettres désignent respectivement :

E_i, le champ électrique;
B_i, l'induction magnétique;
δ, la densité de charge;
H_i, le champ magnétique;
D_i, l'induction électrique;
Γ, le courant de conduction.

Toutes ces grandeurs sont déduites des grandeurs microscopiques de la théorie des électrons de Lorentz par la formation de moyennes; elles sont liées par les relations

(38.3) $$D = \lambda E, \qquad B = \mu H, \qquad \Gamma = \sigma E,$$

λ, μ, σ sont des scalaires désignant respectivement le pouvoir diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu. $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ seront dits, le premier : tenseur champ électrique-induction magnétique, le second : tenseur induction électrique-champ magnétique (par abus de langage, champ et induction). Dans le repère propre, les équations de Maxwell se traduisent par les deux groupes d'équations tensorielles

$$\overset{a'}{\nabla}_{\lambda'} K^{\lambda'\mu'} = J^{\mu'},$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda'\mu'\nu'\rho'} \overset{a'}{\nabla}_{\lambda'} H_{\mu'\nu'} = 0.$$

Donc en repère quelconque, $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ satisfont aux deux groupes d'équations invariantes :

$$\overset{a}{\nabla}_{\alpha} K^{\alpha\beta} = J^{\beta},$$
$$\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{a}{\nabla}_{\alpha} H_{\beta\gamma} = 0,$$

$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est l'élément de volume de la variété. Toujours par la considération du repère propre, on est amené aux identifications suivantes :

(a) $$J_{\alpha} = \delta u_{\alpha} + \Gamma_{\alpha}, \qquad \text{où} \quad \Gamma_{\alpha} = \sigma E_{\alpha},$$

le vecteur courant est somme d'un courant de convection δu et du courant de conduction Γ qui lui est orthogonal,

(b) $$\begin{cases} H_{\alpha\beta} u^{\alpha} = E_{\beta}, & \overset{*}{H}_{\alpha\beta} u^{\alpha} = B_{\beta}; \\ K_{\alpha\beta} u^{\alpha} = D_{\beta}, & \overset{*}{K}_{\alpha\beta} u^{\alpha} = H_{\beta}; \end{cases}$$

$\overset{*}{H}^{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{K}^{\alpha\beta}$, sont les tenseurs adjoints aux tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ par l'intermédiaire du tenseur métrique. Cette identification permet de traduire les équations (38.3) en langage tensoriel

$$K_{\alpha\beta} u^{\alpha} = \lambda H_{\alpha\beta} u^{\alpha},$$
$$\mu \overset{*}{K}_{\alpha\beta} u^{\alpha} = \overset{*}{H}_{\alpha\beta} u^{\alpha}$$

à l'aide de ces formules, on peut exprimer $K_{\alpha\beta}$ en fonction de $H_{\alpha\beta}$. On trouve

(38.4) $$K_{\rho\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\rho\beta} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (H_{\sigma\rho} u^{\sigma} u_{\beta} - H_{\sigma\beta} u^{\sigma} u^{\rho}).$$

Dans ces conditions, le tensenr impulsion-énergie responsable de la description

des phénomènes électromagnétiques sera celui de la relativité restreinte,

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{1}{4} a_{\alpha\beta} H_{\lambda\mu} K^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}(K_{\lambda\alpha} H^{\lambda}\beta + K_{\lambda\beta} H^{\lambda}\alpha)\right] \tag{38.5}$$

Dans une théorie « naïve » de l'électromagnétisme, on se contente d'ajouter $\tau_{\alpha\beta}$ à $T_{\alpha\beta}$ [éq. (38.2)] pour former le second membre des équations d'Einstein dans le cas « fluide-champ électromagnétique », soit

$$S_{\alpha\beta} = \chi(T_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}), \tag{38.6}$$

ce qui ne peut évidemment constituer qu'une première approximation. L'étude de la structure du système des équations de champ pour un schéma fluide-champ électromagnétique a été faite par Pham Mau Quan [15]; elle conduit à des résultats fort intéressants que nous allons brièvement exposer. Prenons les équations de champ (38.6) et les équations de Maxwell sous la forme

$$D_\beta \equiv a^{\alpha\rho} \overset{a}{\nabla}_\alpha K_{\rho\beta} = J_\beta, \tag{38.7}$$

$$E^\delta \equiv \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\beta\gamma} = 0, \tag{38.8}$$

avec

$$J_\beta = \delta u_\beta + \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta}, \qquad a_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1.$$

$K_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$ sont liés par les formules (38.4). Sans faire une étude complète du problème de Cauchy pour ces équations, nous allons montrer comment la considération des deux tenseurs champ et induction non proportionnels $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ conduit à des variétés caractéristiques pour les équations de Maxwell distinctes des surfaces d'ondes gravitationnelles, lesquelles ont pour équation $f(x^\alpha) = 0$, où f est solution de

$$a^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0.$$

Nous nous donnons sur une hypersurface $S(x^0 = 0)$ $a_{\alpha\beta}$, $\partial_0 a_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$; c'est dire que ces quantités sont continues à la traversée de l'hyper-surface (rappelons que $a_{\alpha\beta}$ est de classe C^1, C^3 par morceaux, et $H_{\alpha\beta}$ de classe C^0, C^2 par morceaux). On montre qu'on peut calculer u^α, puis δ, en fonction de ces données : le vecteur courant J_β est donc continu à la traversée de S, et c'est là un point important pour la suite. Alors le calcul des $\partial_0 u^\alpha$ fait intervenir des hypersurfaces exceptionnelles généralisant les fronts d'onde de l'hydrodynamique classique que nous laisserons de côté ici. Dans cette situation, nous allons commencer le calcul des dérivées obliques $\partial_0 H_{\alpha\beta}$. La lettre Φ désignera dans la suite de ce chapitre une fonction de grandeurs continues à la traversée de S. En remplaçant dans (38.7) $K_{\rho\beta}$ par sa valeur (38.4), il vient

$$D_\beta \equiv \frac{1}{\mu}[a^{\alpha\rho} - (1 - \lambda\mu) u^\alpha u^\rho] \overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\rho\beta} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} a^{\alpha\rho} u^\sigma u_\beta \overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\sigma\rho} + \Phi_\beta = 0 \tag{38.9}$$

(λ. μ et σ sont supposés constants en première approximation). Posons

$$a^{\alpha\rho} = a^{\alpha\rho} - (1 - \lambda\mu)\, u^\alpha\, u^\rho.$$

Par multiplication contractée de (38.9) par u^β, on obtient

$$a^{\alpha\rho}\, u^\sigma \overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\rho\sigma} = \Phi$$

et en reportant dans (38.9),

$$D_\beta \equiv \frac{1}{\mu}\, \bar{a}^{\alpha\rho} \overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\rho\beta} + \Phi_\beta = 0.$$

Le calcul se termine facilement : on constate que seuls les $\partial_0 H_{0i}$ sont susceptibles de discontinuités à la traversée de S, et ceci dans le cas où $\bar{a}^{00} = 0$. Nous appellerons surfaces d'ondes électromagnétiques les variétés caractéristiques des équations de Maxwell; d'après ce qui précède, elles sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\bar{a}^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f \equiv [a^{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\, u^\alpha\, u^\beta]\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0.$$

Deux cônes caractéristiques sont ainsi définis en chaque point de la variété; si $1 - \lambda\mu \leqq 0$, le cône

$$\bar{a}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0$$

est intérieur au cône

$$a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0.$$

Les équations de Maxwell peuvent s'exprimer directement dans la métrique $\bar{a}_{\alpha\beta}$ et les rayons électromagnétiques sont les géodésiques de longueur nulle de cette nouvelle métrique; on peut en déduire un théorème qui est la généralisation relativiste du principe de Fermat [15]. Notons enfin la forme simple que prennent les équations qui lient $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ grâce à l'introduction de $\bar{a}^{\alpha\beta}$. On vérifie que, d'après (38.4),

$$K^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\rho\sigma} [a^{\rho\alpha} - (1 - \lambda\mu)\, u^\rho u^\alpha] [a^{\sigma\beta} - (1 - \lambda\mu)\, u^\sigma u^\beta],$$

c'est-à-dire

$$K^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu}\, \bar{a}^{\rho\alpha} \bar{a}^{\sigma\beta} H_{\rho\sigma}. \tag{38.10}$$

En théorie unitaire, nous disposons d'équations de champ que nous voudrions identifier au système (38.6), (38.7), (38.8) : les idées générales que nous venons de rappeler nous guideront pour poser les hypothèses, forcément arbitraires, permettant d'exhiber de manière satisfaisante un champ et une induction fonctions du tenseur fondamental.

39. Hypothèses d'identification de certaines fonctions de $g^{[\alpha\beta]}$ et $g_{[\alpha\beta]}$ à un champ et à une induction. — Le tenseur fondamental satisfait aux équations de

champ (25.1) et (25.2) que nous réécrivons, pour plus de commodité,

$$\partial_\rho g^{\rho\beta]} = 0, \tag{39.1}$$

$$P_{[\alpha\beta]} = 0, \tag{39.2}$$

$$P_{[\alpha\beta]} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha) \tag{39.3}$$

et aux identités (24,5) que nous écrirons en coordonnées isothermes

$$2H^\rho_\lambda g_{\rho\mu} + 2H^\rho_\mu g_{\lambda\rho} - 2P_{\lambda\mu} \equiv -l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - 2\Omega^\beta_\lambda(m) g_{\beta\mu} + 2\Lambda'_{\lambda\mu},$$

en conséquence de (39,2) et, d'après la définition (11.3) de H^ρ_λ, ces identités deviennent

$$2P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} + 2P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} g_{\lambda\rho} - 2P_{[\lambda\mu]} = -l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - 2\Omega^\beta_\lambda(m) g_{\beta\mu} + 2\Lambda'_{\lambda\mu}. \tag{39.4}$$

Nous montrerons au chapitre VIII (§ 43) qu'on peut substituer (39.4) à (39,2), tout au moins dans les hypothèses A. Nous allons aussi remplacer (39.3) par ce qu'on obtient en dérivant (39.4) par rapport à x^ν et en permutant circulairement; cette opération fait disparaître $P_{[\lambda\mu]}$, car (39.3) entraîne

$$\partial_\gamma P_{[\alpha\beta]} + \partial_\alpha P_{[\beta\gamma]} + \partial_\beta P_{[\gamma\alpha]} = 0. \tag{39.5}$$

Il vient donc

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}\big[\partial_\nu(l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}k_{\lambda\mu}) + \partial_\nu\big[\Omega^\beta_\lambda(m) g_{\beta\mu} - \Omega^\beta_\mu(m) g_{\beta\lambda}\big] + 2\partial_\nu(P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} k_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} k_{\lambda\rho})\big] = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}\partial_\nu \Lambda'_{\lambda\mu}. \tag{39.6}$$

Nous partirons du système (39.1), (39.4), (39.6), équivalent dans les hypothèses A à (39.1), (39.2), (39.5), et plus faible que le système initial puisqu'il n'entraîne que l'existence locale d'un potentiel vecteur pour $P_{[\alpha\beta]}$, et nous ferons les hypothèses suivantes :

1° La fonction $H_{\alpha\beta}$ des potentiels est telle que (39.1) s'identifie aux équations de Maxwell

$$E^\delta \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\alpha H_{\beta\gamma} = 0;$$

2° Les fonctions $K^{\alpha\beta}$ et J^β des potentiels sont tels que la forme généralisée

$$D^\delta \equiv D_\nu K^{\nu\delta} = J^\delta$$

du deuxième groupe d'équations de Maxwell s'identifie à (39.6);
l'ordre des dérivations partielles dans J^δ *étant inférieur à l'ordre des dérivations partielles dans* $D_\nu K^{\nu\delta}$. Ceci revient à dire que $\partial_\nu K^{\nu\delta}$ s'identifie au premier membre de (39.6) à un facteur scalaire près et modulo des fonctions additives des dérivées jusqu'à l'ordre 2 inclus : de cette manière, si les potentiels et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 compris sont supposés continus à la traversée

d'une hypersurface S, le vecteur courant J sera automatiquement continu à la traversée de cette hypersurface, *quelle qu'elle soit* alors qu'une fonction du champ par l'intermédiaire de dérivées troisièmes pourra subir une discontinuité à la traversée de certaines hypersurfaces exceptionnelles, de l'une des trois familles que nous avons dit.

40. La forme pseudo-volume. Un laplacien généralisé. — L'hypothèse 1 entraîne immédiatement, d'après le paragraphe 10,

$$\mathrm{H}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g}\,m^{\gamma\delta}; \tag{40.1}$$

la forme H, de composantes $\mathrm{H}_{\alpha\beta}$, se déduit du tenseur antisymétrique contravariant $g^{\alpha\beta}$ par l'intermédiaire d'un opérateur adjoint généralisé, le pseudo-volume étant la forme η de composantes

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g}$$

qui est à dérivée covariante nulle dans la connexion L aussi bien que dans la connexion $\bar{\mathrm{L}}$ puisque

$$\mathrm{L}^{\sigma}_{\sigma\rho} = \mathrm{L}^{\sigma}_{\rho\sigma} = \frac{\partial_\rho\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}.$$

Posons

$$\mathrm{K}^{\nu\delta} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}}\mathrm{N}_{\lambda\mu}, \tag{40.2}$$

où $\mathrm{N}_{\lambda\mu}$ doit être un tenseur. Comme $\dfrac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}}$ est aussi à dérivée covariante nulle,

$$\mathrm{D}_\nu\mathrm{K}^{\nu\delta} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}}\mathrm{D}_\nu\mathrm{N}_{\lambda\mu},$$

divisons les deux membres de (39.6) par $\sqrt{-g}$; l'hypothèse 2° nous fait écrire

$$\mathrm{N}_{\lambda\mu} = l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}k_{\lambda\mu} + \Omega^{\beta}_{\lambda}(m)\,g_{\beta\mu} - \Omega^{\beta}_{\mu}(m)\,g_{\beta\lambda} + 2(\mathrm{P}_{[\lambda\sigma]}m^{\rho\sigma}k_{\rho\mu} + \mathrm{P}_{\mu\sigma}m^{\rho\sigma}k_{\lambda\rho}) + \Phi_{\lambda\mu}, \tag{40.3}$$

où $\Phi_{\lambda\mu}$ est indéterminé et ne contient que des dérivées premières des potentiels. Il faudrait maintenant trouver une fonction *invariante* des potentiels, contenant comme dérivées secondes exactement celles qui figurent au deuxième membre de (40.3) (compte tenu de la condition d'isothermie); nous n'avons pas réussi à résoudre ce problème; nous sommes donc obligés de faire des hypothèses de champ faible et de raisonner en première approximation. Supposons donc que $h_{\alpha\beta}$ admettent des développements limités à partir des potentiels minkowskiens suivant les puissances de $\frac{1}{c}$ les $k_{\alpha\beta}$ étant toujours petits devant $h_{\alpha\beta}$; nous posons alors

$$\mathrm{N}'_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\rho}\mathrm{D}_\rho\mathrm{D}_\alpha k_{\lambda\mu} - g^{\rho\alpha}\bar{\mathrm{D}}_\rho\bar{\mathrm{D}}_\alpha k_{\mu\lambda}) = -\frac{\Delta}{\Gamma}k_{\lambda\mu}. \tag{40.4}$$

Dans les hypothèses de champ faible que nous venons de faire, $N'_{\lambda\mu}$ et $N_{\lambda\mu}$ ont même partie principale. Le laplacien généralisé $\underset{+-}{\Delta}$ défini par (40.3) conserve les caractères antisymétriques et antihermitiques (au sens du paragraphe 17); il commute avec le tenseur $\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$ et il est invariant. Il vient, d'après (40.2),

$$(40.5) \qquad K'^{\nu\delta} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}} N'_{\lambda\mu} = \underset{+-}{\Delta}\left[-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}} k_{\lambda\mu}\right];$$

$K'^{\nu\delta}$ est une induction qui satisfait en première approximation et dans des hypothèses de champ faible à la condition 2° que nous nous sommes imposée.

41. Les relations qui lient le champ et l'induction; le tenseur de Maxwell. — De (40.1), on tire

$$m^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} H_{\alpha\beta};$$

d'autre part, les formules (32.6) montrent que (40.1) est équivalente à

$$H_{\alpha\beta} = \varepsilon\sqrt{-\frac{k}{g}}\, m_{\alpha\beta},$$

nous pourrons donc exprimer $k_{\lambda\mu}$ en fonction de $H_{\alpha\beta}$, d'après (31.4),

$$k_{\lambda\mu} = \frac{k}{g} m_{\lambda\mu} + \frac{h}{g} l_{\lambda\rho} l_{\mu\sigma} m^{\rho\sigma},$$

remarquons que le terme $\frac{k}{g} m_{\lambda\mu}$ est petit devant $\frac{h}{g} l_{\lambda\rho} l_{\mu\sigma} m^{\rho\sigma}$ et que dans les conditions d'approximation où nous sommes, nous pourrions ne pas tenir compte; mais il est plus commode d'écrire des égalités que des équivalences, et il est intéressant de montrer que $R'^{\nu\delta}$ s'exprime facilement et rigoureusement en fonction de $H_{\alpha\beta}$. Il vient

$$(41.1) \qquad k_{\lambda\mu} = -\varepsilon\sqrt{-\frac{k}{g}} H_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\frac{h}{g} l_{\lambda\rho} l_{\mu\sigma} \frac{\varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}}{\sqrt{-g}} H_{\gamma\delta}.$$

Appliquons à $l_{\alpha\beta}$ une formule qui fait passer du mineur d'un déterminant au mineur complémentaire de l'adjoint

$$\varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta} l_{\lambda\rho} l_{\mu\sigma} = l\, \varepsilon_{\rho\sigma\lambda\mu} l^{\rho\gamma} l^{\sigma\delta}$$

et reportons l'expression (41.1) de $k_{\lambda\mu}$ dans (40.5). Il vient

$$(41.2) \qquad K'^{\alpha\beta} = \underset{+-}{\Delta}\, l^{\alpha\lambda} l^{\beta\mu} H_{\lambda\mu} + \underset{+-}{\Delta}\, \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\, \varepsilon\sqrt{-\frac{K}{g}} H_{\lambda\mu}$$

le terme principal $\underset{+-}{\Delta}\, l^{\alpha\lambda} l^{\beta\mu} H_{\lambda\mu}$ est fort satisfaisant : comparées à (39.7), ces relations nous confirment dans la conjecture que le cône C_l joue le rôle d'enve-

loppe des surfaces d'ondes électromagnétiques en un point en première approximation. De même, à partir de (40.1) et (40.5), le calcul du tenseur de Maxwell symétrisé

$$4\pi c^2 \tau_{\lambda\mu} = \frac{1}{4}\gamma_{\lambda\mu} H_{\alpha\beta} K'^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\gamma_{\lambda\rho} K'^{\sigma\rho} H_{\sigma\mu} + \gamma_{\mu\rho} K'^{\sigma\rho} H_{\sigma\lambda})$$

en fonction du tenseur fondamental, va se faire sans aucune difficulté et indépendamment du tenseur métrique $\gamma_{\lambda\mu}$ qui serait seulement choisi comme tel en raison des considérations du paragraphe 37,

$$H_{\alpha\beta} K'^{\alpha\beta} = -\, m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta},$$

$$K'^{\sigma\rho} H_{\sigma\mu} = -\, m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} \left[\frac{1}{4}\varepsilon_{\sigma\mu\alpha\beta}\varepsilon^{\sigma\rho\lambda\nu} k_{\lambda\nu}\right] = -\frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu} m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta} + m^{\rho\nu} \underset{+}{\Delta} k_{\mu\sigma},$$

$$\gamma_{\lambda\rho} K'^{\sigma\rho} H_{\sigma\mu} = -\frac{1}{2}\gamma_{\lambda\mu} m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta} + \gamma_{\lambda\rho} m^{\rho\sigma} \underset{+-}{\Delta} k_{\mu\sigma},$$

Nous obtenons

$$4\pi c^2 \tau_{\lambda\mu} = \frac{1}{4}\gamma_{\lambda\mu} m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\gamma_{\lambda\rho} m^{\rho\sigma} \underset{+-}{\Delta} k_{\mu\sigma} + \gamma_{\mu\rho} m^{\rho\sigma} \underset{+-}{\Delta} k_{\lambda\sigma}).$$

Nous verrons au chapitre VIII que ce tenseur figure en première approximation parmi les termes du tenseur d'impulsion-énergie qu'on extraira de (39.4).

CHAPITRE VIII.

Le tenseur d'impulsion-énergie.

Le principal intérêt des calculs que nous allons faire ici réside dans la formation naturelle d'équations de champs équivalentes à (9.7) grâce à la formule fondamentale (24.5); sans aucune hypothèse d'approximation nous allons mettre en évidence le tenseur électrodynamique trouvé par M. A. Tonnelat en 1955 [28]. Dans des hypothèses de champ faible, nous montrerons qu'il y a accord avec l'interprétation proposée au chapitre VII; toujours dans ces hypothèses de champ faible, nous exhiberons un tenseur d'impulsion-énergie qui, outre le tenseur électrodynamique, comprend des tenseurs indépendants de la métrique choisie. Nous ferons les calculs en coordonnées isothermes dont nous admettons la compatibilité avec les hypothèses de champ faible (la démonstration repose sur le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy à partir d'une hypersurface non exceptionnelle).

42. Une autre forme de l'identité fondamentale. — Dans (24.5) introduisons le tenseur mixte

$$K^{\lambda}_{\rho} = \Pi^{\lambda}_{\rho} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\rho}\Pi^{\tau}_{\tau},$$

où H_λ^ρ est défini par (11.3). Pour cela, il suffira de retrancher aux deux membres de (24.5) la quantité $g_{\lambda\mu}H_\tau^\tau \equiv g_{\lambda\mu}P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, ce qui fournira pour le premier membre

$$(2H_\lambda^\rho - \delta_\lambda^\rho H_\tau^\tau)g_{\rho\mu} + (2H_\mu^\rho - \delta_\mu^\rho H_\tau^\tau)g_{\lambda\rho} - (2P_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}),$$

c'est-à-dire

$$2K_\lambda^\rho g_{\rho\mu} + 2K_\mu^\rho g_{\lambda\rho} - (2P_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}).$$

Pour ce qui est du second membre, nous allons d'abord calculer $H_\tau^\tau \equiv P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ en contractant β et μ dans (23.6)

$$P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \equiv -\partial_\rho(\gamma_\alpha g^{\rho\alpha}) - \partial_\alpha F^\alpha - \gamma_\sigma\gamma_\alpha g^{\sigma\alpha} + L_{\rho\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\beta g^{\rho\alpha}$$

ou encore, comme $F^\alpha \equiv \partial_\rho g^{\rho\alpha} + \gamma_\rho g^{\rho\alpha}$,

$$P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \equiv -l^{\alpha\beta}\partial_\beta\gamma_\alpha - \gamma_\alpha F^\alpha - \partial_\alpha F^\alpha + L_{\rho\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\beta g^{\rho\alpha},$$

$L_{\lambda\beta}^\tau$ étant toujours considéré comme remplacé par la solution unique de (9.5), nous avons les identités, équivalentes à (24.5),

$$\begin{aligned}(42.1)\qquad & 2K_\lambda^\rho g_{\rho\mu} + 2K_\mu^\rho g_{\lambda\rho} - 2(P_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}) + \Omega_\lambda^\beta(m)g_{\beta\mu} + \bar{\Omega}_\mu^\beta(m)g_{\lambda\beta} \\ & \equiv -l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu} + l^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\partial_\alpha\gamma_\beta - g_{\lambda\beta}\partial_\mu F^\beta - g_{\beta\mu}\partial_\lambda F^\beta \\ & \quad + g_{\lambda\mu}\partial_\alpha F^\alpha - F^\alpha\partial_\alpha g_{\lambda\mu} + g_{\lambda\mu}\gamma_\alpha F^\alpha + 2\Lambda'_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}L_{\rho\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\beta g^{\rho\alpha},\end{aligned}$$

on peut grouper les deux premiers termes du second membre sous une forme plus élégante: en effet, un calcul élémentaire montre que

$$-\sqrt{-g}\,l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\frac{g_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}} \equiv -l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu} + l^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\partial_\alpha\gamma_\beta + 2l^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\partial_\beta g_{\lambda\mu} - l^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\gamma_\alpha\gamma_\beta.$$

Il vient donc enfin l'expression

$$\begin{aligned}(42.2)\qquad & 2K_\lambda^\rho g_{\rho\mu} + 2K_\mu^\rho g_{\lambda\rho} - 2(P_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}) + \Omega_\lambda^\beta(m)g_{\beta\mu} + \bar{\Omega}_\mu^\beta(m)g_{\lambda\beta} \\ & \equiv -\sqrt{-g}\,l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\frac{g_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}} - g_{\lambda\beta}\partial_\mu F^\beta - g_{\beta\mu}\partial_\lambda F^\beta + g_{\lambda\mu}\partial_\alpha F^\alpha \\ & \quad - F^\alpha\partial_\alpha g_{\lambda\rho} + g_{\lambda\mu}\gamma_\alpha F^\alpha + 2\Lambda'_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}L_{\rho\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\beta g^{\rho\alpha} \\ & \quad - 2l^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\partial_\beta g_{\lambda\mu} - l^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\gamma_\alpha\gamma_\beta;\end{aligned}$$

le second membre de (42.2) est un tenseur puisque le premier l'est; *soit* $2\Sigma_{\lambda\mu}$ *ce tenseur*.

13. Le nouveau système des équations de champ et le tenseur d'impulsion-énergie. — Nous allons utiliser les identités (42.2) pour remplacer le système,

$$(43.1)\qquad P_{(\alpha\beta)} = 0,$$

$$(43.2)\qquad P_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{2}{3}(\partial_\alpha\Sigma_\beta - \partial_\beta\Sigma_\alpha)$$

par un système équivalent. Comme

$$\Pi_{\lambda}^{\rho} \equiv P_{(\lambda\sigma)} l^{\rho\sigma} + P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma},$$

les identités (42.2) fournissent, comme conséquence de (43.1),

$$(43.3) \qquad P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} g_{\lambda\rho} - P_{(\lambda\mu]} - \frac{g_{\lambda\mu}}{2} P_{[\alpha\beta]} m^{\alpha\beta} + \Omega_{\lambda}^{\beta}(m) g_{\beta\mu} = \Sigma_{\lambda\mu}.$$

Réciproquement, (43.3) jointe à (42.2) entraîne

$$(43.4) \qquad P_{(\lambda\sigma)} l^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} + P_{(\mu\sigma)} l^{\rho\sigma} g_{\lambda\rho} - P_{(\lambda\mu]} - \frac{g_{\lambda\mu}}{2} P_{(\alpha\beta)} l^{\alpha\beta} = 0,$$

en multipliant les deux membres par $g^{\lambda\mu}$, on obtient

$$P_{(\alpha\beta)} l^{\alpha\beta} = 0$$

et, par conséquent, (43.4) devient

$$P_{(\lambda\sigma)} l^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} + P_{(\mu\sigma)} l^{\rho\sigma} g_{\lambda\rho} - P_{(\lambda\mu)} = 0,$$

multiplions maintenant par $g^{\lambda\alpha} g^{\beta\mu}$; il vient après calcul

$$P_{(\lambda\mu}[\, l^{\alpha\lambda} l^{\beta\mu} + m^{\alpha\lambda} m^{\beta\mu}] = 0.$$

Soit $A^{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}$ l'élément de matrice à dix lignes et dix colonnes qui figure entre crochets; dans les hypothèses A, et ceci suffira largement pour l'utilisation que nous ferons de (43.3), il est immédiat de constater que $\text{dét}(A^{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}) \neq 0$ et donc $P_{(\lambda\mu)} = 0$. Nous avons donc remplacé le système (43.1), (43.2) par (43.2), (43.3). Soit $a_{\lambda\mu}$ un tenseur symétrique quelconque et $S_{\lambda\mu}(a)$ le tenseur d'Einstein correspondant; directement, ou d'après (42.2) où l'on supposerait g_{α} symétrique,

$$(43.5) \qquad \begin{aligned} 2S_{\lambda\mu}(a) \equiv & -\sqrt{-a}\, a^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \frac{a_{\lambda\mu}}{\sqrt{-a}} - a_{\lambda\beta} \partial_{\mu} f^{\beta} - a_{\mu\beta} \partial_{\lambda} f^{\beta} + a_{\lambda\mu} \partial_{\alpha} f^{\alpha} \\ & - f^{\alpha} \partial_{\alpha} a_{\lambda\mu} + a_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \sigma\alpha \end{matrix} \right\} f^{\alpha} + 2L_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \rho\beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \sigma\alpha \end{matrix} \right\} a^{\rho\alpha} \\ & - 2a^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} \partial_{\beta} a_{\lambda\mu} - a^{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \beta\rho \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$(43.6) \qquad \Sigma_{\lambda\mu} = S_{\lambda\mu}(a) - \Phi_{\lambda\mu}(a).$$

Décomposons alors (43.3) en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique et joignons-y les équations (43.2). Nous avons le système des équations du champ

$$(43.7) \qquad \begin{aligned} S_{\lambda\mu}(a) = & P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\lambda\rho} - \frac{h_{\lambda\mu}}{2} P_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{2} \left(\Omega_{\lambda}^{\beta} g_{\beta\mu} + \Omega_{\mu}^{\beta} g_{\beta\lambda} \right) + \Phi_{(\lambda\mu)}(a), \end{aligned}$$

$$(43.8)\qquad P_{[\lambda\mu]} - P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} k_{\rho\mu} - P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} k_{\lambda\rho} + \frac{k_{\lambda\mu}}{2} P_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\Omega^{\beta}_{\lambda} \mathcal{T}_{\beta\mu} - \Omega^{\beta}_{\mu} \mathcal{T}_{\beta\lambda}\right) = \Phi_{[\lambda\mu]}(a) = 0.$$

$$(43.9)\qquad P_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha).$$

Nous avons mis en évidence dans (43.7) un tenseur d'impulsion-énergie dans lequel seul $\Phi_{(\lambda\mu)}(a)$ dépend *a priori* du tenseur métrique choisi. Posons

$$(43.10)\qquad \mathcal{T}_{\lambda\mu} = P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\lambda\rho} - \frac{h_{\lambda\mu}}{2} P_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta},$$

$\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ sera nommé tenseur électrodynamique; ce nom n'est justifié pour l'instant que par sa forme qui rappelle celle du tenseur de Maxwell de la théorie provisoire (38.5).

44. Hypothèses de champ faible. — Afin d'expliciter les équations précédentes, nous allons admettre pour les composantes de $g_{\alpha\beta}$ des développements limités suivant les puissances de $\frac{1}{c^2}$ dont les premiers termes sont les potentiels de Minkowski en ce qui concerne les $h_{\alpha\beta}$ et restent à choisir pour $k_{\alpha\beta}$ (en relativité générale on emploie le mot « quasi-galiléen » pour désigner un champ faible qui admet en plus un comportement asymptotique euclidien dont il ne peut pas être question ici).

1° Choix des développements limités. — Dans un schéma matière champ électromagnétique, le tenseur d'impulsion-énergie utilisé en relativité générale s'écrit, comme nous l'avons noté au paragraphe 38,

$$(44.1)\qquad \Theta_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta - \frac{\mu_{\alpha\beta}}{c^2} + \frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{1}{4} a_{\alpha\beta} H_{\lambda\mu} K^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\left(K_{\lambda\alpha} H^{\lambda}_{\beta} + K_{\lambda\beta} H^{\lambda}_{\alpha}\right)\right],$$

le ds^2 de Minkowski étant $c^2(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, u_0 a pour partie principale c et les u_i sont en $\frac{1}{c}$. Des raisons de cohérence des ordres de grandeur de chacun des deux membres des équations du champ (38.6) conduisent à prendre $\chi = o\left(\frac{1}{c^2}\right)$ (14). Donc pour le second membre nous avons d'après (44.1),

$$(44.2)\qquad \chi\Theta_{00} = o(1), \qquad \chi\Theta_{0i} = o\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad \chi\Theta_{ij} = o\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Dans un schéma électromagnétique pur, ou du moins sans densité de matière

(14) F. Hennequin, [29] *Thèse*, Paris, 1956, p. 38.

$(\rho = 0)$

(44.3) $$\chi\Theta_{00} = o\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad \chi\Theta_{0i} = o\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad \chi\Theta_{ij} = o\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Dans le cas (44.2), chaque fois qu'on remplace un indice zéro par un indice i, on passe à l'ordre supérieur, tandis que dans le cas (44.3), $\chi\Theta_{00}$ est seul d'ordre inférieur aux autres composantes. On constate facilement que le tenseur d'impulsion-énergie écrit au second membre de (43.7) se comporte comme (44.3) quel que soit l'ordre choisi pour $k_{\lambda\mu}$; pour avoir exactement $o\left(\frac{1}{c^2}\right)$, $o\left(\frac{1}{c^4}\right)$, $o\left(\frac{1}{c^4}\right)$ au second membre de (43.7), nous prendrons

$$k_{\lambda\mu} = \frac{\beta_{\lambda\mu}}{c^2}.$$

En théorie du champ unifié d'Eintein-Schrödinger, nous serions donc bien dans un cas « unitaire extérieur », extension du schéma électromagnétique pur de la relativité générale. Nous ferons désormais l'hypothèse que le tenseur $a_{\alpha\beta}$ choisi a même partie principale que $h_{\alpha\beta}$; les parties principales des $h_{\alpha\beta}$ sont celles des potentiels de Minkowski; l'ordre des termes suivants du développement nous est imposé par la raison que $S_{\lambda\mu}(a)$ doit avoir même ordre que le second membre dans (43.7) : donc ce sera $\frac{1}{c^2}$ pour les indices oo, $\frac{1}{c^4}$ pour les indices oi et $\frac{1}{c^4}$ pour les indices ij. Il vient

$$h_{00} = c^2 - \frac{2V_{00}}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad h_{0i} = \frac{V_{0i}}{c^4} + o\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad h_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{V_{ij}}{c^4} + o\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

on en déduit

$$h = -c^2 + \frac{2V_{00}}{c^2} + \frac{V_{pp}}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad \text{avec} \quad V_{pp} = V_{11} + V_{22} + V_{33}$$

et

$$h^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2V_{00}}{c^6} + o\left(\frac{1}{c^{10}}\right), \qquad h^{0i} = o\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad h^{ij} = -\delta_{ij} - \frac{V_{ij}}{c^4} + o\left(\frac{1}{c^8}\right).$$

D'autre part,

$$k_{0i} = \frac{\beta_{0i}}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad m^{0i} = -\frac{\beta_{0i}}{c^4} + o\left(\frac{1}{c^8}\right),$$

$$k_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad m^{ij} = \frac{\beta_{ij}}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^6}\right)$$

et

$$g = -c^2 + \frac{2V_{00}}{c^2} + \frac{V_{pp}}{c^2} - \frac{\beta_{kl}\beta_{kl}}{2c^2} + o\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

Pour abréger le langage, nous nommerons cet ensemble de conditions imposées au tenseur fondamental : hypothèse B.

2° *Conséquences.* — *a. Ordre de grandeur des coefficients de la connexion.* — Nous avons vu au paragraphe 27 que

$$L^{\rho}_{\lambda\mu} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda\mu \end{Bmatrix}_h + S^{\rho}_{\lambda\mu} + U^{\rho}_{\lambda\mu},$$

$S^{\rho}_{\lambda\mu}$ et $U^{\rho}_{\lambda\mu}$ sont définis par le système (27.6). Les développements B entraînent que

$$\begin{Bmatrix} i \\ 00 \end{Bmatrix}_h = o\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad \begin{Bmatrix} 0 \\ ij \end{Bmatrix}_h = o\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad \text{tous les autres} = o\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$2S^{0}_{\lambda\mu} = \frac{1}{c^2} K_{\lambda\mu 0} + o\left(\frac{1}{c^8}\right) = o\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$2S^{i}_{\lambda\mu} = -K_{\lambda\mu i} + o\left(\frac{1}{c^6}\right) = o\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

On rappelle que

$$K_{\lambda\mu\nu} = \nabla_\lambda k_{\nu\mu} + \nabla_\mu k_{\lambda\nu} + \nabla_\nu k_{\lambda\mu},$$

$U^{\rho}_{\lambda\mu}$ est d'ordre $\frac{1}{c^4}$ au moins,

$$\gamma_\alpha = L^{\sigma}_{\sigma\alpha} = o\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad \text{car} \quad S^{\sigma}_{\sigma\alpha} = o.$$

b. Le terme en Ω *dans* (43.7) *et* (43.8) : Reportons-nous à (24.4); les deux derniers termes du deuxième membre sont au moins d'ordre $\left(\frac{1}{c^6}\right)$. Donc, en partie principale,

$$2\, m^{\alpha\rho}\, \partial^{\rho}\left(L^{\beta}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}\right) = 2\,\Omega^{\beta}_{\lambda}(m) g_{\beta\mu},$$

Ceci prouve que dans l'expression de $\Phi_{(\lambda\mu)}(a)$ dans (43.7) on peut remplacer $\Lambda'_{\lambda\mu}$ par $\Lambda_{\lambda\mu}$ [défini par (23.11)] sans rien changer à la partie principale du tenseur d'impulsion-énergie; d'autre part, l'examen de $L^{\beta}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}$ montre que sa partie symétrique est d'ordre $\frac{1}{c^2}$ et sa partie antisymétrique d'ordre $\frac{1}{c^4}$: donc dans (43.8) le terme en Ω disparaît de la partie principale où ne subsiste que $P_{\lambda\mu}$ et $\Phi_{[\lambda\mu]}(a) = -\Sigma_{[\lambda\mu]}$.

c. La forme simple de (43.8) : Un examen rapide de $\Sigma_{\lambda\mu}$ défini par le deuxième membre de (42.2) montre que, dans l'hypothèse B,

$$-\Sigma_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2} l^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} k_{\lambda\mu} + o\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

Nous désignerons par le symbole Δ l'opposé du dalembertien ordinaire formé à partir du tenseur $l^{\alpha\beta}$, soit $-l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}$. Alors

$$\Delta k_{\lambda\mu} = -l^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} k_{\lambda\mu},$$

(43.8) s'écrit donc

$$P_{[\lambda\mu]} = -\frac{1}{2}\Delta k_{\lambda\mu} + o\left(\frac{1}{c^6}\right). \tag{44.4}$$

Signalons une conséquence immédiate de (43.9) sur les $\beta_{\lambda\mu}$; les (43.9) entraînent

$$\partial_\lambda P_{[\mu\nu]} + \partial_\mu P_{[\nu\lambda]} + \partial_\nu P_{[\lambda\mu]} = 0$$

et, à cause de (44.4),

$$\beta_{\lambda\mu\nu} = 0, \qquad \text{avec} \quad \beta_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda \beta_{\mu\nu} + \partial_\mu \beta_{\nu\lambda} + \partial_\nu \beta_{\lambda\mu}. \tag{44.5}$$

Si l'on se donne arbitrairement le vecteur covariant Σ_α par son développement (dont le premier terme doit être en $\frac{1}{c^2}$) (43.9) jointes à (44.4) définissent $\beta_{\lambda\mu}$ comme solution d'une équation $\Delta f = g$, où Δ a pour partie principale le laplacien elliptique à trois dimensions; (43.7) fournissent alors V_{00}, V_{0i} et V_{ij}; ces valeurs, reportées dans (43.8), donnent le terme suivant du développement de $k_{\lambda\mu}$ qui sera d'ordre $\frac{1}{c^6}$ et ainsi de suite par approximations successives. Ce n'est pas dans ce but que nous poursuivrons les calculs; nous essaierons plutôt d'interpréter les différents termes du tenseur d'impulsion-énergie dont nous allons mettre en évidence la partie principale suivant les développements indiqués.

45. Les équations approchées en coordonnées isothermes. — Désormais, les coefficients $V_{\lambda\mu}$ et $\beta_{\lambda\mu}$ des développements B sont supposés liés par les quatre conditions

$$F^\alpha \equiv -g^{\rho\sigma} L^\alpha_{\rho\sigma} = 0, \tag{45.1}$$

nous allons donner une expression simple (15) de F^α en fonction des tenseurs $l^{\beta\alpha}$, $h_{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$. Reprenons le système (27.6),

$$U^\sigma_{\lambda\mu} = h^{\sigma\rho}(S^\alpha_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + S^\alpha_{\rho\mu} k_{\lambda\alpha}), \tag{45.2}$$

$$2 S^\alpha_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} = K_{\lambda\mu\alpha} + 2 U^\alpha_{\rho\mu} k_{\alpha\lambda}, \tag{45.3}$$

remplaçons dans (45.1) $L^\alpha_{\rho\sigma}$ par $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\}_h + S^\alpha_{\rho\sigma} + U^\alpha_{\rho\sigma}$. Il vient

$$F^\alpha h_{\alpha\beta} = l^{\rho\sigma} [\rho\sigma, \beta]_h + l^{\rho\sigma}(S^\alpha_{\beta\rho} k_{\sigma\alpha} + S^\alpha_{\beta\sigma} k_{\rho\alpha}) + m^{\rho\sigma} S^\alpha_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta}.$$

or, d'après (31.6),

$$l^{\rho\sigma} k_{\sigma\alpha} = m^{\rho\sigma} h_{\sigma\alpha}.$$

Donc

$$F^\alpha h_{\alpha\beta} = l^{\rho\sigma} [\rho\sigma, \beta]_h + m^{\rho\sigma}(S^\alpha_{\beta\rho} h_{\sigma\alpha} + S^\alpha_{\sigma\beta} h_{\rho\alpha} + S^\alpha_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta}).$$

Permutons circulairement (45.3) pour avoir une autre expression de cette dernière parenthèse

$$2 S^\alpha_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} + 2 S^\alpha_{\mu\rho} h_{\alpha\lambda} + 2 S^\alpha_{\rho\lambda} h_{\alpha\mu} = K_{\lambda\mu\rho} + K_{\mu\rho\lambda} + K_{\rho\lambda\mu} = -(\partial_\lambda k_{\mu\rho} + \partial_\mu k_{\rho\lambda} + \partial_\rho k_{\lambda\mu}),$$

(15) M. A. Tonnelat [29], p. 141.

nous noterons $\varphi_{\lambda\mu\rho}$ cette permutation circulaire des $\partial_\lambda k_{\mu\rho}$. Alors,

$$\overline{k}^{\alpha\alpha} h_{\alpha\beta} = \overline{k}^{\rho\sigma} [\rho\sigma, \beta]_k - \frac{1}{2} m^{\alpha\sigma} \varphi_{\beta\alpha\sigma}.$$

Nous avons vu que $\Delta_j^3 \ldots = 0$. En munissant V_4 d'une structure de variété riemannienne, on pourrait faire des hypothèses sur le comportement à l'infini des $k_{\alpha\beta}$ et l'on déduirait que $\beta_{\mu\nu} \ldots = 0$; la condition d'isothermie au sens unitaire se réduirait en première approximation à

$$h^{\rho\sigma} [\rho\sigma, \beta]_h = 0,$$

c'est-à-dire à la condition d'isothermie au sens de $h_{\alpha\beta}$.

Rappelons que $F^\alpha = 0$ est équivalent à $f_\alpha^2 = 0$ rigoureusement, si

$$\omega_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\overline{h}}{g}}\, k_{\lambda\mu}.$$

Nous nous proposons d'écrire les équations (43.7) en première approximation, en coordonnées isothermes; nous prendrons $\omega_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\overline{h}}{g}}\, k_{\lambda\mu}$ de manière à expliciter $\Phi_{(\lambda\mu)}(a)$ avec le maximum de simplicité. D'après (43.6),

$$\Phi_{(\lambda\mu)}(a) = S_{\lambda\mu}(a) - \Sigma_{(\lambda\mu)};$$

1° D'après (43.5) et dans le système de coordonnées où nous nous sommes placés,

$$2 S_{\lambda\mu}(a) = -\sqrt{-a}\, a^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \frac{\omega_{\lambda\mu}}{\sqrt{-a}} + o\left(\frac{1}{c^3}\right);$$

2° D'après (42.2), dans le système de coordonnées où nous nous sommes placés, et rigoureusement

$$2\Sigma_{\ldots} = \sqrt{\ldots} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \frac{\omega_{\ldots}}{\sqrt{\ldots}} - 2 g^{\alpha\beta} \partial_{\gamma\alpha} \ldots + g^{\alpha\beta} \omega_{\ldots} \ldots - 2\lambda \ldots - \ldots L^2 \ldots,$$

prenons la partie symétrique et utilisons le remarques du paragraphe 44 au 2°

$$2\Sigma_{\ldots} = \sqrt{\ldots} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \frac{h_{\ldots}}{\sqrt{\ldots}} + g^{\alpha\beta} (S^\tau_{\ldots} S^\delta_{\ldots} h_{\ldots} + S^\tau_{\ldots} S^\delta_{\ldots} h_{\ldots} - h_{\ldots} S^\tau_{\ldots} S^\delta_{\ldots})$$
$$- g^{\alpha\beta} (S^\delta_{\ldots} \partial_\gamma h_{\ldots} + S^\delta_{\ldots} \partial_\gamma h_{\ldots}) - \begin{cases} o\left(\frac{1}{c^3}\right), \\ o\left(\frac{1}{c^3}\right), \end{cases}$$

les termes complémentaires sont d'ordre $\frac{1}{c^3}$ pour Σ_{00} et $\frac{1}{c^5}$ pour $\Sigma_{\ldots}$ et $\Sigma_{\ldots}$: nous écrirons simplement $+ o\left(\frac{1}{c^3}\right)$ dans la suite. Il ne nous reste plus qu'à calculer

la différence

$$-\sqrt{-a}\,a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\frac{a_{\lambda\mu}}{\sqrt{-a}}+\sqrt{-g}\,l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\frac{h_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}}.$$

Pour faire ce calcul, nous conviendrons que le signe $=$ représente l'égalité des parties principales des deux membres suivant les développements B

$$h=g+\frac{\beta^2}{c^2},\qquad \text{où}\quad \beta^2=\frac{\beta_{kl}\beta_{kl}}{2}.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{h}{g}}=1-\frac{\beta^2}{2c^4},\qquad \sqrt{-g}=\sqrt{-h}\left(1+\frac{\beta^2}{2c^4}\right);$$

reportons-nous à (31.1′),

$$l_{\lambda\mu}=h_{\lambda\mu}+k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma},$$

$$a_{\lambda\mu}=\sqrt{\frac{h}{g}}\,l_{\lambda\mu}=\left(1-\frac{\beta^2}{2c^4}\right)(h_{\lambda\mu}+k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma})=h_{\lambda\mu}-h_{\lambda\mu}\frac{\beta^2}{2c^4}-\frac{\beta_{\lambda l}\beta_{\mu l}}{c^4}.$$

Comme $a=h$, la différence proposée devient

$$(a_{\lambda\mu}-h_{\lambda\mu})+h_{\lambda\mu}\,\Delta\frac{\sqrt{-g}-\sqrt{-h}}{\sqrt{-h}}=\Delta\left(-h_{\lambda\mu}\frac{\beta^2}{2c^4}-\frac{\beta_{\lambda l}\beta_{\mu l}}{c^4}\right)$$
$$+\Delta\left(h_{\lambda\mu}\frac{\beta^2}{2c^4}\right)=\Delta(k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma}),$$

D'où les équations approchées cherchées,

$$S_{\lambda\mu}(a)=\mathfrak{G}_{\lambda\mu}+\frac{1}{2}\left[\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu}+\Omega^{\beta}_{\mu}(m)g_{\beta\lambda}\right]+\frac{1}{2}l^{\alpha\rho}S^{\beta}_{\alpha\sigma}\left(S^{\sigma}_{\rho\mu}h_{\lambda\beta}+S^{\sigma}_{\rho\lambda}h_{\beta\mu}-h_{\lambda\mu}S^{\sigma}_{\rho\beta}\right)$$
$$+l^{\alpha\rho}\left(S^{\beta}_{\alpha\mu}\,\partial_{\rho}k_{\beta\lambda}+S^{\beta}_{\alpha\lambda}\,\partial_{\rho}k_{\beta\mu}\right)+\frac{1}{2}\Delta(k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma})+o\left(\frac{1}{c^6}\right);$$

en ce qui concerne les termes en Ω on trouve que

$$\frac{1}{2}\left[\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu}+\Omega^{\beta}_{\mu}(m)g_{\beta\lambda}\right]=\frac{1}{2}m^{\alpha\rho}(\partial_{\lambda\rho}k_{\mu\alpha}+\partial_{\mu\rho}k_{\lambda\alpha})+o\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

mais cette nouvelle expression ne paraît pas présenter d'intérêt.

A part le dernier, tous les termes du tenseur d'impulsion-énergie mis en évidence sont indépendants du choix du tenseur métrique. Puisque nous avons des raisons de donner la préférence à $\gamma_{\alpha\beta}$ du point de vue interprétation physique, nous allons écrire l'expression de $S_{\lambda\mu}(\bar{\gamma})$ où $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$ est le produit de $\gamma_{\alpha\beta}$ par un scalaire. Soit

$$\bar{\gamma}^{\alpha\beta}=\frac{1}{F^2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left(\frac{2h}{g}h^{\alpha\beta}-l^{\alpha\beta}\right)=\frac{1}{F^2}\sqrt{\frac{g}{h}}\gamma^{\alpha\beta},$$

$$\sqrt{-\bar{\gamma}}=F^2\sqrt{-h},\qquad \bar{\gamma}^{\alpha\beta}=\sqrt{\frac{h}{g}}(2h_{\alpha\beta}-l_{\alpha\beta}).$$

le facteur scalaire a été choisi de manière que

$$F^2 f^{\alpha}_{(\bar\gamma)} \equiv \frac{h}{g} f^{\alpha}_{(b)} - f^{\alpha}_{(a)}, \qquad \text{avec} \quad b_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{h}{g}}\, h_{\lambda\mu},$$

les coordonnées sont isothermes relativement à $a_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{h}{g}}\, l_{\lambda\mu}$. Elles le sont aussi en première approximation relativement à $h_{\lambda\mu}$. Il vient

$$f^{\alpha}_{(\bar\gamma)} = -\frac{1}{2}\partial^{\alpha}\frac{h-g}{g},$$

Ceci avec la même convention que précédemment concernant le signe $=$. Alors

$$\begin{aligned} 2S_{\lambda\mu}(\bar\gamma) &= -\sqrt{-\bar\gamma}\,\bar\gamma^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\frac{\bar\gamma_{\lambda\mu}}{\sqrt{-\bar\gamma}} - \bar\gamma_{\lambda\beta}\partial_{\mu}f^{\beta}_{(\bar\gamma)} - \bar\gamma_{\mu\beta}\partial_{\lambda}f^{\beta}_{(\bar\gamma)} + \bar\gamma_{\lambda\mu}\partial_{\alpha}f^{\alpha}_{(\bar\gamma)} \\ &= -\sqrt{-\bar\gamma}\,\bar\gamma^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\frac{\bar\gamma_{\lambda\mu}}{\sqrt{-\bar\gamma}} + \partial_{\lambda\mu}\frac{h-g}{g} + \frac{1}{2}h_{\lambda\mu}\Delta\frac{h-g}{g}, \end{aligned}$$

le calcul de la différence

$$-\sqrt{\bar\gamma}\,\bar\gamma^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\frac{\bar\gamma_{\lambda\mu}}{\sqrt{-\gamma}} + \sqrt{-a}\,a^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\frac{a_{\lambda\mu}}{\sqrt{-a}}$$

s'effectue sans difficulté et l'on obtient

$$\begin{aligned} S_{\lambda\mu}(\bar\gamma) = {} & P_{\lambda\sigma]}\, m^{\rho\sigma} h_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]}\, m^{\rho\sigma} h_{\lambda\rho} - \frac{h_{\lambda\mu}}{2} P_{[\alpha\beta]} m^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left[\Omega^{3}_{\lambda}(m) g_{\beta\mu} + \Omega^{3}_{\mu}(m) g_{\beta\lambda}\right] \\ & + \frac{1}{2} l^{\alpha\rho} S^{3}_{\alpha\sigma}\left(S^{\sigma}_{\rho\mu} h_{\lambda\beta} + S^{\sigma}_{\rho\lambda} h_{\beta\mu} - h_{\lambda\mu} S^{\sigma}_{\rho\beta}\right) + l^{\alpha\rho}\left(S^{3}_{\alpha\mu}\partial_{\rho} k_{\beta\lambda} + S^{3}_{\alpha\lambda}\partial_{\rho} k_{\beta\mu}\right) \\ & - \Delta\left(k_{\lambda\rho} k_{\mu\sigma} h^{\rho\sigma} + \frac{3}{4}\frac{g-h}{g} h_{\lambda\mu}\right) + \frac{1}{2}\partial_{\lambda\mu}\frac{h-g}{g} + o\left(\frac{1}{c^6}\right). \end{aligned}$$

Le tenseur électrodynamique sera étudié au paragraphe suivant; le tenseur

$$l^{\alpha\rho} S^{3}_{\alpha\sigma}\left(S^{\sigma}_{\rho\mu} h_{\lambda\beta} + S^{\sigma}_{\rho\lambda} h_{\beta\mu} - h_{\lambda\mu} S^{\sigma}_{\rho\beta}\right)$$

se comporte comme $\mathcal{C}_{\lambda\mu}$ du point de vue des ordres de grandeur respectifs pour les indices oo, oi et ij. Puisque, en première approximation, dans les hypothèses B, et compte tenu de (44.5),

$$S^{3}_{\alpha\sigma} h_{\lambda\beta} = \frac{1}{2} K_{\alpha\sigma\lambda} = \partial_{\lambda} k_{\alpha\sigma},$$

nous pouvons encore l'écrire

$$(45.4) \qquad \frac{1}{2} l^{\alpha\rho} l^{\sigma\nu}\left(\partial_{\lambda} k_{\alpha\sigma}\partial_{\nu} k_{\rho\mu} + \partial_{\mu} k_{\alpha\sigma}\partial_{\nu} k_{\rho\lambda} - h^{\beta\gamma} h_{\lambda\mu}\partial_{\nu} k_{\rho\beta}\partial_{\gamma} k_{\alpha\sigma}\right).$$

Au contraire, les tenseurs

$$\frac{1}{2}\left[\Omega^{3}_{\lambda}(m) g_{\beta\mu} + \Omega^{3}_{\mu}(m) g_{\beta\lambda}\right] \quad \text{et} \quad S^{3}_{\alpha\mu}\partial_{\rho} k_{\beta\lambda} + S^{3}_{\alpha\lambda}\partial_{\rho} k_{\beta\mu}$$

se comportent comme le tenseur des pressions partielles $\frac{\mu_{\alpha\beta}}{c^2}$.

46. Le tenseur électrodynamique comparé au tenseur de Maxwell de la théorie « naïve ». — Nous avons proposé au paragraphe 41 une interprétation comportant un tenseur champ et un tenseur induction non proportionnels $H_{\alpha\beta}$ et $K'^{\alpha\beta}$

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g}\,m^{\gamma\delta}, \tag{46.1}$$

$$K'^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\underset{+-}{\Delta} k_{\lambda\mu} \tag{46.2}$$

satisfaisant du fait des équations du champ unifié à deux groupes d'équations de Maxwell; le calcul du tenseur de Maxwell symétrisé à partir des expressions (46.1) et (46.2) a été fait au paragraphe 41; il conduit à

$$4\pi c^2 \tau_{\lambda\mu} = \frac{1}{4}\gamma_{\lambda\mu} m^{\alpha\beta}\underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\gamma_{\lambda\rho} m^{\rho\sigma}\underset{+-}{\Delta} k_{\mu\sigma} + \gamma_{\mu\rho} m^{\rho\sigma}\underset{+-}{\Delta} k_{\lambda\sigma}).$$

Rappelons que

$$\underset{+-}{\Delta} = -\frac{1}{2}(g^{\alpha\rho} D_\rho D_\alpha - g^{\rho\alpha}\overline{D}_\rho \overline{D}_\alpha),$$

dans les hypothèses B, la partie principale de $\underset{+-}{\Delta} k_{\lambda\mu}$ n'est autre que

$$\Delta k_{\lambda\mu} = \quad l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} k_{\lambda\mu},$$

et compte tenu de (44.4),

$$4\pi c^2 \tau_{\lambda\mu} = \mathfrak{T}_{\lambda\mu} + o\left(\frac{1}{c^6}\right);$$

faisons encore une remarque sur le vecteur courant défini par

$$D_\nu K'^{\nu\delta} = J'^{\delta}.$$

D'après (46.2), la partie principale de J'^{δ} serait

$$-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}}\Delta\beta_{\lambda\mu\nu} = 0.$$

Dans les hypothèses que nous avons faites, le vecteur courant de la théorie « naïve » serait un infiniment petit d'ordre supérieur au champ et à l'induction.

BIBLIOGRAPHIE.

I. — *Espaces fibrés et connexions infinitésimales.*

[1] Allamigeon, *C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 220.
[2] Cartan, *Séminaire H. Cartan*, t. 2, 1949-1950.
[3] Cattaneo-Gasparini, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 10, 1956, p. 119.
[4] Cattaneo-Gasparini, *Rend. Accad. Lincei*, t. 22, 1957, p. 146.

[5] Ehresmann, *Colloque de Topologie*, Bruxelles, 1950, p. 29-55.
[6] Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Rome 1955.
[7] Maurer-Tison, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 995; *ibid.*, t. 246, 1958, p. 38; *ibid.*, t. 246, 1958, p. 240.
[8] Nomizu, *Lie groups and differential geometry* (*Math. Soc. Japan*, 1956).

II. — *Relativité générale.*

[9] Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste* (Gauthier-Villars, 1928-1930).
[10] Darmois, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 25, 1927).
[11] Debever, *Les espaces de l'électromagnétisme* (*Colloque de Géométrie différentielle*, Louvain, 1951, p. 217-233)
[12] Fourès-Bruhat, *Acta Math.*, t. 88, 1952, p. 141-225.
[13] Hennequin, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1464.
[14] Lichnerowicz, *Cours du Collège de France*, 1952-1953 (multigraphié).
[15] Pham Mau Quan, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 598 et 733; *ibid.*, t. 242, 1956, p. 465; *ibid.*, t. 242, 1956, p. 875.

III. — *Théorie unitaire du champ d'Einstein.*

[16] Born et Infeld, *Fondements de la nouvelle théorie du champ* (*Proc. Roy. Soc.*, A, t. 144, 1934, p. 425).
[17] Bose, *J. Phys. Rad.*, t. 14, 1953, p. 645.
[17 bis] Einstein, *The meaning of Relativity*, 1950 et 1953 (Appendice à la 4e édition).
[18] Hlavatý, *J. Rat. Mech. Anal.*, t. 2, 1953, p. 2-52.
[19] Hlavatý et Sâenz, *J. Rat. Mech. Anal.*, t. 2, 1953, p. 523-536.
[20] Kichenassamy, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 168.
[21] Lichnerowicz, *Compatibilité des équations de la théorie unitaire du champ d'Einstein* (*J. Rat. Mech.*, t. 3, 1954, p. 487-521).
[22] Maurer-Tison, *C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1956, p. 1127; *ibid.*, t. 242, 1956, p. 3042; *ibid.*, t. 243, 1956, p. 1196.
[23] Mavrides, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1566; *ibid.*, t. 239, 1954, p. 637.
[24] Papapetrou et Schrödinger, *The point-charge in the non-symetric field theory* (*Nature*, t. 168, n° 4262, 1951, p. 40.
[25] Pham Tan Hoang, *C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1955, p. 1919.
[26] Schrödinger, *Proc. Roy. Ir. Acad.*, t. 50 A, 1945, p. 143, et 223; *ibid.*, t. 51, 1946, p. 41; *ibid.*, t. 51 A, 1947, p. 163; *ibid.*, t. 51, 1948, p. 205 et t. 52, 1948, p. 1; *ibid.*, t. 51 A, 1948, p. 6.
[27] Tonnelat, *J. Phys. Rad.*, t. 12, 1951, p. 81-88.
[28] Tonnelat, *C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1955, p. 168.

N. B. Cette bibliographie est évidemment très incomplète : nous n'avons voulu citer que les travaux auxquels se rattachent immédiatement les problèmes que nous avons traités; en particulier, on ne trouvera rien dans cette liste sur les solutions à symétrie sphérique ni sur les équations du mouvement. Nous renvoyons pour plus d'information à l'un ou à l'autre

des deux livres récents que voici, dont les bibliographies sont pratiquement exhaustives :

[29] M. A. Tonnelat, *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

[30] V. Hlavatý, *Geometry of Einstein's unified field theory*, P. Noordhoff, Groningen, Hollande.

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 76. 1959, p. 271 à 281.

ÉLÉMENTS EXCEPTIONNELS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Par M. Paul MONTEL.

1. Une fonction $u = f(z)$, analytique et régulière dans un domaine (D), c'est-à-dire méromorphe dans ce domaine, peut être considérée comme établissant une correspondance entre les points du plan complexe z et ceux du plan complexe u ou entre les points des sphères de Riemann associées à ces plans. On peut la considérer aussi comme définissant une courbe (Γ) dans un plan projectif rapporté à deux axes de coordonnées z et u.

Les valeurs exceptionnelles sont celles que u ne prend pas ou ne prend qu'un nombre fini de fois. Leur étude repose sur le théorème de Picard. Elle constitue un ensemble de propositions formant le cycle de Picard et donne naissance à une importante famille normale. Le théorème de Picard affirme que u est une constante si elle admet dans le plan z trois valeurs exceptionnelles en se plaçant au premier point de vue; ou, en se plaçant au second point de vue, que la courbe (Γ) est une droite parallèle à l'axe des z si elle ne rencontre qu'un nombre fini de fois chacune de trois droites fixes parallèles à cet axe.

2. Il existe d'autres éléments exceptionnels que les points extérieurs à (Γ). On peut examiner les tangentes à cette courbe et transformer par dualité l'hypothèse du théorème de Picard. La tangente à (Γ) est la multiplicité définie par l'équation

$$U - f(z) - f'(z)(Z - z) = 0,$$

Z et U désignant les coordonnées courantes, z et u celles du point de contact. Aux trois droites parallèles du théorème de Picard vont correspondre trois points en ligne droite.

Supposons que ces points soient d'abord les points (1, 0), (0, 1), (1, 1), à l'infini, c'est-à-dire que la tangente n'est parallèle ni aux axes ni à leur bis-

sectrice. $f'(z)$ ne prendra aucune des valeurs 0, 1, ∞ et sera une constante C, donc

$$f(z) = Cz + C',$$

C′ désignant une autre constante : (Γ) est une droite.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de trois points alignés quelconques $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, $P_3(a_3, b_3)$ avec la condition

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soit $\lambda = a_2 - a_3$, $\mu = a_3 - a_1$, $\nu = a_1 - a_2$; si l'un de ces nombres est nul, par exemple λ, on a : $a_2 = a_3$, $b_2 \neq b_3$,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ 0 & b_3 - b_2 & 0 \end{vmatrix} = (b_3 - b_2)(a_2 - a_1) = 0.$$

Donc $a_2 = a_1$, les points sont sur une parallèle à l'axe des u et, comme ils sont distincts,

$$b_1 \neq b_2, \qquad b_2 \neq b_3, \qquad b_3 \neq b_1,$$

et l'on peut prendre

$$\lambda = b_2 - b_3, \qquad \mu = b_3 - b_1, \qquad \nu = b_1 - b_2.$$

On peut donc, dans tous les cas, supposer $\lambda\mu\nu \neq 0$.

Posons

$$\begin{aligned} \lambda[f(z) + (a_1 - z)f'(z) - b_1] &= \theta_1(z), \\ \mu[f(z) + (a_2 - z)f'(z) - b_2] &= \theta_2(z), \\ \nu[f(z) + (a_3 - z)f'(z) \quad b_3] &= \theta_3(z). \end{aligned}$$

On a, puisque $\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 = \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = \lambda + \mu + \nu = 0$,

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv 0,$$

et aucune des fonctions θ_1, θ_2, θ_3 n'a de zéro. La fonction $-\frac{\theta_1}{\theta_2}$ ne prend pas les valeurs 0 ni ∞ ; elle ne prend pas non plus la valeur 1, sinon l'égalité

$$\theta_1 + \theta_2 = 0$$

entraînerait $\theta_3 = 0$, ce qui est impossible.

Si $f(z)$ est régulière dans tout le plan fini, $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ est une constante et l'on a

$$f(z) + (a_1 - z)f' - b_1 \equiv C[f(z) + (a_2 - z)f' - b_2],$$

C désignant une constante, ou

$$f(z) + (\alpha - z)f' - \beta \equiv 0,$$

en posant

$$\alpha = \frac{a_1 - Ca_2}{1 - C}, \qquad \beta = \frac{b_1 - Cb_2}{1 - C}, \qquad \text{si } C \neq 1.$$

L'équation différentielle peut s'écrire

$$\left[\frac{f(z)}{\alpha - z}\right]' = \frac{\beta}{(\alpha - z)^2},$$

d'où

$$f(z) = C_1(z - \alpha) + \beta = C_1 z + C_2$$

La courbe (Γ) est une droite. Si $C = 1$, il vient

$$(a_1 - a_2) f' - (b_1 - b_2) = 0$$

et le résultat est le même.

Si le domaine d'existence (D) de $f(z)$ ne comprend pas tout le plan, on voit que les fonctions $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ forment une famille normale.

Les conclusions demeurent les mêmes si la tangente passe un nombre fini de fois par un seul des trois points.

Mais elles supposent essentiellement que les trois points P_1, P_2, P_3 soient alignés. Supposons en effet que ces points forment un triangle de sommets $(0, \infty)$, $(0, 0)$, $(\infty, 0)$. La fonction $u = e^z$ n'a aucune tangente parallèle aux axes et une tangente passant à l'origine,

Ce cas d'exception ne se présente pas dans le cas des valeurs exceptionnelles ; les droites parallèles peuvent être remplacées par trois droites arbitraires et même par une courbe algébrique d'ordre au moins égal à 3.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toute fonction régulière dans le plan dont la tangente ne passe jamais par l'un de trois points alignés ou ne passe qu'un nombre fini de fois par un de ces points est un binome du premier degré.

Nous appellerons *points tangentiellement exceptionnels*, les points par lesquels ne passe aucune tangente à la courbe (Γ).

3. Considérons une famille de fonctions $f(z)$ régulières dans un domaine (D) où elles admettent trois points tangentiellement exceptionnels alignés. On peut supposer que ce sont les points $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a', 0)$. En effet, des translations sur z et sur u ramènent un des points à l'origine et. si m désigne la pente de la droite qui les porte, en remplaçant $f(z)$ par $f(z) - mz$, on place les deux autres points sur l'axe des z. Soit alors

$$\begin{aligned} -f(z) - f'(z)(a - z) &= \theta_1, \\ -f(z) - f'(z)(a' - z) &= \theta_2, \\ -f(z) + zf'(z) \qquad\quad &= \theta_3; \end{aligned}$$

ces expressions sont dépourvues de zéro et vérifient l'identité

$$a'\theta_1 - a\theta_2 + (a - a')\,\theta_3 = 0.$$

La fonction

$$\frac{\theta_1}{\theta_3} = \frac{f(z) + f'(z)\,(a - z)}{f'(z) - zf'(z)} = 1 + a\frac{f'}{f - zf'}$$

admet comme valeurs exceptionnelles 0, ∞, $1 - \frac{a}{a'}$, comme on l'a vu précédemment, donc la fonction $\frac{f'}{f - zf'}$ admet les valeurs exceptionnelles $-\frac{1}{a}$, ∞, $-\frac{1}{a'}$ et son inverse, $\frac{f}{f'} - z$, les valeurs exceptionnelles $-a$, 0, $-a'$. Donc, la famille $\frac{f}{f'} - z$ est normale et il en est de même pour les fonctions $\frac{f}{f'}$ et pour

$$\varphi = \frac{f'}{f}.$$

On ne peut en conclure que la famille des fonctions $f(z)$ est normale. Par exemple, considérons la suite des fonctions $f_n(z) = e^{nz}$ dans un domaine contenant un segment de l'axe des u et ne contenant aucun des points tangentiellement exceptionnels. Les fonctions θ_1, θ_2, θ_3 n'ont pas de zéro dans le domaine car leurs zéros sont $a + \frac{1}{n}$, $a' + \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$: la famille n'est pas normale tandis que la suite $\frac{f_n'}{f_n} = n$ l'est. On verrait de même que la suite $\left(\frac{nz+1}{nz-1}\right)^n = f_n$ n'est pas normale car elle converge non uniformément vers $e^{\frac{2}{z}}$ tandis que la suite $\frac{f_n'}{f_n}$ converge vers $\frac{-2}{z^2}$. Des points tangentiellement exceptionnels sont ici $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$ si le domaine est le cercle $|z| < 1$.

La famille des dérivées logarithmiques est normale dans le domaine (D). On en déduit un cycle de théorèmes correspondant à ceux des cycles de Picard ou de Liouville dus à Schottky et à Landau.

Soit par exemple le domaine $|z| < 1$, $a' = \infty$ et

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

on montre aisément que, pour $|z| < 0 < 1$, le module de $\frac{f(z)}{f'(z)}$ est borné par un nombre dépendant des données, de 0 et de $\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$.

Si le domaine est $|z| < R$, on démontre que, si R dépasse une valeur dépendant de $|a_0|$, $|a_1|$, $|a_2|$, la fonction cesse d'être régulière ou l'un des points cesse d'être tangentiellement exceptionnel.

Dans certains cas, la famille des $f(z)$ est aussi normale (1).

---

(1) *Cf.* P. Montel, *Sur les propriétés tangentielles des fonctions analytiques* (Institut de mathématiques, 1958, Bucarest.)

4. Le théorème établi au paragraphe 2 peut être étendu à d'autres éléments exceptionnels. Appelons parabole osculatrice d'ordre p à la courbe (Γ) au point (z, u) la courbe d'équation

$$\Gamma = f(z) + \frac{Z-z}{1} f'(z) + \frac{(Z-z)^2}{1.2} f''(z) + \ldots + \frac{(Z-z)^p}{p!} f^{(p)}(z),$$

et supposons qu'il existe p points du plan $P_1, \ldots, P_p$, exceptionnels c'est-à-dire tels qu'aucune parabole osculatrice d'ordre p à (Γ) ne passe par un de ces points. Si les p points $P_1, P_2, \ldots, P_p$ sont sur une parabole d'ordre p, la fonction $f(z)$, supposée régulière dans le plan, est un polynome de degré p. Pour $p=1$, on retrouve le théorème du paragraphe 2.

Donnons la démonstration dans le cas de $p=4$. Soient $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, $P_3(a_3, b_3)$, $P_4(a_4, b_4)$, les quatre points exceptionnels, on doit avoir

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & b_2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & b_3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par λ, μ, ν, ρ les coefficients de b_1, b_2, b_3, b_4, dans le développement de δ. Si l'un d'eux, λ par exemple, est nul, on en déduit que deux des a_1, a_2, a_3, a_4 sont égaux, par exemple $a_1 = a_2$ et, comme $b_1 \neq b_2$, on en déduit, comme au paragraphe 2, que $a_2 = a_3$. Donc $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

Alors

$$f + (a-z) f' + \frac{(a-z)^2}{2} f''$$

a trois valeurs exceptionnelles b_1, b_2, b_3, donc

$$f + (a-z) f' + \frac{(a-z)^2}{2} f'' = C,$$

et, en dérivant,

$$(a-z)^2 f''' = 0,$$

d'où

$$f = Az^2 + Bz + C.$$

Supposons donc $\lambda\mu\nu\rho \neq 0$. Alors,

$$\lambda\left[f + (a_1 - z) f' + \frac{1}{2}(a_1 - z)^2 - b_1\right] = \frac{e^{\theta_1(z)}}{\varphi(z)},$$

$$\mu\left[f + (a_2 - z) f' + \frac{1}{2}(a_2 - z)^2 - b_2\right] = \frac{e^{\theta_2(z)}}{\varphi(z)},$$

$$\nu\left[f + (a_3 - z) f' + \frac{1}{2}(a_3 - z)^2 - b_3\right] = \frac{e^{\theta_3(z)}}{\varphi(z)},$$

$$\rho\left[f + (a_4 - z) f' + \frac{1}{2}(a_4 - z)^2 - b_4\right] = \frac{e^{\theta_4(z)}}{\varphi(z)},$$

d'où, en ajoutant,

$$e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} = 0,$$

φ, θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 désignant des fonctions entières. On en déduit que les différences entre deux des θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 sont des constantes (2). On a donc

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{Cte}$$

ou

$$f + (a_1 - z) f' + \frac{1}{2}(a_1 - z)^2 - b_1 = C\left[f + (a_2 - z) f' + \frac{1}{2}(a_2 - z)^2 - b_2 \right]$$

ou, en dérivant,

$$[(a_1 - z)^2 - C(a_2 - z)^2] f''' = 0$$

et, puisque $\lambda \neq 0$, $a_1 \neq a_2$,

$$f''' = 0$$
$$f = Az^2 + Bz + C.$$

On raisonnerait de même dans le cas général et l'on établit ainsi le théorème :

Toute fonction analytique régulière dont aucune parabole osculatrice d'ordre p ne passe par un de p points fixes situés sur une parabole d'ordre p est un polynome de degré p.

5. Remplaçons la multiplicité tangente par la multiplicité normale

$$f'(U - f) + Z - z = 0.$$

Supposons qu'aucune normale ne passe par l'un de trois points alignés et reprenons les notations du paragraphe 2 en posant

$$\lambda[f'(z)(b_1 - f(z)) + a_1 - z] = \theta_1,$$
$$\mu[f'(z)(b_2 - f(z)) + a_2 - z] = \theta_2,$$
$$\nu[f'(z)(b_3 - f(z)) + a_3 - z] = \theta_3,$$
$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv 0.$$

On en déduit que le rapport $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ est constant ou

$$z + f(z) f'(z) - \alpha - \beta f' = 0,$$
$$z^2 + u^2 - 2\alpha z - 2\beta u + \gamma = 0.$$

La courbe (Γ) est un cercle dont le centre est situé sur la droite $P_1P_2P_3$; elle admet donc des normales passant par ces trois points. Lorsque α et β sont infinis, la courbe est une droite et possède des normales passant par ces points. Il n'existe donc pas de fonction analytique uniforme et régulière dont aucune normale ne passe par trois points alignés.

---

(2) *Cf.* É. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. 20, 1897, p. 33-404).

6. Remplaçons la tangente à (Γ) par la corde joignant les points (z, u) et $(z+h, u+\Delta u)$, h étant fixe. Supposons que cette droite ne passe par aucun des points alignés P_1, P_2, P_3 et conservons les notations du paragraphe 2. La corde a pour équation

$$U - f - \frac{\Delta f}{h}(Z - z) = 0.$$

On aboutira à l'équation

$$\beta - f - \frac{\Delta f}{h}(\alpha - z) = 0.$$

$f = \beta$ est une solution; posons $f(z) = \beta - g(z)$, il vient

$$g(z+h)(\alpha - z) - g(z)(\alpha - z - h),$$
$$\frac{g(z+h)}{\alpha - z - h} = \frac{g(z)}{\alpha - z} = \omega(z),$$

$\omega(z)$ désignant une fonction périodique de période h. On a donc

$$f(z) = \beta + (z - \alpha)\omega(z).$$

Si $C = 1$, on a

$$(a_1 - a_2)\frac{\Delta f}{h} = b_1 - b_2,$$

et, comme $a_1 - a_2$ n'est pas nul,

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = c,$$

et, en posant $f = cz + g$,

$$\Delta g = 0$$

et $g = \omega(z)$ est périodique de période h.

Si la même propriété est vérifiée pour l'accroissement k et les points P'_1, P'_2, P'_3, on aura

$$\omega(z - \alpha) + \beta \equiv \omega_1(z - \alpha') + \beta',$$

α', β' étant les coordonnées d'un point de la droite $P'_1P'_2$. En remplaçant z par $z + k$,

$$\omega(z + k)(z + k - \alpha) + \beta = \omega_1(z)(z + k - \alpha') + \beta',$$

et, en retranchant,

$$(z + k - \alpha)\Delta_k\omega + k\omega = k\omega_1.$$

Remplaçons maintenant z par $z + h$ et retranchons, nous aurons

$$h\Delta_k\omega = k\Delta_h\omega_1$$

et

$$\frac{\Delta_h\omega_1}{h} = \frac{\Delta_k\omega}{k}.$$

$\frac{k}{h}\Delta_h\omega_1$ est une fonction doublement périodique θ. Donc

$$\begin{aligned}
\omega(z+k)-\omega(z)&=\theta,\\
\omega(z+2k)-\omega(z+k)&=\theta,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega(z+mk)-\omega[z+(m-1)k]&=\theta,
\end{aligned}$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\omega(z+mk)-\omega(z)=m\theta$$

et, si θ n'est pas identiquement nul, $\omega(z+mk)$ augmente indéfiniment avec m.

D'autre part, l'égalité

$$(z-\alpha)\omega+\beta=(z-\alpha')\omega_1+\beta'$$

donne

$$(z+mk-\alpha)\omega(z+mk)+\beta=(z+mk-\alpha')\omega_1(z)+\beta',$$

$$\omega(z+mk)=\frac{z+mk-\alpha'}{z+mk-\alpha}\omega_1(z)+\frac{\beta'-\beta}{z+mk-\alpha}$$

et

$$\lim_{m=\infty}\omega(z+mk)=\omega_1(z).$$

On peut supposer $\omega_1(z)$ fini puisque z est arbitraire. Il y a contradiction, donc θ est nul et

$$\Delta_k\omega=0.$$

$\omega(z)$ est doublement périodique. En résumé,

Une fonction régulière $f(z)$, telle que la corde unissant les points $(z, f(z))$, $(z+h, f(z+h))$ ne passe par aucun de trois points alignés est de la forme

$$(z-\alpha)\omega(z)+\beta,$$

$\omega(z)$ désignant une fonction périodique de période h, α et β des constantes.

Si la même propriété est vérifiée pour des accroissements h et k dont le rapport est imaginaire, ω est doublement périodique.

Si la même propriété est vérifiée pour des accroissements h, k, l, linéairement indépendants, ω est une constante et la fonction est linéaire.

Remarque. — Dans le cas où le rapport $\frac{h}{k}$ est réel, si ce rapport est rationnel, $\omega(z)$ est périodique et si ce rapport est irrationnel, ω est une constante et $f(z)$ est linéaire.

7. Soit $u=f(z, z')$, une fonction analytique de deux variables z, z', régulière pour toutes valeurs finies de ces variables. Supposons qu'aucun plan tangent à la surface (S) définie par les valeurs (z, z', u) ne passe par un des points alignés $P_1(a_1, a'_1, b_1)$, $P_2(a_2, a'_2, b_2)$, $P_3(a_3, a'_3, b_3)$. On a

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1\\ a_2 & b_2 & 1\\ a_3 & b_3 & 1\end{vmatrix}=0,\qquad \delta'=\begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & 1\\ a'_2 & b_2 & 1\\ a'_3 & b_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Il existe trois nombres λ, μ, ν, différents de zéro, comme on l'a montré au paragraphe 2, tels que

$$\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 = \lambda a'_1 + \mu a'_2 + \nu a'_3 = \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = \lambda + \mu + \nu = 0.$$

Le plan tangent au point (z, z', u) a pour équation

$$U - u - p(Z - z) - q(Z' - z') = 0,$$

avec $p = \frac{\partial u}{\partial z}$, $q = \frac{\partial u}{\partial z'}$. Si ce plan ne passe par aucun des points P_1, P_2, P_3, les fonctions

$$\begin{aligned} \lambda[b_1 - u - p(a_1 - z) - q(a'_1 - z')] &= \theta_1, \\ \mu[b_2 - u - p(a_2 - z) - q(a'_2 - z')] &= \theta_2, \\ \nu[b_3 - u - p(a_3 - z) - q(a'_3 - z')] &= \theta_3 \end{aligned}$$

n'ont pas de zéro, On a d'ailleurs

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv 0.$$

On en déduit, comme au paragraphe 2, que le rapport $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ est une constante C, d'où

$$b_1 - u - p(a_1 - z) - q(a'_1 - z') = C[b_2 - u - p(a_2 - z) - q(a'_2 - z')]$$

ou

$$\beta - u - p(\alpha - z) - q(\alpha' - z') = 0,$$

avec

$$\alpha = \frac{a_1 - Ca_2}{1 - C}, \qquad \alpha' = \frac{a'_1 - Ca'_2}{1 - C}, \qquad \beta = \frac{b_1 - Cb_2}{1 - C}, \qquad \text{si} \quad C \neq 1.$$

Par une translation des axes, cette équation devient

$$u - pz - qz' = 0.$$

Le premier membre est le déterminant fonctionnel des fonctions $\frac{u}{z}$ et $\frac{z'}{z}$; en effet

$$\frac{D\left(\frac{u}{z}, \frac{z'}{z}\right)}{D(z, z')} = \begin{vmatrix} p - \frac{u}{z^2} & -\frac{z'}{z^2} \\ \frac{q}{z} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{u - pz - qz'}{-z^3}.$$

On a donc

$$\frac{u}{z} = \varphi\left(\frac{z'}{z}\right);$$

la surface est un cône de sommet origine. La section de ce cône par le plan $z' = tz$ est la droite d'intersection de ce plan avec le plan

$$u = \varphi(t)z,$$

la fonction $\varphi\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{u(z, z')}{z}$ est analytique et régulière et il en est de même

pour $\varphi(t)$. La génératrice du cône

$$z' = tz, \qquad u = \varphi(t)z$$

est unique dans tout plan passant par l'axe des u. Pour un pôle de $\varphi(t)$, on obtiendrait la droite

$$z = z' = 0,$$

c'est-à-dire l'axe des u qui devrait alors appartenir à chacun de ces plans, ce qui n'a pas lieu. Donc $\varphi(t)$ n'a pas de pôle. Si l'on coupe le cône par le plan $z = 0$ correspondant à t infini, la génératrice est définie par le plan

$$u = \frac{\varphi(t)}{t} z'$$

et $\frac{\varphi(t)}{t}$ a une valeur limite pour t infini. Donc $\varphi(t)$ a un pôle à l'infini; c'est un polynome qui est du premier degré si $\frac{\varphi(t)}{t}$ a une limite finie. Cette limite ne peut d'ailleurs être infinie, sinon on obtiendrait l'axe des u, $z = z' = 0$. En définitive,

$$\varphi(t) = A + Bt, \qquad u = Az + Bz',$$

la surface (S) est un plan.

Supposons maintenant $C = 1$. L'équation devient

$$(a_1 - a_2)p + (a'_1 - a'_2)q = b_1 - b_2.$$

L'une des différences $a_1 - a_2$, $a'_1 - a'_2$ est différente de zéro, sinon on aurait $b_1 = b_2$ et les points P_1 et P_2 ne seraient pas distincts. Supposons donc $a_1 - a_2 \neq 0$. Posons $\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = \lambda$, $\frac{a'_1 - a'_2}{a_1 - a_2} = \mu$, on a l'équation

$$p + \mu q = \lambda,$$

elle admet la solution particulière λz et, si $f = \lambda z + f_1$, on a

$$p_1 + \mu q_1 = 0, \qquad p_1 = \frac{\partial f_1}{\partial z}, \qquad q_1 = \frac{\partial f_1}{\partial z'}.$$

C'est le déterminant fonctionnel des fonctions f_1 et $z' - \mu z$. Donc

$$f_1 = \varphi(z' - \mu z).$$

La solution générale est donnée par

$$u = \lambda z + \varphi(z' - \mu z).$$

La surface (S) est un cylindre de génératrices parallèles à la droite $P_1 P_2$. Chaque génératrice est donnée par les équations

$$z' - \mu z = t,$$
$$u - \lambda z = \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ désignant une fonction analytique régulière. On verrait comme plus haut que $\varphi(t)$ est un polynome et que $\frac{\varphi(t)}{t}$ a une limite finie pour t infini. Donc $\varphi(t)$ est un binome du premier degré et la surface est un plan.

Appelons *points tangentiellement exceptionnels* les points en lesquels ne passe aucun plan tangent à la surface (S). Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Toute fonction $f(z, z')$ de deux variables complexes z, z', régulière dans les plans des z et des z', admettant trois points tangentiellement exceptionnels alignés est une fonction linéaire de ses variables.

Ce théorème correspond par dualité au théorème de Picard relatif à une fonction de deux variables.

8. Les éléments exceptionnels relatifs à une fonction analytique peuvent être associés quoique de natures différentes et conduisent à des propositions utiles. Le premier exemple nous en est donné par le théorème de Bureau-Miranda qui associe deux valeurs exceptionnelles à un point tangentiellement exceptionnel en établissant que la famille des fonctions holomorphes dépourvues de zéros et dont les dérivées ne prennent pas la valeur *un* est normale. Si l'on remplace le point (1, 1) à l'infini par l'origine, la condition $f'(z) \neq 1$ devient $f(z) - zf'(z) \neq 0$ et le résultat est le même d'après un théorème de M. Chi Tai Chuang [3].

---

[3] *Cf.* Chi Tai Chuang, *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 1930.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins
155169

Imprimé en France.

CENTRE D'ÉTUDES MATHÉMATIQUES EN VUE DES APPLICATIONS

(Institut Henri POINCARÉ)

I. - MONOGRAPHIES

A. Applications des théories Mathématiques :

FORTET (R.). — *Éléments de calcul des Probabilités* ..... 1 200 F

PETIAU (G.). — *La théorie des Fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la Physique mathématique* (relié plein pellior rouge) ..... 2 500 F

DUMAS (M.). — *Les Épreuves sur échantillon* (relié plein pellior rouge) ..... 1 000 F

C. Physique Mathématique :

DESTOUCHES (J.-L.). — *Principes de la Mécanique classique* ..... 350 F

VOGEL (Th.). — *Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la Physique Mathématique* ..... 1 200 F

II. - LE FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES A L'USAGE DES PHYSICIENS ET DES INGÉNIEURS

rédigé par les membres du Centre d'Études Mathématiques en vue des applications

(*Sous la direction de* M. le Professeur FRÉCHET)

Fascicule VII. — *Équations aux dérivées partielles* ..... 800 F

Fascicule IX. — *Fonctions de la Physique mathématique* ..... 800 F

Fascicule XII. — *Calcul des probabilités* ..... 600 F

Le Formulaire de Mathématiques comprendra 13 fascicules.

III. - COLLOQUES INTERNATIONAUX

Derniers parus :

LXIII. *Les botanistes français en Amérique du Nord avant 1850* ..... 2 400 F

LXIX. *Chimie et Biochimie des Hétérocycles oxygénés* ..... 2 500 F

LXVII. *Microphysiologie comparée des éléments excitables* ..... 2 500 F

NOTA : *Le Catalogue général* — dont ce qui précède est un extrait — est envoyé sur demande.

Renseignements et Vente au

SERVICE DES PUBLICATIONS DU *C. N. R. S.*

(3e Bureau)

13, Quai Anatole-France - PARIS (VIIe) — C. C. P. Paris 9061-11 — Téléphone : INV 45-95

SOMMAIRE

FASCICULE N° 3

Pag

Sur les anneaux premiers nœthériens à gauche, par MM. *L. Lesieur* et *R. Croisot*..... 1

Aspects mathématiques de la théorie unitaire du champ d'Einstein, par Mme *F. Maurer-Tison*..... 1

Éléments exceptionnels des fonctions analytiques, par M. *Paul Montel*..... 2

TARIF D'ABONNEMENT D'UN AN POUR 1960

AUX

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Paris	70 NF
Départements et Union Française	75 NF
Étranger	$ 23,47

(ou valeur correspondante en francs)

GAUTHIER-VILLARS, Éditeur-Imprimeur-Libraire, 55, q. des Grands-Augustins, PARIS (6e)

LECLERCQ (René), Ingénieur Civil, Directeur de Recherches à l'Union Chimique Belge. — **La Création Scientifique Complément au Guide théorique et pratique de la recherche expérimentale.** In-8 (16-25) VII-86 pages, 1959..... 950 F

LEFEBVRE (Éloi), Docteur ès sciences, Docteur ès lettres. — **Structure et objet de l'analyse mathématique.** In-8 (16-25), 284 pages; 1958..... 3 500 F

ROBIN (Louis), Ingénieur en Chef des Télécommunications. — **Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales** (Collection Technique et Scientifique du C. N. E. T.). In-8 (16-25) :

Tome I.	— Préface de M. H. VILLAT : XXXV-202 pages; 1957. Broché...	4 000 F.	Cartonné...	4 300 F
Tome II.	— VIII-384 pages, 34 figures; 1958. Broché.....	5 000 F.	Cartonné.....	5 300 F
Tome III.	— VIII-289 pages, 10 figures; 1959. Broché.....	5 500 F.	Cartonné.....	6 000 F

La reproduction par tous procédés est interdite.

L'Imprimerie Gauthier-Villars se réserve le droit de fournir les microfilms des volumes épuisés.

155169-59 Dépôt légal. — 1959. — Numéro d'ordre 1343. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Dépôt légal. — 1959. — Numéro d'ordre 831. — *Gauthier-Villars*, éditeur, Paris.

Imprimé en France

La Gérante : P. GAUTHIER-VILLA

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SEIZIÈME — ANNÉE 1959

FASCICULE N° 4
(OCTOBRE A DÉCEMBRE)

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1959

(Ce recueil paraît tous les trois mois.)

ÉDITIONS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

I. — *PUBLICATIONS PÉRIODIQUES*

LE BULLETIN SIGNALÉTIQUE

ABONNEMENT ANNUEL
(Y compris la table des auteurs)

	France.	Étranger.
PREMIÈRE PARTIE. — *Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences de l'Ingénieur* ..	10 000 F	12 000 F
DEUXIÈME PARTIE. — *Biologie, Physiologie, Zoologie, Agriculture*	10 000 F	12 000 F

Des Tirés à part sont également mis en vente par abonnement.

Pour tous renseignements s'adresser au
CENTRE DE DOCUMENTATION du C. N. R. S.
16, rue Pierre-Curie, PARIS-V^e^ — Tél. : DANton 87-20
C. C. P. Paris 9131-62

II. — *OUVRAGES*

ALLOITEAU (J.). — *Contribution à la systématique des Madréporaires Fossiles.*
Ouvrage relié au format 21-27, comprenant :

un volume de textes de 464 pages..... 4 500 F
— de planches de 107 pages..... 4 700 F

LEXIQUE STRATIGRAPHIQUE INTERNATIONAL réalisé en 7 volumes et plus de 125 fascicules.
Demander les renseignements spéciaux aux Éditions du C. N. R. S., 13, quai A.-France, Paris-7^e^

NAHMIAS. — *Le neutrino*..... 240 F

GRIVET. — *La résonance paramagnétique nucléaire* ..... 1 800 F

TERROINE. — *La Synthèse protéique*..... 3 200 F

ROSE & TREGOUBOFF. — *Manuel de Planctonologie méditerranéenne.*
Ouvrage format 21-27 relié, comprenant :

un volume de textes de 592 pages.....
— d'illustrations de 225 pages..... } 7 500 F

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 76, 1959, p. 283 à 304.

UN THÉORÈME SUR LES CORPS CONVEXES

Par M. André MARCHAUD.

INTRODUCTION.

Dans son ouvrage bien connu : *Kreis und Kugel,* M. Blaschke a montré que si la surface frontière d'un corps convexe — surface supposée régulière, analytique et à courbures différentes de zéro — est touchée par chaque cylindre circonscrit suivant une courbe plane, c'est un ellipsoïde. Il est remarquable que la conclusion subsiste pour un corps convexe absolument quelconque, et même si l'on suppose seulement que, pour chaque cylindre circonscrit, la zone de contact avec le corps contient une section plane au moins de la frontière de celui-ci. La convexité étant une propriété projective, il revient au même de considérer les cônes circonscrits dont les sommets décrivent un plan fixe extérieur au corps convexe. Mais n'obtiendrait-on pas encore des résultats intéressants lorsque le plan lieu des sommets des cônes circonscrits touche le corps ou le traverse? La réponse est affirmative et peut se résumer dans le théorème suivant :

Soient un plan fixe, situé à distance finie ou infinie, et un corps convexe borné tel que, pour tout point à la fois dans le plan et extérieur au corps convexe, la zone de contact du cône (ou cylindre) *circonscrit ayant pour sommet ce point contienne au moins une section plane de la frontière du corps.*

1° *Si le plan est extérieur au corps ou le touche en un seul point, la frontière du corps convexe est un ellipsoïde.*

2° *Si le plan traverse le corps, la frontière est soit un ellipsoïde, soit deux calottes de quadriques convexes situées de part et d'autre du plan, le long duquel elles se raccordent et se touchent, l'une au moins de ces calottes appartient à un ellipsoïde, l'autre pouvant se réduire à un cône limité à son sommet et au plan.*

3° *Si le plan touche le corps en plus d'un point, la frontière est une calotte de quadrique convexe complétée par un disque elliptique situé dans le plan, ou bien le corps est un morceau de cône convexe (plein) absolument quelconque, limité à son sommet et au plan.*

Il était bien évident *a priori* qu'un solide conique reposant sur le plan par sa base satisfait aux conditions de l'énoncé.

Remarquons encore que, la convexité étant projective, l'hypothèse suivant laquelle le corps est borné n'est nullement nécessaire. Mais dans ce cas, auquel on peut toujours se ramener par une transformation homographique convenable, les conclusions s'expriment à mon avis d'une manière concrète plus sensible.

C'est à l'occasion de Leçons professées à l'Université de Liège en 1948 que j'ai énoncé pour la première fois le théorème précédent et donné l'esquisse d'une démonstration. Les lourdes charges administratives qui m'incombaient jusqu'à une date récente ne m'avaient pas laissé le loisir d'en faire l'objet d'un Mémoire écrit. C'est pourquoi je suis reconnaissant à M. Paul Montel de m'avoir demandé le présent travail pour les *Annales de l'École Normale Supérieure*. Les démonstrations qu'on y trouvera sont sensiblement plus simples et plus brèves que celles de 1948. Elles utilisent certaines propriétés particulières des ovales, d'ailleurs intéressantes en elles-mêmes qui seront établies dans la première partie. La seconde partie sera consacrée à la démonstration du théorème. On y trouvera *in fine* quelques remarques sur sa transformation par dualité.

PREMIÈRE PARTIE.

Domaines convexes a deux dimensions. Ovales.

1. Les domaines convexes plans possèdent des propriétés intuitives considérées parfois comme évidentes. Je crois utile d'établir brièvement celles qui interviendront dans les énoncés et les démonstrations.

Suivant la définition la plus couramment adoptée, un ensemble C du plan euclidien est dit *convexe* s'il est borné, fermé et contient le segment joignant deux quelconques de ses points. C est à deux dimensions si aucune droite ne le contient tout entier. Il possède alors des points intérieurs. La frontière C^* (1) de C est une courbe simple (fermée) de Jordan. Soient, en effet ω un point intérieur de C et Γ une circonférence extérieure à C et centrée en ω. A chaque point μ de Γ correspond sur le segment $\omega\mu$ un point m de C^* et un seul, Comme d'autre part toute frontière est un ensemble fermé, la correspondance biunivoque μ-m est bicontinue. La frontière C^* est par définition un *ovale*. Il est immédiat que si C^* possède des arcs partiels rectilignes, ceux-ci sont dénombrables.

(1) Dans tout ce travail, je désignerai systématiquement toute frontière par une lettre étoilée.

Un point du plan est dit intérieur ou extérieur à C^* suivant qu'il est point intérieur de C ou bien qu'il lui est extérieur, c'est-à-dire étranger, puisque C est fermé.

2. Droites d'appui. — Une droite d'appui à C (ou à C^*) est, par définition, toute droite non extérieure à C ne pénétrant pas à son intérieur. La partie commune à une droite d'appui et à C est nécessairement sur C^*; c'est un point unique ou un segment. Il est immédiat que C est d'un même côté (au sens large) de toute droite d'appui et aussi que toute droite d'accummulation d'une suite de droites d'appui est elle-même une droite d'appui. Remarquons également que toute droite contenant trois points de C^* est nécessairement une droite d'appui.

Par tout point o extérieur à C, on peut lui mener deux droites d'appui. Si o est à l'infini, il suffit pour le voir de projeter C parallèlement à la direction de o sur une droite non parallèle. Supposons le point à distance finie. Lorsque un point variable m parcourt C, la borne inférieure de la distance om est atteinte pour au moins un point m', situé nécessairement sur C^*. Soit alors D la perpendiculaire à om' passant par m'. Il est visible que C est (au sens large) du côté opposé à o par rapport à D. Autrement C aurait des points intérieurs au cercle de centre o, passant par m'. C étant borné, sa perspective, faite de o sur D, l'est également: c'est un segment. Les deux droites joignant o aux extrémités de ce segment sont les droites d'appui issues de o.

Comme tout point de C^* est limite de points extérieurs, il en résulte l'existence d'une droite d'appui, au moins, passant par ce point. Lorsque cette droite d'appui n'est pas unique, il en existe une infinité, C est contenu dans un angle non plat; le point considéré est une *pointe*. Il est bien connu que les pointes, si elles existent, sont dénombrables. On trouvera en passant une démonstration de cette propriété au n° 5.

Remarquons enfin que, lorsqu'elle est unique en un point, la droite d'appui est la tangente à C^*. Soient, en effet, T *la* droite d'appui en un point m, et T_1 une droite d'accumulation de sécantes mm', où le point m' de C^* tend vers m. Si T_1 était différente de T, elle contiendrait des points intérieurs de C et couperait C^* en un second point m_1, et la distance mm' qui tend vers zéro serait voisine de mm_1.

3. Quasi-polaires. — Soient z_1 et z_2, respectivement les zones communes à C^* et aux droites d'appui issues d'un point donné o (à distance finie ou infinie) extérieur à C. J'appellerai *quasi-polaire* de o par rapport à C^* toute droite contenant un point de z_1, et un point de de z_2. Lorsque o n'est sur aucune des droites supports des arcs partiels rectilignes, que peut éventuellement posséder C^*, sa quasi-polaire est unique.

4. Comme on sait, les considérations précédentes peuvent être envisagées d'un point de vue projectif. Soient Δ une droite fixe extérieure à C et un couple

quelconque (m_1, m_2) de points de C. Désignons par μ la trace de la droite $m_1 m_2$ sur Δ. Il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point m soit intérieur au segment $m_1 m_2$ est que le rapport anharmonique $(m_1 m_2 m \mu)$ soit négatif. En effet, μ étant extérieur à C est extérieur au segment m_1, m_2, le rapport $\frac{\mu m_1}{\mu m_2}$ est positif. On est ainsi conduit à une définition projective : un ensemble C du plan complété par la droite de l'infini, est convexe au sens projectif, s'il est projectivement fermé, sans point sur une certaine droite Δ, telle que pour tout couple $(m_1 m_2)$ de points de l'ensemble, les points m de la droite $m_1 m_2$ en font également partie, qui rendent négatif le rapport anharmonique $(m_1 m_2 m \mu)$, où μ désigne la trace de la droite $m_1 m_2$ sur Δ. Bien entendu C* n'est plus nécessairement borné. Dans tous les cas on appellera ovale, la frontière d'un ensemble convexe non linéaire. La définition initiale n'est autre que cette dernière quand Δ est la droite de l'infini.

Il résulte de ce qui précède que toute homographie transforme un domaine convexe en un domaine convexe, les points : intérieurs, extérieurs, frontière, conservant leurs natures respectives et aussi par conséquent les droites d'appui et les quasi-polaires. Toute propriété projective pourra être établie dans un cas particulier pourvu qu'on puisse y ramener les données par une homographie convenable (²).

5. Nous abordons maintenant l'étude des propositions préparatoires à la démonstration du théorème, objet de ce Mémoire. La première concerne les relations entre deux ovales tels que pour tout point d'une droite extérieure à chacun d'eux, ils possèdent au moins une quasi-polaire commune. En vertu de la remarque qui vient d'être faite on pourra supposer la droite à l'infini,

Soient C un domaine convexe (borné) à deux dimensions et sa frontière l'ovale C* . Orientons le plan au moyen de deux axes rectangulaires (ox, oy) et considérons une demi-droite variable oa, définie par l'angle $(ox, oa) = \alpha$. A chaque demi-droite oa correspondent deux droites d'appui : T et T′, qui lui sont parallèles. Nous choisirons les notations de manière que T′ soit, par rapport à T, dans le demi-plan défini par la direction $\alpha + \frac{\pi}{2}$. La droite T touche C* suivant un point ou un segment. Dans ce cas, qui se produit pour un ensemble au plus dénombrable de positions de oa (n° 1), on désignera les extrémités du segment par l et m de façon que le vecteur $\overrightarrow{lm}$ soit de même sens que la demi-droite oa. Lorsque le contact a lieu suivant un seul point, l et m sont confondus. Ainsi : à chaque

(²) Les ovales sont les courbes du second ordre (au sens large) de la Géométrie finie. Les droites d'appui à C*, par exemple, sont les tangentes à C* (une tangente étant toute droite d'accumulation de sécantes joignant deux points qui tendent vers le point considéré). J'ai préféré m'en tenir au point de vue adopté dans le texte, qui présente l'avantage de ne réclamer aucune connaissance particulière.

demi-droite oa, de direction α, correspond un vecteur lié bien déterminé $\overrightarrow{lm}$, nul ou non. De même T′ touche C* suivant un vecteur $\overrightarrow{l'm'}$, lequel correspond à $\alpha+\pi$.

Soient alors α_0 une valeur fixe et α_0+h une valeur voisine ($h>0$). C est compris entre les droites T_0 et T'_0 et aussi entre T et T′. On en déduit que $\overrightarrow{lm}$ se trouve dans l'angle de sommet m_0 dont les côtés sont respectivement parallèles à oa_0 et oa. Il en résulte que $\overrightarrow{lm}$ tend vers m_0 quand h tend vers zéro, car C n'a pas de point sur T_0 en dehors de $l_0 m_0$. Pour la même raison, $\overrightarrow{l'm'}$ tend vers m'_0. Il peut arriver que $\overrightarrow{lm}$, par exemple, soit confondu avec m_0 pour h assez petit. Ceci se produira si m_0 est une pointe. En faisant tourner oa d'un angle 2π, on voit que les pointes, si elles existent, sont dénombrables. On trouve ici la démonstration annoncée au n° 2.

Considérons une quasi-polaire du point à l'infini dans la direction oa c'est-à-dire une droite rencontrant $\overrightarrow{lm}$ et $\overrightarrow{l'm'}$. Il résulte de ce qui précède qu'elle tend vers une limite unique $m_0 m'_0$ quand h tend vers zéro.

6. Donnons-nous maintenant un second domaine convexe (borné) à deux dimensions Γ de frontière Γ*, et supposons que pour tout point à l'infini, C* et Γ*, aient au moins une quasi-polaire commune. Opérons sur Γ et Γ* comme sur C et C*, et désignons par λ, μ, λ', μ'; λ_0, μ_0, λ'_0, μ'_0, respectivement les points homologues de l, m, l', m', l_0, m_0, l'_0, m'_0. On déduit immédiatement de l'hypohèse relative aux quasi-polaires et d'une remarque faite à l'instant que les point m, m' μ, μ', sont alignés quel que soit oa. En donnant à α un accroissement négatif on verrait qu'il en est de même de l, l', λ, λ',

Je vais compléter ce résultat en montrant que le rapport $\rho=\dfrac{\overrightarrow{m\mu}}{\overrightarrow{mm'}}=\dfrac{\overrightarrow{l\lambda}}{\overrightarrow{ll'}}$ reste constant quand α varie. L'accroissement h étant d'abord supposé positif et voisin de zéro, évaluons la différence $\rho-\rho_0=\dfrac{\overrightarrow{m\mu}}{\overrightarrow{mm'}}-\dfrac{\overrightarrow{m_0\mu_0}}{\overrightarrow{m_0m'_0}}$. Pour cela projetons parallèlement à T_0 les points m, m', μ, respectivement en n,n', ν', sur la droite $m_0m'_0$. On a

$$\rho-\rho_0=\frac{\overrightarrow{n\nu}}{\overrightarrow{nn'}}-\frac{\overrightarrow{m_0\mu_0}}{\overrightarrow{m_0m'_0}}.$$

Un calcul élémentaire va nous permettre de limiter supérieurement $\left|\overrightarrow{m_0n}\right|$, $\left|\overrightarrow{m'_0n'}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mu_0\nu}\right|$, en fonction de h et de l'angle ε des droites mm' et $m_0m'_0$, qui, on l'a vu plus haut tend vers zéro avec h, s'il n'est pas nul, Il suffira de considérer $\left|\overrightarrow{m_0n}\right|$, par exemple. Si m est en m_0, le module en question est nul. Dans

le cas contraire, la droite mm' coupe $m_0m'_0$ en un point i, distinct de m_0 et intérieur au sens large au segment $m_0m'_0$. Désignons par r et s, respectivement les intersections de la droite mm' avec T_0 et la parallèle à oa, menée par m_0, et par u la projection de s sur $m_0m'_0$, parallèlement à T_0. Le point m est entre r et s, $\left|\overrightarrow{m_0n}\right|$ est donc au plus égal à m_0u, Or, on a dans le triangle im_0r :

$$\frac{um_0}{sr} = \frac{im_0}{ir}, \qquad \frac{m_0r}{\sin\varepsilon} = \frac{ir}{\sin\varphi_0},$$

où φ_0 désigne l'angle des droites T_0 et $m_0m'_0$. Le sinus de cet angle est différent de zéro. D'autre part on écrit, dans le triangle m_0sr :

$$\frac{sr}{\sin h} = \frac{m_0r}{\sin(\varphi_0 - h + \varepsilon)}.$$

Les trois dernières relations donnent

$$um_0 = im_0 \frac{\sin h \sin\varepsilon}{\sin\varphi_0 \sin(\varphi_0 - h + \varepsilon)}$$

et, par suite

$$\left|\overrightarrow{m_0n}\right| < m_0m'_0 \frac{h\varepsilon}{\sin\varphi_0 \sin(\varphi_0 - h + \varepsilon)}$$

On voit alors que pour h assez petit, on peut borner $\left|\overrightarrow{m_0n}\right|$, $\left|\overrightarrow{m'_0n'}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mu_0\varphi}\right|$, par une même expression $\frac{1}{2}Kh\varepsilon$, où K désigne une constante positive. La différence $\rho - \rho_0$ pourra donc se mettre sous la forme $\frac{p + \theta Kh\varepsilon}{q + \theta' Kh\varepsilon} - \frac{p}{q}$, où p et q sont des constantes, la seconde différente de zéro, et θ et θ' des nombres de modules au plus égaux à l'unité. Il en résulte que $\frac{\rho - \rho_0}{h}$ tend vers zéro avec h, puisqu'il en est ainsi de ε. De la même manière on verrait que la dérivée à gauche est nulle, en considérant cette fois $\frac{\overrightarrow{ll_1}}{\overrightarrow{ll}}$. En définitive nous pouvons affirmer que :

1° Les points m, m', μ, μ', d'une part et l, l', λ, λ' d'autre part sont alignés quel que soit oa;

2° Le rapport $\frac{\overrightarrow{m\mu}}{\overrightarrow{mm'}} = \frac{\overrightarrow{l\lambda}}{\overrightarrow{ll'}}$ est constant.

De cette dernière propriété on déduit immédiatement que C^* et Γ^* ne peuvent avoir un seul point commun sans être confondus.

Supposons C^* et Γ^* distincts et remplaçons α par $\alpha + \pi$. Les points m et m' s'échangent et μ est remplacé par μ'. L'invariance de ρ montre que $\overrightarrow{m\mu} + \overrightarrow{m'\mu'} = 0$. Autrement dit : les couples de droites d'appui à C^* et Γ^*, issues d'un même point à l'infini ont même médiatrice.

En se reportant à la méthode suivie, on voit tout de suite que la dernière relation reste valable si Γ se réduit à un point ω.

Un autre cas particulier remarquable est celui où C^* et Γ^* étant des ovales, il existe un point fixe ω tel que pour chaque point à l'infini celle des quasi-polaires, supposée commune aux deux ovales, passe par ω. C^* et Γ^* sont alors homothétiques par rapport à ω, et concentriques.

Tous les résultats qui viennent d'être obtenus se formulent d'une manière projective dans le

LEMME I. — 1° *Si pour tout point d'une droite fixe extérieure à un ovale, il existe une quasi-polaire (au moins) passant par un point fixe, ce point est intérieur à l'ovale, qui est invariant par l'homologie involutive ayant pour pôle le point fixe et pour axe la droite.*

2° *Si pour tout point d'une droite extérieure à deux ovales ceux-ci ont au moins une quasi-polaire commune* :

a. les deux ovales ne peuvent avoir un point commun sans être confondus;

b. si pour un point de la droite donnée la quasi-polaire est unique pour un des ovales, elle est unique pour l'autre;

c. la droite donnée a même conjuguée harmonique par rapport aux deux couples de droites d'appui (aux deux ovales) issues d'un quelconque de ses points;

d. plus particulièrement, si la quasi-polaire commune visée à l'hypothèse, passe par un point fixe, l'un des ovales est transformé de l'autre par une homologie ayant pour pôle le point fixe et pour axe la droite.

De la première partie de ce lemme on déduit facilement un corollaire dont nous aurons également à faire usage.

7. COROLLAIRE. — *Si à chaque droite extérieure à un ovale et passant par un point fixe, correspond un point contenant une quasi-polaire de tout point de la droite considérée, l'ovale est une conique.*

Soient C^* l'ovale et o le point commun aux droites Δ considérées. Je vais d'abord montrer que la quasi-polaire de o est unique. Supposons, ce qui est permis, C^* borné et o à l'infini. Désignons par A et B les droites d'appui issues de o, et par ω et ω_0 les points correspondant à deux droites Δ et Δ_0 passant par o. Ces points sont distincts, la droite qui les joint coupe A et B en a et b, situés à distance finie. Si la droite $\omega\omega_0$ était parallèle à A et B elle couperait C^* en deux points symétriques par rapport à ω et à ω_0, ce qui est impossible. Si la quasi-polaire de o n'était pas unique, A, par exemple, contiendrait un point a_1 de C^* distinct de a. Choisissons les notations de façon que ω_0 soit plus près de a que ω. Il résulte, des hypothèses que l'intersection de la droite $a_1\omega_0$ avec B, soit b' est sur C^* et de même, que l'intersection, soit a_2, de la droite $b'\omega$ avec A est encore sur l'ovale. Le rapport $\frac{aa_2}{aa_1}$ est indépendant

de a_1 et supérieur à l'unité. En répétant indéfiniment l'opération on obtiendrait sur A des points de C* aussi éloignés de a qu'on voudra, ce qui est incompatible avec l'hypothèse C* borné. La démonstration s'achèvera aisément. Laissons fixe le point ω_0 et désignons par m_0 et m'_0 les intersections de C* avec la droite $o\omega_0$. Soit alors m un point quelconque de C* (distinct de m_0 et de m'_0), la droite $m_0 m$ rencontre ab en un point ω auquel correspond la droite Δ, polaire de ω par rapport au système des deux droites A et B. Si δ désigne la trace de la droite $m_0 m$ sur Δ, le rapport anharmonique $(m_0 m \omega \delta)$ est égal à -1, de même que $(m_0 m'_0 \omega_0 o)$. Les droites $\omega\omega_0$ et δo sont concourantes en δ', conjugué harmonique de ω par rapport à ab. La droite $m'_0 m$ passe donc par δ'; les deux faisceaux $m_0 m$ et $m'_0 m$ sont par suite homographiques. Le lieu de m est une conique.

8. Un second lemme concerne les ovales invariants par certaines homologies involutives. D'une manière précise, soient C* un ovale et Δ une droite donnés. Nous allons étudier la nature de C* dans l'hypothèse suivante : à tout point δ, extérieur à C*, et appartenant sur Δ à un ensemble partout dense E, correspond un axe A_δ tel que C* soit invariant par l'homologie involutive $[\delta, A_\delta]$ de pôle δ et d'axe A_δ. Pour cette étude je supposerai C* borné, car dans ce cas (auquel on peut toujours se ramener) les démonstrations sont plus simples et les conclusions plus aisées à formuler d'une manière concrète. Donnons-nous sur Δ un point δ_0, extérieur à C, appartenant ou non à E, et considérons une droite d'appui L, issue de δ_0 et distincte de Δ (le cas où C* touche Δ n'étant pas exclu). Je vais d'abord montrer que L touche C* en un point unique et qu'il existe un axe A_{δ_0}, bien déterminé et passant par ce point, tel que l'homologie involutive $[\delta_0, A_{\delta_0}]$ laisse C* invariant. Je supposerai, ce qui est permis, Δ à distance finie.

Admettons que L touche suivant un segment mn, il faut prouver que cette hypothèse conduit à une contradiction. Pour cela menons par δ_0 deux sécantes L_1 et L_2 pénétrant à l'intérieur de C* et désignons leur intersections avec l'ovale par m_1, n_1, et m_2, n_2, les notations étant telles que les points m, m_1, m_2, soient respectivement intérieurs aux segments $\delta_0 n$, $\delta_0 n_1$, $\delta_0 n_2$. Prenons alors sur Δ un point δ de E, situé par rapport à L du côté de C. Les droites δm_1 et δm_2 coupent C*, en dehors de m_1 et m_2, en des points n'_1 et n'_2, qui tendent vers n_1 et n_2 quand δ tend vers δ_0. L'axe A_δ est la polaire de δ par rapport au système des deux droites $[m_1 m_2, n'_1 n'_2]$. Quand δ tend vers δ_0, cette polaire tend vers celle des deux droites $[m_1 m_2, n_1 n_2]$, soit B_0. L'ovale C* est invariant par l'homologie involutive $[\delta_0, B_0]$. D'autre part, il résulte de la position de δ par rapport à C, que le transformé m' de m par $[\delta, A_\delta]$ est sur le segment δm. L'axe B_0 coupe alors L en un point du segment $\delta_0 m$, ce qui est impossible. Il faut donc que L touche C* en un seul point. L'axe A_{δ_0}, qui n'est autre que B_0, passe par ce point.

9. Pour aller plus loin, il nous faut distinguer plusieurs cas suivant les positions relatives de C* et de Δ.

1° Δ *est extérieure à* C. — Il sera commode dans ce cas de supposer Δ à l'infini. Nous savons que C* n'a pas de segment. Il est également dépourvu de pointes. S'il en avait une, p, tout point m de l'ovale en serait une, comme on le voit en considérant l'homologie involutive dont le pôle est sur la droite pm. Or les pointes sont dénombrables (n° 5). En chacun de ses points C* possède donc une droite d'appui unique, laquelle touche en un seul point. De plus la droite Δ étant à l'infini, les axes des homologies involutives sont ici des diamètres. Fixons alors un point δ. Le diamètre A_δ rencontre C* aux points de contact a et b des droites d'appui issues de δ. En désignant par δ' le point à l'infini de A_δ, on obtient $A_{\delta'}$, qui coupe C* aux points de contact a' et b' des droites d'appui issues de δ'. Les diamètres A_δ et $A_{\delta'}$ sont conjugués; leur point commun, soit i, est donc un centre pour C*. Donnons-nous sur l'ovale un point m, distinct de a et de b. La conique $\mathcal{C}$, tangente en a et b aux droites d'appui en ces points, et passant par m, y admet pour tangente la droite d'appui à C*. Celle-ci, en effet, est la transformée de la droite d'appui en a par $[\delta'', A_{\delta''}]$, où δ'' désigne le point à l'infini de am, et $A_{\delta''}$ est déterminé par i et le milieu du segment am. La tangente à $\mathcal{C}$ en m s'obtient par la même construction. En plaçant m en a', on voit que les quatre points a, a', b, b', sont sur une même conique Γ, qui touche C* en ces points. Je dis que C* est confondu avec Γ. Supposons qu'un point m de C* ne soit pas sur Γ. Il suffira de constater que cette hypothèse conduit à une contradiction. Considérons la trace ω de la tangente en m à $\mathcal{C}$ sur la polaire M de m par rapport à Γ. Ce point est commun aux polaires du point fixe m par rapport aux coniques du faisceau défini par $\mathcal{C}$ et Γ. Il est donc sur la droite ab. De même la tangente en m à la conique $\mathcal{C}'$, passant par ce point et touchant en a' et b' les droites d'appui en ces points, rencontre M en un point ω' de la droite $a'b'$. Mais ces tangentres en m à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont confondues. Ceci exige que ω et ω' le soient, et nécessairement en i. Comme m n'est pas sur la polaire de i par rapport à Γ, M ne peut passer par i. Nous aboutissons à la contradiction annoncée; C* est donc confondu avec Γ.

10. Examinons maintenant le cas :

2° Δ *touche* C* *en un point unique* α. — Supposons encore (ce qui est permis C* borné). Ici encore l'ovale, qui n'a pas de segment est sans pointes. Le raisonnement utilisé pour le prouver dans le cas précédent est valable, car une sécante joignant deux points de C* ne peut passer par α (elle toucherait C* suivant un segment, n° 2).

Soient alors a un point fixe de C* (distinct de α) et T la droite d'appui en ce point. La droite d'appui en un point m de C* (autre que a et α) est la tangente en m à la conique $\mathcal{C}$, passant par m et tangente à T et Δ en a et α. Il suffit pour le voir de considérer A_δ où δ est la trace de la droite am sur Δ. A_δ est déterminé par α et le conjugué harmonique de δ par rapport au couple (a, m). Désignons par Γ ce que devient $\mathcal{C}$ quand on place m en un second point fixe a', où la droite

d'appui est T′. Appelons enfin $\mathcal{C}'$ la conique analogue à $\mathcal{C}$, mais tangente à T′ en a'. La tangente en m à $\mathcal{C}'$ est elle aussi la droite d'appui à C*. Un raisonnement semblable à celui développé au numéro précédent montre que C* est confondu avec Γ. La seule différence est qu'ici les points ω et ω′, étant respectivement sur αa et $\alpha a'$, ne pourraient être confondus qu'en α, ce qui est impossible car m n'étant pas sur Δ, M ne peut passer par α.

11. Il reste à examiner le cas où Δ touche C* suivant un segment ou le traverse. Comme on le verra, le second peut se déduire du premier. Plaçons-nous dans l'hypothèse :

3° Δ *touche* C* *suivant un segment.* — Désignons par α et α′ les extrémités du segment. Tout triangle $p\alpha\alpha'$, possède la propriété que nous prêtons à C*. L'ovale n'est donc pas certainement dépourvu de pointe (ni de segment en plus de $\alpha\alpha'$). Je vais montrer que si C* possède une pointe p extérieur à Δ, il se réduit au triangle $p\alpha\alpha'$. Considérons le segment $p\alpha$, par exemple, il s'agit de voir qu'il est sur C*. Le segment $p\alpha$ appartient à C. S'il contenait un point intérieur, ce point i, serait entre p et α, et l'on pourrait mener par p une infinité non dénombrable de sécantes coupant Δ à l'extérieur de C*, ce qui donnerait une infinité non dénombrable de pointes, éventualité impossible. Nous écarterons le cas banal du triangle. Donnons-nous sur C*, en dehors de Δ, un point fixe a. La droite d'appui en a, soit T, est unique et coupe Δ à l'extérieur du segment $\alpha\alpha'$. La droite d'appui en un point m de C*, pris en dehors de a, et α, est la tangente en m à la conique $\mathcal{C}$ déterminée par les points m, α, α′, a et sa tangente T en ce dernier point. En effet, considérons la trace $\hat{o}$, de la droite am sur Δ. Les points a et m étant d'un même côté de Δ, le point est extérieur au segment am donc de C*. L'axe $A_{\hat{o}}$ est déterminé par les conjugués harmoniques de $\hat{o}$ par rapport aux couples (a, m) et (α, α'). La transformée de T par l'homologie involutive $[\hat{o}, A_{\hat{o}}]$ est à la fois la droite d'appui en m et la tangente à $\mathcal{C}$. Comme plus haut désignons par Γ ce que devient $\mathcal{C}$ quand on place m en un second point fixe a'. La démonstration se poursuit de la même manière jusqu'au moment où il faut vérifier que les points ω et ω′ sont distincts. Soit u le point commun à T et T′, les polaires de m par rapport aux coniques dégénérées [T, Δ] et [T′, Δ] se croisent en un point v de mu. Les points ω et ω′ ne pourraient être confondus qu'en v ce qui impliquerait trois droites d'appui à C*, issues de u. En définitive nous pouvons affirmer que si C* n'est pas un triangle c'est un arc de conique d'extrémités sur Δ, complété par sa corde. La conique n'est pas forcément une ellipse. Pour terminer remarquons que, dans tous les cas, l'axe $A_{\hat{o}}$ passe par un point fixe extérieur à Δ. Lorsque C* est un triangle, ce point est le sommet non situé sur Δ, dans le cas contraire, c'est le pôle de Δ par rapport à Γ.

12. Nous arrivons à la dernière disposition :

4° Δ *traverse* C. — Soient α et α′ les points d'intersection de C* avec Δ. Ils

partagent C^* en deux arcs C_1^* et C_2^*, situés de part et d'autre de Δ, et qui, complétés par le segment $\alpha\alpha'$, constituent deux ovales auxquels s'appliquent les résultats du numéro précédent. A chacun d'eux correspond un point fixe, extérieur à Δ, par lequel passe A_δ, quel que soit δ. Ces deux points sont nécessairement confondus, sans quoi A_δ serait fixe quand δ varie. Or, il doit passer par le conjugué harmonique de δ par rapport à α et α'. On en déduit que C^* est la somme des deux arcs de coniques, situés de part et d'autre de Δ, ces arcs ayant mêmes tangentes en leurs points situés sur Δ, ou bien un système de deux segments de même origine extérieure à Δ et d'extrémités sur cette droite, complété par un arc de conique situé de l'autre côté de Δ et tangent aux supports des deux segments. Bien entendu, lorsque C^* n'a pas de pointe, les deux coniques peuvent être confondues — nécessairement suivant une ellipse. On voit d'ailleurs aisément que C^* contient dans tous les cas un arc d'ellipse.

Les résultats obtenus depuis le n° 8 constituent le

LEMME II. — *Soient un ovale borné et une droite donnée à distance finie ou infinie, telle qu'à chacun de ses points pris à l'extérieur de l'ovale et sur un un ensemble donné partout dense, corresponde une homologie involutive, ayant pour pôle le point considéré, qui laisse invariant l'ovale.*

1° *Si la droite lui est extérieure, ou le touche en un seul point, l'ovale est une ellipse.*

2° *Si la droite le traverse, l'ovale peut être :*

a. une ellipse;

b. la somme de deux arcs de coniques (dont l'une au moins est une ellipse) situés de part et d'autre de la droite et se raccordant sur celle-ci avec tangentes communes;

c. un système de deux segments de même origine dont les extrémités sont sur la droite, complété par un arc d'ellipse situé de l'autre côté et se raccordant sans pointes avec les segments;

3° *Si l'ovale est touché par la droite en plus d'un point, c'est un arc de conique complété par sa corde (située sur la droite), ou bien un triangle reposant sur la droite par un de ses côtés.*

Comme on l'avait remarqué au début, il n'est pas indispensable de supposer l'ovale borné, à condition de modifier les conclusions d'une manière convenable.

13. Le troisième et dernier lemme est relatif aux ovales possédant la même propriété de réciprocité que les polaires d'une conique. D'une manière précise : soit C^* un ovale *dépourvu d'arcs partiels rectilignes;* la quasi-polaire d'un point extérieur quelconque est unique. Je suppose que si un point α' est sur la quasi-polaire de α, la quasi-polaire de α' passe par α, et ceci quels que soient α et α'. Nous allons voir que C^* est une conique. Je ferai la démonstration dans le cas

où C* est borné. Pour simplifier l'écriture, les quasi-polaires de points α, α', ... seront représentées par P_α, $P_{\alpha'}$, ...

Remarquons d'abord que C* n'a pas de pointes. Supposons qu'il en ait une et considérons deux droites d'appui T et T_1 qui s'y croisent. Par un point α de T menons à l'ovale la seconde droite d'appui et désignons par α_1 son point de rencontre avec T_1. Les deux points α et α_1 ont la même quasi-polaire. Il faudrait que $P_{\alpha'}$ passe par α et α_1 quel que soit α', pris à l'extérieur de C*, sur P_α, ce qui est manifestement impossible.

14. Pour prouver que C* est bien une conique (ici une ellipse) j'établirai d'abord que la quasi-polaire P_α de tout point à l'infini α partage C* en deux arcs en affinité, d'axe P_α et ensuite que cette affinité est une symétrie oblique. Il résultera alors du lemme II, première partie, que C* est une ellipse.

Désignons par a et b les points de contact des droites d'appui d'un point donné à l'infini α. La quasi-polaire de α est la droite ab. Soit μ un point intérieur du segment ab. Ce point est intérieur à C* sans quoi ab serait une droite d'appui (n° 2) et le segment ab sur l'ovale, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le point μ étant intérieur à l'ovale, la droite $\mu\alpha$ coupe C* en deux points m et m', situés de part et d'autre de P_α. Il s'agit de constater que le rapport $\rho = \frac{\mu m}{\mu m'}$ est constant. Les droites d'appui en m et m' sont les tangentes en ces points (n° 2). Elles se rencontrent évidemment sur P_α. Choisissons sur cette droite une origine et un sens positif, et désignons par x l'abscisse de μ. Le rapport ρ est une fonction continue à l'intérieur du segment ab; il est facile de voir que sa dérivée est nulle. Soient m_0 et m'_0 les points correspondant à μ_0 d'abscisse x_0 et ρ_0 la valeur du rapport en ce point. Les sécantes m_0m et m'_0m' se coupent en un point r; la droite m_0r coupe mm' en ν. ρ_0 est égal à $\frac{\nu m}{\nu m'}$, comme $\nu\mu$ est infiniment petit par rapport à $x - x_0$ (puisque la droite $\mu_0 r$ tend vers P_α), il en résulte que $\rho - \rho_0$ est lui-même infiniment petit par rapport à $x - x_0$.

Considérons la quasi-polaire $P_{\alpha'}$ du point à l'infini α' de P_α, et désignons par a' et b' ses points d'intersection avec C*. Les droites d'appui en a et b sont parallèles à $a'b'$. de même que celles en a' et b' sont parallèles à ab. D'autre part, le point o commun à P_α et $P_{\alpha'}$, est intérieur aux segments ab et $a'b'$. Les points a, a', b, b' partagent C* en quatre arcs situés chacun dans un des angles formés par les droites ab et $a'b'$, et qu'on peut désigner sans ambiguïté par leurs extrémités. Les arcs $\widehat{aa'}$ et $\widehat{ab'}$ se correspondent dans une affinité $\mathfrak{A}$, d'axe ab et de direction $a'b'$; de même une affinité $\mathfrak{A}'$, d'axe $a'b'$ et de direction ab, fait correspondre $\widehat{ba'}$ à $\widehat{aa'}$ Ceci précisé, remarquons que la quasi-polaire du point à l'infini α'', de la droite aa', qui passe par le point i commun aux droites d'appui en a et a' est l'axe d'une affinité $\mathfrak{A}''$ qui transforme ia en

aa', et le voisinage de a sur C* dans le voisinage de a'. Mais $\mathcal{A}''$ transforme $\mathcal{A}$ en une affinité qui ne peut être que $\mathcal{A}'$. En effet, sa direction est celle de la droite d'appui en a' et elle transforme le voisinage de a' sur $\widehat{aa'}$ en son voisinage sur $\widehat{ba'}$. Il faut donc que $\mathcal{A}''$ fasse correspondre l'axe ab à l'axe $a'b'$, c'est-à-dire que son axe soit la droite oi.

Cette affinité $\mathcal{A}''$ est par suite une symétrie oblique. L'homologue de b' dans cette transformation est à la fois sur ab et sur C*; il doit donc être confondu avec b. Ceci exige que les droites d'appui en b et b' se coupent sur oi. Autrement dit : le point o est sur l'une des diagonales du parallélogramme construit avec les droites d'appui en a, a', b, b'. Pour la même raison il est sur l'autre. En définitive $\mathcal{A}$ est une symétrie oblique, c'est-à-dire une homologie involutive de pôle à l'infini. Comme α a été choisi arbitrairement, la démonstration est achevée. Elle est valable pour un ovale quelconque et nous pouvons énoncer le

LEMME III. — *Un ovale, dépourvu d'arcs partiels rectilignes, est nécessairement une conique sous la seule condition que la quasi-polaire d'un point, pris sur la quasi-polaire d'un autre point, passe par cet autre, quels que soient les points choisis (à l'extérieur de l'ovale).*

DEUXIÈME PARTIE.

15. Avant d'aborder la démonstration du théorème annoncé, je rappellerai brièvement les définitions et propriétés classiques qui interviendront.

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, un *corps convexe* est un ensemble borné, fermé, non plan, contenant tout segment dont les extrémités appartiennent à l'ensemble. En raisonnant comme au n° 1, on voit que la frontière S* d'un corps convexe S est une surface simple close. La section de S par un plan contenant un point intérieur de S est un disque convexe dont la frontière est la section de S* par le plan. On appelle plan d'appui à S, ou à S*, tout plan contenant au moins un point de S, mais aucun point intérieur. La partie commune à S et à un plan d'appui est toute entière sur S*; c'est un point, un segment ou un disque convexe, appelé *facette* de S*. On dit que le plan *touche* S, ou S*, suivant ce point, segment ou cette facette. En raisonnant sur S* comme au n° 1 sur les ovales, on voit que les facettes, s'il en existe, sont dénombrables. On définit les *droites d'appui* en remplaçant le mot plan, par le mot droite. Toute droite d'appui à une section plane (à deux dimensions) de S, est une droite d'appui de S. La partie commune à S et à une droite d'appui est un point ou un segment de S*

16. CÔNES CIRCONSCRITS. — Nous considérerons un cylindre comme un cône de sommet à l'infini. Dans ces conditions un *cône convexe* sera l'ensemble des

droites joignant les points d'un ovale à un point fixe situé hors de son plan : le sommet du cône. Les droites issues du sommet sont extérieures ou intérieures au cône suivant que leurs traces sur le plan de l'ovale, sont extérieures ou intérieures à celui-ci. Tout plan passant par le sommet et une droite d'appui à l'ovale est un plan d'appui au cône. Il est évident que l'ovale peut être remplacé par la section du cône par un plan quelconque ne contenant pas le sommet.

Soient alors S un solide convexe et o un point qui lui est extérieur. Si o est à l'infini, on voit en projetant S sur un plan fixe parallèlement à la direction de o, que l'ensemble des droites d'appui issues de o est un cylindre convexe, car la projection de S est bornée et satisfait à la condition de convexité. Lorsque le point est à distance finie, les choses sont moins immédiates, car il n'est pas évident qu'on puisse mener par o un plan extérieur à S. Supposons donc o à distance finie. La borne inférieure de la distance de o aux points de S est atteinte pour un point (au moins) soit m_0. L'angle $o\,m_0m$, où m désigne un point quelconque de S, distinct de m_0, ne peut être aigu, sans quoi il y aurait sur le segment m_0m des points plus près de o que m_0. Le corps S est donc (au sens large) du côté opposé à o par rapport au plan R, mené par m_0 perpendiculairement à om_0. La projection de S sur R, faite du point o, est donc bornée. Elle satisfait à la condition de convexité et contient des points intérieurs ; sa frontière est donc un ovale (qui est ici borné, mais le fait n'a aucune importance). Les considérations précédentes conduisent aux conclusions suivantes :

1° L'ensemble des droites d'appui à un corps convexe, issues d'un point extérieur, est un cône convexe : le *cône circonscrit* ayant pour sommet le point ; toute droite passant par ce point est extérieure au corps convexe où pénètre à son intérieur, suivant qu'elle est extérieure ou intérieure au cône circonscrit ;

2° Les plans d'appui issus d'un point extérieur sont les plans d'appui au cône circonscrit ayant pour sommet le point considéré ; d'où il résulte que par toute droite extérieure à un corps convexe on peut lui mener exactement deux plans d'appui.

17. Comme dans le cas du plan, on peut transformer la définition du corps convexe de manière à la rendre projective. On obtient ainsi les domaines convexes à trois dimensions, plus nécessairement bornés. Un domaine convexe à trois dimensions est un ensemble non plan, fermé au sens projectif, sans point commun avec un plan donné Ω et tel que si m_1 et m_2 sont deux points de l'ensemble, tous les points m de la droite m_1m_2 appartiennent à l'ensemble pour lesquels le rapport anharmonique $(m_1m_2m\mu)$ est négatif, μ désignant la trace de la droite m_1m_2 sur le plan Ω. Toutes les notions rappelées jusqu'ici et les propriétés des corps convexes qui s'y rapportent étant projectives, s'appliquent aux domaines convexes à trois dimensions. Je réserverai l'expression corps convexe pour les domaines bornés.

18. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème annoncé. Donnons-nous un corps convexe S et un plan fixe Π, à distance finie ou infinie. Notre hypothèse se réduit à ceci : *pour tout point* μ, *extérieur à* S *et situé dans* Π, *la zone commune à* S^* *et au cône circonscrit de sommet* μ, *contient au moins une section plane de* S^*. Il revient au même de dire qu'à tout point μ, satisfaisant aux conditions précédentes, correspond un plan P_μ, au moins tel que le cône de sommet μ ayant pour directrice la trace de S^* sur P_μ soit le cône circonscrit de sommet μ. J'appellerai P_μ un *plan quasi-polaire* de μ par rapport à S^*. La propriété pour un plan d'être quasi-polaire étant projective, on pourra supposer le plan Π à distance finie, S restant borné. Si Π est le plan à l'infini, il suffira d'opérer une transformation homographique faisant correspondre à un plan donné extérieur à S le plan de l'infini.

En définitive nous avons à étudier S dans l'hypothèse suivante : à tout point μ à distance finie ou infinie, extérieur à S et pris dans un plan donné Π, à distance finie, correspond au moins un plan quasi-polaire P_μ.

Comme première conséquence, nous allons en déduire que tout plan d'appui contenant une droite extérieure à S et située dans Π, touche S suivant un point ou une facette. La conclusion vaudra pour Π, s'il est lui-même plan d'appui. Soit R un plan d'appui passant par une droite Δ satisfaisant aux conditions précédentes. Supposons qu'il touche suivant un segment *ab*, et désignons par ω la trace de la droite *ab* sur Δ. Tout plan quasi-polaire P_μ d'un point μ de Δ contient le segment *ab*, pourvu que μ soit différent de ω. Mais cette restriction peut être levée, car tout plan limite de plans quasi-polaires est évidemment un plan quasi-polaire. Coupons alors par un plan Q, contenant Δ et un point intérieur de S. Nous obtenons sur S^* un ovale Q^*. La trace sur Q d'un plan quasi-polaire d'un point μ de Δ est une quasi-polaire de ce point par rapport à Q^*. La droite Δ, extérieure à Q^* est donc telle qu'à chacun de ses points corresponde une quasi-polaire passant par le point ω. Or d'après le lemme I, première partie, ce point devrait être intérieur à Q^*. Nous parvenons à une contradiction. Le plan touche donc bien suivant un point unique ou une facette. Cette propriété jointe au fait que les facettes sont dénombrables, jouera un rôle essentiel.

19. Je poursuivrai en étudiant la nature de la section de S^* par un plan quasi-polaire d'un point donné μ_0 extérieur à S et situé dans Π. Nous disons : un, parce que nous supposons qu'il en existe au moins un. Désignons par P_0 le plan quasi-polaire considéré, par C_0^* la trace de S^* sur lui, et par Λ_0, l'intersection des plans P_0 et Π. Si S^* possède des facettes, en dehors de celle suivant laquelle Π pourrait éventuellement toucher S^*, leurs plans découpent sur Π un ensemble dénombrable de droites. Il est par suite possible de choisir sur Λ_0 un point λ, extérieur à C_0^* et tel que l'un au moins des plans d'appui à S passant par la droite $\mu_0\lambda$ touche S^* suivant un point unique *a*. Remarquons en passant que l'ensemble des points tels que λ est partout dense sur Λ_0.

Désignons par Δ la droite $\mu_0\lambda$, et, pour commencer, laissons-la fixe. Δ est extérieure au cône circonscrit de sommet μ_0, donc à S. A chaque point μ de Δ correspond alors (d'après notre hypothèse) un plan P (au moins) qui est quasi-polaire de μ. Les plans P passent nécessairement par a. Ce point est, en particulier sur C_0^*, et la droite λa touche cet ovale au seul point a. Menons par λ dans P_0 une sécante passant à l'intérieur de C_0^* et désignons par q_0 et q_0' ses intersections avec C_0^*. Le plan $(\mu_0\lambda q_0)$ soit Q, pénétrant à l'intérieur du cône circonscrit de sommet μ_0, pénètre à l'intérieur de S (n° 16). Il coupe par suite S^* suivant un ovale Q^*. Les droites $\mu_0 q_0$ et $\mu_0 q_0'$ sont les droites d'appui à Q^* issues de μ_0 et la droite $q_0 q_0'$ est une quasi-polaire de μ_0 par rapport à Q^*. Lorsque, Q restant fixe, μ décrit Δ, l'intersection de Q et de P reste une quasi-polaire de μ par rapport à Q^*. Projetons Q^*, depuis a sur II. Nous obtenons un ovale $\overline{Q}^*$ et, sur lui, les points $\overline{q}_0$ et $\overline{q}_0'$. Considérons alors un second plan fixe tel que Q. Nous obtenons un second ovale tel que $\overline{Q}^*$. Ces deux ovales ont pour tout point de la droite Δ, qui est extérieure à chacun d'eux, au moins une quasi-polaire commune : la trace de P sur II. Le lemme I permet d'affirmer que :

1° si deux ovales Q^* ont un point commun, ils sont confondus;

2° si la quasi-polaire de μ_0 est unique pour l'un des ovales, elle est unique pour l'autre;

3° la droite Δ a même conjuguée harmonique par rapport aux couples de droites d'appui issues de μ_0 à chacun des ovales.

Pour exploiter complètement ces résultats, remarquons enfin que si S touche II suivant une facette, la frontière de celle-ci joue le même rôle qu'un ovale Q^*

Revenons à l'ovale C_0^*. On déduit de la troisième conséquence du lemme I que la conjuguée harmonique de Δ par rapport aux droites $\mu_0\overline{q}_0$ et $\mu_0\overline{q}_0'$ est indépendante de Q, μ_0 restant fixe. Soit alors α le point où cette droite perce P_0, le faisceau des quatre droites : aq, aq_0', $a\alpha$, $a\lambda$, est harmonique. Il en résulte que C_0^* est invariant par l'homologie involutive de pôle λ et d'axe $a\alpha$. Mais ceci a lieu quel que soit λ, pris sur Λ_0, extérieurement à C_0^* et sur un ensemble partout dense. L'ovale C_0^* satisfait aux conditions du lemme II. Nous avons vu que C_0^* peut être un triangle de sommet a, dont un côté est sur Λ_0.

20. Examinons ce cas, qui ne peut se produire que si II touche S suivant une facette, dont je désignerai la frontière par Γ. Dans ce cas particulier, Γ et l'ovale $\overline{Q}^*$ ont deux points communs quel que soit le plan Q. Ils sont donc confondus; d'où il résulte que S est un cône plein de sommet a, limité à ce point et au plan II. La base Γ de ce cône est un ovale absolument quelconque. Il était évident *a priori* qu'on devait trouver ce cas à vrai dire banal. Nous l'écarterons. Si alors II touche S suivant une facette limitée par un ovale Γ, C_0^* sera un arc de conique, dont les extrémités sont sur Γ, complété par sa corde. Je dis que les

droites joignant μ_0 aux points de l'arc de conique touchent S en un point unique. Il en résultera que S n'a pas de facette en dehors de celle située dans H, et de plus que C_0^* n'a pas d'arc partiel rectiligne. Soit m un point de l'arc de conique, que je supposerai d'abord distinct des extrémités. Le plan tangent le long de $\mu_0 m$ au cône du second degré défini par μ_0 et la conique porteuse de l'arc de C_0^*, est plan d'appui au cône circonscrit de sommet μ_0, et par conséquent à S. Or il coupe H le long d'une droite évidemment extérieure à S. La génératrice $\mu_0 m$ ne peut donc toucher S en plus d'un point, car dans le cas contraire le plan d'appui en question toucherait S suivant un segment. Éventualité impossible (n° 18).

Lorsque m est une extrémité de l'arc, on considérera une section Q (les notations étant les mêmes que précédemment). On sait que si la quasi-polaire de μ_0 est unique pour Q^* et par conséquent pour $\overline{Q}^*$, elle est unique pour Γ. Si la droite $\mu_0 m$ touchait Γ en plus d'un point, la quasi-polaire de μ_0 par rapport à Γ ne serait pas unique et alors une des droites $\mu_0 q_0$, $\mu_0 q_0'$, toucherait en plus d'un point ce qui nous ramène au cas précédent.

On se rappelle que dans le cas où H ne touche pas C^* suivant un segment, l'ovale C_0^* contient toujours un arc de conique (au moins) dont les extrémités sont sur H. Le raisonnement précédent montre alors que toute droite d'appui issue de μ_0 touche S en un point unique.

En résumé, le cas banal écarté, nous aboutissons, en particulier, aux conclusions suivantes :

a. Si H ne touche pas S suivant une facette;

1° Tout plan d'appui, rencontrant H en dehors de S, le touche en un point unique;

2° La zone commune à S^* et au cône circonscrit ayant pour sommet un point μ de H, pris extérieurement à S, est une section plane de S^*, l'ovale C_μ^*, qui satisfait dans son plan aux conditions du lemme II, la droite lieu des centres d'homologies étant la trace de ce plan sur H.

b. Si H touche S suivant une facette limitée par un ovale Γ :

1° Tout plan d'appui autre que H, dont la trace sur lui est extérieure à S, le touche en un point unique;

2° Γ n'a pas d'arc partiel rectiligne.

La zone commune à S^* et au cône circonscrit ayant pour sommet un point quelconque μ, pris dans H extérieurement à S, se compose de la facette et d'un arc de conique dont les extrémités sont les points de contact des droites d'appui à Γ, issues de μ.

21. La démonstration du théorème s'achèvera rapidement, sauf dans le cas

où Π touche S suivant une facette, qui demandera une petite étude supplémentaire.

A. Π *est extérieur à* S. — En se reportant au lemme II, on voit que C_μ^* est, quel que soit μ, une ellipse. Soient E l'une d'elles et Δ la trace de son plan sur Π. Les plans d'appui issus de Δ touchent S^* en des points a et a'. Lorsque μ décrit Δ, le plan quasi-polaire P_μ pivote autour de la droite aa', qui perce le plan de E au pôle ω de Δ par rapport à cette ellipse. Donnons-nous un point m de E; la tangente en m coupe Δ en un point μ, lequel détermine complètement l'ellipse C_μ^* : par son plan $(aa'm)$ et dans celui-ci les points m, a, a', ces derniers avec leurs tangentes, situées respectivement dans les plans (Δ, a) et (Δ, a'). Le point ω étant le pôle de Δ par rapport à E, C_μ^* rencontre E en un second point sur la droite $m\omega$. Lorsque m décrit E, C_μ^* engendre un ellipsoïde, auquel se réduit évidemment S^*.

B. Π *touche* S *en un point unique* a. — Dans ce cas encore C_μ^* est quel que soit μ, distinct de a, une ellipse, laquelle passe par a. Soit E l'une d'elles, correspondant au point de ε. Considérons dans Π une droite fixe Δ, extérieure à S, par exemple la droite de l'infini et soit a' le point de contact du second plan d'appui mené par Δ. Donnons-nous sur E un point m, distinct de a. Le plan d'appui en m est déterminé par la tangente à E et ε. Soit μ le point à l'infini de sa trace sur Π. L'ellipse C_μ^* est bien déterminée : son plan est $(aa'm)$; elle passe par a, a' et m, elle est tangente à Π en a et au plan parallèle en a'. Il est immédiat qu'elle reste sur un ellipsoïde, auquel se réduit S^*.

22. Il va falloir procéder différemment dans le cas :

C. Π *traverse* S. — Désignons par E la section de S^* par Π. Cet ovale est une ellipse. En effet, soit Δ une droite quelconque, prise dans Π extérieure à E; elle est extérieure à S. Les plans d'appui qui la contiennent touchent S chacun en un point unique. Il en résulte que les quasi-polaires des différents points de Δ par rapport à E passent par un point fixe. Comme ceci a lieu quelle que soit Δ, E est une ellipse (corollaire du n° 7). Les plans d'appui parallèles à Π touchent S en des points a et a', situés de part et d'autre du plan. La droite aa' passe par le centre de E. Coupons S par un plan Q, parallèle à Π, et passant par un point intérieur au segmeut aa'. La section est un ovale Q^* dont la perspective sur Π vue de a sera désignée comme au n° 19, par Q^*. Pour tout point à l'infini de Π, E et $\overline{Q}^*$ ont même quasi-polaire et celle-ci passe par le centre de E. On en déduit que $\overline{Q}^*$ et par suite Q^* est une ellipse homothétique à E, dont le centre est sur aa' (n° 6).

Si pour un certain point μ à l'infini C_μ^* possède une pointe, elle est en a ou en a', en a par exemple. Alors pour tout plan Q situé du côté de a par rapport à Π, $\overline{Q}^*$ et E, qui ont deux points communs sont confondus (n° 6). Il en résulte

que la partie de S^* située du côté de a par rapport à Π, est le cône $[a, E]$ limité à son sommet et à Π. Il est presque évident que l'autre partie est une calotte de quadrique. Soit, en effet, E' l'ellipse section de S^* par un plan fixe parallèle à Π et situé du côté de a', son centre est sur aa'. On voit immédiatement que pour tout point μ à l'infini, la partie de C'_μ située du côté de a' est sur la quadrique déterminée par E, E' et le contact en a' au plan parallèle à Π. Comme C^*_μ n'a de pointe qu'en a, la quadrique est circonscrite au cône le long de E. Il est visible qu'elle lui est intérieure, c'est par suite un ellipsoïde.

Si aucun C^*_μ ne contient de pointe, il suffit d'appliquer le dernier raisonnement aux parties de S^* situées de chaque côté de Π. On obtient deux calottes de quadriques ayant même bord E, le long duquel elles ont même plan tangent, Autrement dit : les deux quadriques ont même cône circonscrit le long de E. Lorsque ce cône est un cylindre, les deux quadriques sont des ellipsoïdes ; quand c'est un vrai cône, l'une d'elles seulement est toujours un ellipsoïde : celle qui porte la partie de S^* située du côté opposé au sommet du cône (par rapport à Π).

23. Reste en définitive à étudier le cas :

D. Π *touche S suivant une facette* (S n'étant pas un cône solide reposant sur Π par sa base). — Désignons, comme précédemment, par Γ la frontière de la facette. Le problème est de montrer que Γ est une ellipse. Ce fait acquis, la méthode utilisée au numéro précédent s'appliquera, car les plans quasi-polaires des points à l'infini de Π passeront encore par une droite fixe.

Nous savons que Γ n'a pas d'arcs partiels rectilignes (n° 20). La quasi-polaire Λ_μ d'un point μ, pris quelconque extérieur à Γ, est donc unique. Je vais établir que si μ' est sur Λ_μ, $\Lambda_{\mu'}$ passe par μ, et ceci quels que soient μ et μ'. Il résultera alors du lemme III que Γ est bien un ellipse ([3]).

Supposons que pour un certain point μ_1 il existe sur Λ_{μ_1} un point μ'_1 tel que $\Lambda_{\mu'_1}$ ne contienne pas μ_1. Nous allons voir que cette hypothèse donne lieu à une contradiction. Remarquons d'abord que la droite $\mu_1\mu_{\mu'_1}$, soit Δ_1, est extérieure à Γ, parce que μ'_1 est sur Λ_{μ_1} et extérieur à Γ. La droite Δ_1 rencontre $\Lambda_{\mu'_1}$ en un point μ''_1, qui, par hypothèse est distinct de μ_1. Désignons enfin, pour chaque μ la conique porteuse de C^*_μ par $\mathcal{C}_\mu$, et par P_μ le plan quasi-polaire de μ (plan unique pour chaque μ et qui coupe Π suivant Λ_μ) (n° 20 *b*).

Soit m_1 le point de contact du plan d'appui (autre que Π mené par Δ_1. La conique $\mathcal{C}_{\mu_1}$ est dans le plan $[m_1, \Lambda_{\mu_1}]$ et sa tangente en m_1 est la droite $m_1\mu'_1$. De même $\mathcal{C}_{\mu'_1}$ est dans le plan $[m_1, \Lambda_{\mu'_1}]$ et sa tangente en m_1 est la droite $m_1\mu''_1$. Nous pouvons considérer ces deux coniques comme des données, Choisissons

([3]) Dans les leçons de Liège, j'avais établi cette propriété en utilisant celle des directions conjuguées en un point régulier d'une surface analytique. La démonstration qu'on va lire a l'avantage d'être tout à fait élémentaire sans être plus longue.

alors sur Γ un point fixe γ, pris en dehors des trois quasi-polaires Λ_{μ_1}, $\Lambda_{\mu'_1}$, $\Lambda_{\mu''_1}$, et menons par ce point une droite d'appui à Γ. Elle rencontre Δ_1 en un point μ_0, qui d'après la manière dont a été choisi γ, est distinct des trois points μ_1, μ'_1, μ''_1. Considérons maintenant sur $\mu_0\gamma$, un point μ voisin de μ_0, et qui ultérieurement tendra vers lui. Je dis que $\mathcal{C}_\mu$ est entièrement déterminée par $\mathcal{C}_{\mu_1}$, $\mathcal{C}_{\mu'_1}$ et γ. En effet, soient 0 et 0′ respectivement les intersections de $\mu_1\mu$ avec Λ_{μ_1} et de $\mu'_1\mu$ avec $\Lambda_{\mu'_1}$. Ces points sont, le premier, voisin de μ'_1, le second voisin de μ''_1. Par 0 on peut mener une droite d'appui à $C^*_{\mu_1}$, qui le touche en un point m. Ce point s'obtiendra en menant de 0 la tangente à $\mathcal{C}_{\mu_1}$ qui est voisine de $m_1\mu'_1$. De même on obtiendra sur $\mathcal{C}_{\mu'_1}$ un point m', en lui menant par 0′ la tangente voisine de $m_1\mu''_1$. Les points m et m' sont les points de contact des plans d'appui (autres que Π) menés par les droites $\mu\mu_1$ et $\mu\mu'_1$. Ils sont donc sur C^*_μ dont on connaît déjà un autre point : γ. Le plan P_μ est parfaitement déterminé. D'autre part, il coupe les plans $[m, \mu, \mu_1]$ et $[m', \mu, \mu'_1]$ suivant les tangentes à C^*_μ en m et en m'. On connaît donc trois points de $\mathcal{C}_\mu$, dont deux, m et m' avec leur tangente. Remarquons enfin que si μ tend vers μ_0, le plan P_μ tend vers P_{μ_0}, puisque ce plan est unique et que tout plan limite de plans quasi-polaires l'est également. C'est là que va apparaître la contradiction, car je vais montrer qu'il existe un cône de directrice $\mathcal{C}_\mu$, dont la limite, quand μ tend vers μ_0, est un système de deux plans. Pour cela un bref calcul sera nécessaire.

Choisissons comme tétraèdre de référence celui déterminé par les plans P_{μ_1}, $P_{\mu'_1}$, $[m_1, \Delta_1]$ et Π dont les équations respectives seront : $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, $t = 0$. Le point μ_1 étant distinct de μ'_1 et de μ''_1, nous pouvons choisir le système de coordonnées de manière que (1, 1, 0, 0) le représente. Le point μ_0 aura pour coordonnées $(x_0, y_0, 0, 0)$. Comme il est distinct de $\mu'_1(1, 0, 0, 0)$, de $\mu''_1(0, 1, 0, 0)$ et de μ_1, on peut prendre $x_0 = k$, $y_0 = 1$, le nombre k sera fini, différent de zéro et de l'unité. Enfin on représentera les coordonnées de γ par $(\xi, \eta, \zeta, 0)$. D'après la façon dont a été choisi γ, les trois nombres ξ, η, ζ, sont différents de zéro. Le droite $\gamma\mu_0$ aura ainsi pour équations

$$\zeta(x - ky) - z(\xi - k\eta) = 0, \qquad t = 0. \tag{1}$$

De leur côté les coniques $\mathcal{C}_{\mu_1}$ et $\mathcal{C}_{\mu'_1}$ seront représentées paramétriquement par des relations

$$\mathcal{C}_{\mu_1} : \quad \frac{x}{\varphi} = \frac{y}{0} = \frac{z}{\varphi^2} = \frac{t}{A + B\varphi + C\varphi^2};$$

$$\mathcal{C}_{\mu'_1} : \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{\varphi'} = \frac{z}{\varphi'^2} = \frac{t}{A' + B'\varphi' + C'\varphi'^2}.$$

Les nombres A, B, C, A′, B′, C′, sont des constantes numériques, φ et φ′ les paramètres. De plus, A et A′ sont différents de zéro, car les équations représentent des coniques non dégénérées. Les tangentes à $\mathcal{C}_{\mu_1}$ et à $\mathcal{C}_{\mu'_1}$ aux points

de paramètres φ et φ' ont respectivement pour équations

$$(2A\varphi + B\varphi^2)\,x - (A - C\varphi^2)\,z - \varphi^2 t = 0, \qquad y = 0;$$
$$(2A'\varphi' + B'\varphi'^2)\,y - (A' - C'\varphi'^2)\,z - \varphi'^2 t = 0, \qquad x = 0.$$

Si φ est le paramètre de m et φ' celui de m', on obtient immédiatement les équations des plans $[m, \mu, \mu_1]$ et $[m', \mu, \mu'_1]$:

$$R \equiv (2A\varphi + B\varphi^2)\,(x - y) - (A - C\varphi^2)\,z - \varphi^2 t = 0,$$
$$R' \equiv (2A'\varphi' + B'\varphi'^2)\,y - (A' - C'\varphi'^2)\,z - \varphi'^2 t = 0.$$

Enfin, en remarquant que le plan $\varphi x + \varphi' y - z = 0$, passe par m et m', on voit que le cône Σ, d'équation

$$RR'(\varphi\xi + \varphi'\eta - \zeta)^2 - R_\gamma R'_\gamma(\varphi x + \varphi' y - z)^2 = 0,$$

où R_γ et R'_γ représentent les résultats de substitution des coordonnées de γ aux coordonnées courantes, passe par $\mathcal{C}_\mu$. Nous allons chercher la limite de Σ. Pour cela, il faut d'abord déterminer la relation entre φ et φ'. Elle s'obtient en écrivant que les traces sur $t = 0$, des plans $R = 0$ et $R' = 0$, se croisent sur la droite $\mu_0\gamma$, dont les équations sont fournies par les relations (1); ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} 2A\varphi + B\varphi^2 & -2(A\varphi + B\varphi^2 & A - C\varphi^2 \\ 0 & 2A'\varphi' + B'\varphi'^2 & A' - C'\varphi'^2 \\ \zeta & -k\zeta & \xi - k\eta \end{vmatrix} = 0.$$

Comme il fallait s'y attendre, il n'y a pas de terme constant en φ, φ'. Les termes du premier degré sont $-2AA'[\varphi' - (1-k)\varphi]$. Le coefficient du crochet est différent de zéro. On en déduit, puisque k n'est pas égal à *un*, que φ' est équivalent à $(1-k)\varphi$. Ordonnons l'équation de Σ par rapport à φ et φ'. On trouve pour termes de plus bas degré : $2AA'\zeta z(\zeta y - \eta z)\varphi$. En divisant par φ et en faisant $\varphi = 0$, on obtient l'équation de la limite de Σ : $2AA'\zeta z(\zeta y - \eta z)$. Comme AA', η et ζ sont différents de zéro, la limite de Σ est un système de *deux* plans distincts, ce qui conduit à la contradiction annoncée. La démonstration est achevée et l'énoncé du théorème est complètement justifié.

24. Ainsi qu'on l'a remarqué dans l'Introduction, la condition : S borné, n'est pas essentielle et il est facile de transformer les conclusions dans le cas où S est un domaine convexe à trois dimensions de l'espace projectif. Elles auront seulement une forme moins concrète. Mais il y a une autre extension intéressante. On sait que la frontière S^* d'un domaine convexe à trois dimensions se transforme par dualité en frontière $\overline{S}^*$ d'un autre domaine convexe à trois dimensions, les plans d'appui de l'un correspondant aux points de la frontière de l'autre. Il est facile de voir qu'à un plan quasi-polaire de $\overline{S}^*$ correspond un quasi-pôle pour S^*, en convenant de dire qu'un point p est *quasi-pôle* d'un

plan P, pénétrant à l'intérieur de S^*, si le cône de sommet p ayant pour directrice la trace de S^* sur P est circonscrit à S^*.

Le théorème qui a fait l'objet du présent Mémoire, permet de répondre complètement à la question suivante :

Étant donnés un domaine convexe à trois dimensions et un point fixe, que peut-on dire de la frontière du domaine sachant tout plan passant par le point fixe et pénétrant à l'intérieur du domaine correspond un quasi-pôle (au moins) ?

Il faudra, bien entendu, distinguer divers cas suivant la position du point fixe par rapport au domaine. Je remarquerai seulement pour terminer que si ce point est intérieur la frontière du domaine convexe est une quadrique.

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 76, 1959, p. 305 à 399.

SUR

LES SYSTÈMES ISOGONAUX DE SPHÈRES

Par M. René LAGRANGE.

INTRODUCTION.

1. Un système S_n de n sphères $U_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ de l'espace euclidien E_N à N dimensions est dit « isogonal » lorsque les angles que font ces sphères deux à deux sont égaux. En géométrie anallagmatique, où les U_i sont supposées unitaires, cette qualité se traduit par l'égalité, en valeur absolue, des produits $U_i U_j$ $(i \neq j)$. Si $a = \cos\alpha$ désigne l'un de ceux-ci, ces $U_i U_j$ sont de la forme $a\varepsilon_{ij}$, où $\varepsilon_{ij} = \pm 1$. Nous convenons de dire que S_n est « strictement isogonal » lorsque tous les ε_{ij} sont égaux; sinon, il est isogonal au sens large. J'ai consacré un article récent aux systèmes strictement isogonaux [1], dans E_N. Nous étudions ici l'isogonalité générale.

La matrice carrée d'ordre n dont les éléments sont tous les $U_i U_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ joue un rôle essentiel dans l'étude du système S_n, et son déterminant

$$\Delta_n = |(U_i U_j)|$$

est non seulement un invariant anallagmatique, mais il est également covariant lorsqu'on change un U_i en $-U_i$, ou lorsqu'on transpose deux sphères. Son rôle est également important ici. La matrice est symétrique; sa diagonale principale est formée de chiffres 1, et elle est définie par la donnée des ε_{ij} d'indice $i < j$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Il est commode de représenter S_n par le triangle que

(1) *Sur les systèmes isogonaux de sphères* (*J. Math. pures et appl.*, 37, 1958, p. 225-244).

forment ces $\frac{n(n-1)}{2}$ symboles ε_{ij}, placés comme dans la matrice, et de désigner ce triangle par S_n, soit

$$S_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ & \varepsilon_{23} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & \varepsilon_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Deux tels systèmes S_n, S'_n seront dits « semblables » s'ils sont réductibles l'un à l'autre par les changements de signe de certains U_i, associés ou non à une permutation des sphères, donc à un produit de transpositions. Cette similitude s'appellera, plus précisément, la « similitude directe ». Le S'_n dont les $\varepsilon'_{ij}\,(i<j)$ sont les opposés des ε_{ij} de S_n, chacun à chacun, est dit « l'opposé » de S_n; il s'en déduit encore en changeant simplement a en $-a$. Deux systèmes de n sphères seront dits « inversement semblables » lorsque l'un sera directement semblable à l'opposé de l'autre. Les deux similitudes ne s'excluent pas, et certains systèmes, tels que S_4, sont directement semblables à leur opposé (2).

2. L'ensemble des changements de signe portant sur une seule sphère forment la base d'un groupe multiplicatif que nous appelons le groupe (ν), le changement de U_i en $-U_i$ étant l'élément ν_i de ce groupe. Chaque ν_i^2 est l'identité. Les autres éléments de (ν) sont les produits de la forme $\nu_i\nu_j\nu_k\ldots$ ($i, j, k\ldots$ distincts), dont le nombre des facteurs ne dépasse pas $\left[\frac{n}{2}\right]$, car deux produits de p et $n-p$ facteurs respectivement, dont les n indices diffèrent, transforment de la même façon les ε_{ij}; en effet, si i et j se trouvent dans l'un des produits, celui-ci laisse ε_{ij} invariant, comme le fait l'autre, tandis que, dans le cas contraire, les deux produits changent son signe. Un produit de p éléments ν_i distincts change tous les $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul des indices est l'un des i, donc de $p(n-p)$ symboles $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Le nombre des produits de p éléments ν_i est C_n^p, donc le nombre des éléments du groupe (ν) est $\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^{n-1}$. Rappelons que Δ_n est invariant pour chaque ν_i, donc pour (ν).

3. Nous désignerons par $\tau_{ij}=\tau_{ji}$ la transposition de deux sphères U_i, U_j. On a $\tau_{ij}^2=1$. Nous désignons par (τ) le groupe des substitutions engendré par les τ_{ij}. Chaque permutation ne change pas les signes des ε_{ij}, mais leur place dans S_n.

Enfin, en désignant par ν' le changement simultané des signes des ε_{ij}, ce qui revient à changer a en $-a$, le groupe des similitudes est le groupe formé par

(2) En géométrie euclidienne plane, une figure peut bien être égale à sa symétrique par rapport à une droite.

la réunion de (ν), (τ), ν'. Le sous-groupe de (ν), (τ) est le groupe des similitudes directes.

4. *A priori*, chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ symboles ε_{ij} du triangle S_n a deux valeurs possibles, donc le nombre des S_n distincts est $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Ils sont réductibles par (ν), 2^{n-1} à 2^{n-1}, ce qui permet de les grouper en $2^{\frac{n(n-1)}{2}-n+1} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ « familles », les éléments de chaque famille f étant les transformés de l'un d'eux par (ν), et ayant, en particulier, le même déterminant Δ_n. Les familles qui sont réductibles l'une à l'autre par (τ) ont aussi le même Δ_n, et seront rassemblées dans une même « classe ». Ainsi, chaque classe est formée par tous les S_n directement semblables à l'un d'eux. Le problème que nous étudions dans la première partie de cet article est la répartition de tous les S_n dans les différentes classes et familles.

Il suffira de former un S_n type de chaque classe C, puisque (ν) permet d'en déduire la famille f de cet élément σ, et que (τ) permet de former ensuite toutes les familles de C. Il faut observer cependant que les transformées de f par les différents éléments de (τ) ne sont pas toujours distinctes, et il conviendra, dans chaque cas, de déterminer les familles distinctes dans C. Bien entendu, deux familles qui n'ont pas le même nombre de symboles ε_{ij} négatifs sont irréductibles par (τ) et sont dans deux classes différentes. Enfin, on formera, pour chaque classe, le polynome en a qu'est le déterminant Δ_n.

Ce problème n'est pas commode puisque, dès la valeur 7 de n, il s'agit de classer 2^{21} systèmes et $2^{15} = 32\,768$ familles. Heureusement, le nombre des classes est disproportionné avec ces grands nombres, puisqu'il est égal à 54. Nous n'avons pu résoudre ce problème dans sa généralité, et n'en donnons ici la solution que pour les valeurs de n inférieures à 8. Cela nous suffira d'ailleurs pour répondre à la question posée dans la deuxième partie. Nous constaterons aussi que, pour chacune de ces valeurs de n, les Δ_n des différentes classes sont des polynomes distincts, et obtiendrons ainsi le théorème remarquable suivant, qui semble devoir être général :

THÉORÈME. — *Pour que deux n-sphères isogonaux d'ordre $n \leq 7$ soient directement semblables, il faut et il suffit que leurs déterminants Δ_n soient deux polynomes identiques en $a = \cos\alpha$.*

COROLLAIRE. — *Pour que deux S_n isogonaux d'ordre $n \leq 7$ soient inversement semblables, il faut et il suffit que leurs déterminants Δ_n ne diffèrent que par le changement de a en $-a$.*

La méthode utilisée pour aboutir à cette classification appelle une observation essentielle. Lorsque nous déterminerons, pour un élément σ d'une classe C, les transformations du groupe (ν) qui sont équivalentes à une permutation du

groupe (τ), nous en déduirons le nombre des familles distinctes contenues dans C; d'une manière précise, si q est le nombre des transformations de (ν) en question, l'identité comprise, le nombre de ces familles est le quotient par q du nombre des permutations qu'on peut effectuer sur les ε_{ij} du système σ. Mais nous ne démontrons pas, dans chaque classe, que les transformations de (ν) examinées sont toutes celles qui ont l'équivalence en question, et nous ne sommes pas sûrs d'avoir effectué la réduction maximale. Ce n'est qu'à la fin de la discussion faite pour une même valeur de n que nous constaterons que le nombre total des familles formées, qui est *a priori* un maximum, est justement le nombre prévu $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$. Nous saurons alors que la réduction aura été effectivement complète dans chaque classe. Nous ne nous préoccuperons plus de ce détail dans le cours de la discussion.

5. Lorsque, dans un S_n, les ε_{ij} négatifs ne sont pas nombreux, il est commode de représenter ce système par la suite de ces seuls ε_{ij}, ou, plus simplement, par la suite des couples ij de leurs indices. Ainsi, on pourra écrire

$$S_4 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{matrix} \right\} = (\varepsilon_{23}, \varepsilon_{34}) = (23, 34).$$

Nous n'avons pas pu songer à dessiner les graphiques qu'on peut associer à chaque S_n, mais le lecteur pourra les reproduire aisément s'il le désire; ils sont commodes et nous y ferons allusion dans les raisonnements. En voici le principe. Les indices i, j des ε_{ij} d'un S_n ont n valeurs possibles $1, 2, \ldots, n$, qu'on peut représenter par n points différents du plan, numérotés $1, 2, \ldots, n$; chaque ε_{ij} égal à -1 est alors représenté par le segment de droite qui joint les points i et j. Ainsi, le système $(23, 34)$ est représenté par la ligne brisée à deux segments joignant les points 2, 3, 4 dans l'ordre, le point 1 restant isolé. Dans le cas général, un S_n est représenté par un certain nombre de côtés et diagonales d'un n-gone; les deux cas extrêmes sont le S_n dont tous les $\varepsilon_{ij} = 1$, qu'on peut représenter par la parenthèse vide ( ), ou par les n points isolés, et celui dont tous les $\varepsilon_{ij} = -1$, dont le graphique est formé par les $2^{\frac{n\,n-1}{2}}$ côtés et diagonales du n-gone. Une transformation ν_i de S_n change la nature des segments issus du point i, en effaçant ceux de son graphique, et en faisant apparaître les autres; si le nombre des premiers est r, celui des autres est $n-1-r$. Sur l'exemple S_4 cité, ν_1 donne ainsi

$$\nu_1(23, 34) = (12, 13, 14; 23, 34),$$

tandis que

$$\nu_2(23, 34) = (12, 24, 43).$$

Les diagrammes sont respectivement un quadrilatère avec une diagonale, et

une ligne brisée de trois traits. Par contre,

$$\nu_3(23, 34) = (13)$$

est représenté par un seul trait.

Précisons que les deux sommets d'un segment seront dits adjacents ou « unis », tandis que deux sommets seront dits « reliés » s'ils appartiennent à une même ligne brisée.

6. La deuxième partie de ce travail, exposée aux chapitres IV et V, est l'application des généralités de la première à la formation des systèmes isogonaux du plan et de E_3. En outre du problème de l'existence de tels systèmes S_n lorsque n surpasse 4 ou 5, on peut se demander si ceux-ci peuvent être formés de sphères réelles ou imaginaires pures. J'ai montré antérieurement (3) que ces sphères sont alors toutes réelles ou toutes imaginaires pures suivant la position de a ($a \neq 0$) par rapport à l'intervalle $(-1, 1)$. Lorsqu'il en est ainsi, S_n sera dit « pur »; sinon « impur ». On verra que, dans E_2, il n'existe pas d'heptacercle isogonal, mais on peut former quatre types de pentacercle et deux d'hexacercle. Dans E_3, on trouve de même dix types d'hexasphère, cinq d'heptasphère et trois d'octosphère, dont la valeur de a et la nature sont relatés dans les tableaux récapitulatifs des paragraphes 58, 63 et 73.

CHAPITRE I.

Les systèmes isogonaux d'ordre $n \leq 5$.

1. $n = 2$. — Les systèmes $S_2 = \{\varepsilon_{12}\}$ ont deux formes possibles $\{1\}$ et $\{-1\}$. Elles sont équivalentes par (ν) et par ν', donc directement et inversement semblables. Le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$$

est effectivement une fonction paire de a. On prendra naturellement

$$\sigma_2 = \{1\} = (\quad)$$

pour forme type de la classe unique, à une seule famille, $C(\sigma_2)$. Le graphique de σ_2 est un couple de points isolés; celui de l'autre système (4)

$$\sigma'_2 = \nu' \sigma_2 = (12)$$

est le trait qui joint ces deux points.

---

(3) *Loc. cit.*

(4) $\nu_i S_n$ et $\nu' S_n$ désignent naturellement les transformés respectifs de S_n par ν_i et par ν'; de même, $\tau_{ij} S_n$ est son transformé par la transposition τ_{ij}.

2. $n=3$. — Les $2^3=8$ systèmes

$$S_3=\left\{\begin{matrix}\varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ & \varepsilon_{23}\end{matrix}\right\}$$

se partagent *a priori* en 2 familles f_1, f_2 comprenant chacune 4 systèmes équivalents par (ν). f_1 est la famille des transformés par (ν) du système type

$$\sigma_3^1=\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 1\end{matrix}\right\}=(\quad).$$

Les trois autres éléments de f_1 sont les $\nu_i\sigma_3^1$, qui se déduisent de σ_3^1 par deux changements de signe des $\varepsilon_{i\alpha}$: ainsi,

$$\nu_1\sigma_3^1=\left\{\begin{matrix}-1 & -1\\ & 1\end{matrix}\right\}=(12,\,13),\qquad \nu_2\sigma_3^1=\left\{\begin{matrix}-1 & 1\\ & -1\end{matrix}\right\}=(12,\,23),$$
$$\nu_3\sigma_3^1=\left\{\begin{matrix}1 & -1\\ & -1\end{matrix}\right\}=(13,\,23).$$

f_2 est la famille des S_3 différant de σ_3^1 par un ou trois changements de signe des ε_{ij}; on peut adopter l'élément type

$$\sigma_3'^1=\nu'\sigma_3^1=\left\{\begin{matrix}-1 & -1\\ & -1\end{matrix}\right\}=(12,\,23,\,31),$$

et les 3 autres systèmes sont

$$\nu_1\sigma_3'^1=\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & -1\end{matrix}\right\}=(23),\qquad \nu_2\sigma_3'^1=\left\{\begin{matrix}1 & -1\\ & 1\end{matrix}\right\}=(13),\qquad \nu_3\sigma_3'^1=\left\{\begin{matrix}-1 & 1\\ & 1\end{matrix}\right\}=(12).$$

Les transpositions ne changeant pas le nombre des ε_{ij} négatifs, ces deux familles ne sont pas directement semblables; mais elles le sont inversement puisque $\sigma_3'^1=\nu'\sigma_3^1$. On pourra donc désigner les 2 classes représentées par ces 2 familles par $C_1=C(\sigma_3^1)$ et $C_1'=C(\sigma_3'^1)$. Il en résulte que les déterminants $\Delta_3^1=\Delta(\sigma_3^1)$ et $\Delta_3'^1=\Delta(\sigma_3'^1)$ sont des polynomes en $a=\cos\alpha$ du troisième degré qui se déduisent l'un de l'autre en changeant [5] a en $-a$. Les 8 systèmes sont semblables, et strictement isogonaux à une similitude près.

Nous groupons ces résultats dans le tableau suivant, où nous désignons, pour chacune des deux classes [6], un système type, le nombre des familles qui la compose, et la valeur de Δ_3.

$C_1=C(\sigma_3^1)\ =C(\quad)$	1 famille	$\Delta_3^1\ =(1-a)^2(1+2a)$
$C_1'=C(\sigma_3'^1)=\nu' C_1=C(12)$	1 famille	$\Delta_3'^1=(1+a)^2(1-2a)$

3. $n=4$. — Les $2^6=64$ systèmes S_4 se partagent *a priori* en $2^3=8$ familles

(5) Nous omettons le calcul de Δ_3, qui n'offre ni difficulté ni intérêt.

(6) C( ) désigne naturellement la classe du système dont tous les $\varepsilon_{ij}=1$; C(12) celle du système (12).

contenant chacune 8 systèmes équivalents par (ν). Nous adoptons toujours pour système type de la première famille f_1 le système

$$\sigma_4^1 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{matrix} \right\} = (\quad),$$

dont le graphique est l'ensemble des quatre sommets isolés d'un quadrilatère. Rappelons qu'une transformation ν_i change les signes des 3 symboles $\varepsilon_{i\alpha}(\alpha \neq i)$ et que tout produit $\nu_i\nu_j(i \neq j)$ change ceux de 4 des 6 éléments $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

α. Les 6 S_4 déduits de σ_4^1 par un seul changement de signe n'appartiennent donc pas à f_1, et appartiennent également à 6 familles distinctes, puisqu'on passe de l'un à l'autre par deux changements de signe. Par contre ces familles sont équivalentes par (τ); elles sont donc groupées dans une même classe, et ont le même Δ_4. Prenons par exemple, pour système type de cette classe C_2 de 6 familles de 8 systèmes chacune,

$$\sigma_4^2 = \left\{ \begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{matrix} \right\} = (12).$$

β. Considérons maintenant les S_4 déduits de σ_4^1 par deux changements de signe. Le dessin représente 2 segments liant des sommets du quadrilatère, et l'on distingue les graphiques où ces deux traits sont adjacents de ceux où ils sont isolés, car ils représentent nécessairement des classes distinctes. Nous conviendrons d'appeler p-uple un point qui est le sommet commun de p segments du graphique et p seulement; l'indice de ce sommet est commun à p ε_{ij} négatifs, et p seulement (7).

β_1. Considérons d'abord les S_4 de la classe de $(12, 34)$; les 3 formes qu'on en déduit par (τ) sont équivalentes par (ν), car

$$\tau_{23}(12; 34) = (13; 24) = \nu_1\nu_4(12; 34),$$
$$\tau_{24}(12; 34) = (14; 23) = \nu_1\nu_3(12; 34);$$

d'ailleurs cette famille est inversement semblable à f_1, d'après

$$\nu_1\nu_2(12; 34) = \nu'\sigma_1^1.$$

Nous désignerons ce transformé $\nu'\sigma_4^1$ par $\sigma_4'^1$, et son diagramme est l'ensemble des 6 segments joignant les 4 points.

β_2. Les systèmes transformés par (τ) du type $(12, 13)$ sont au nombre de 12. Ils sont équivalents deux à deux par (ν) car

$$\nu_1\nu_4(12, 13) = (42, 43) = \tau_{14}(12, 13).$$

(7) Ne pas confondre un point simple avec un point isolé.

Ils forment seulement 6 familles, qui sont d'ailleurs les 6 familles de σ_4^2 puisque

$$\nu_1(12, 13) = (14).$$

Nous avons ainsi obtenu les 64 systèmes S_4 : 8 de la classe $C_1 = C(\sigma_4^1)$ à une famille, 8 de la classe $C_1' = C(\sigma_4'^1)$ à une famille, et 48 rattachés par ν et (τ) à σ_4^2 dans la classe à six familles $C_2 = C(\sigma_4^2)$. Il est à prévoir que C_2 est invariante par ν'; en effet

$$\nu_1\nu_2\sigma_4^2 = \nu_1\nu_2(12) = \nu'(34).$$

Le calcul de Δ_4 confirme ces résultats. Comme pour $n = 3$, nous rassemblons ces faits dans un tableau :

	$C_1 = C(\sigma_4^1) = C(\ )$	$1f$	$\Delta_4^1 = (1-a)^3(1+3a)$
β_1 :	$C_1' = C(\sigma_4'^1) = \nu' C_1 = C(12; 34)$	$1f$	$\Delta_4'^1 = (1+a)^3(1-3a)$
α et β_2 :	$C_2 = C_2' = C(\sigma_4^2) = C(12)$	$6f$	$\Delta_4^2 = (1-a^2)(1-5a^2)$

Nous avons également rappelé l'alinéa où la classe a été formée. Les seuls systèmes strictement isogonaux sont σ_4^1 et $\sigma_4'^1$; les 14 autres systèmes de leurs deux classes, ou familles, sont à la fois directement et inversement semblables à un système strictement isogonal. Les systèmes de C_2 sont inversement semblables deux à deux.

4. Nous ne nous sommes pas occupés des systèmes dont le graphique comporte un ou plusieurs points triples, car la transformation ν_i dont l'indice est celui d'un sommet triple réduit de 3 unités le nombre des segments de la figure. Pour le même motif, nous aurions pu omettre l'examen des S_4 comportant un indice double i, car le ν_i correspondant réduit d'une unité le nombre des segments du graphique. C'est pour cette raison que l'étude faite en β_2 ne nous a pas donné de classe nouvelle. Nous ferons notre profit de cette importante remarque dans la suite, mais l'alinéa β_2 nous a fourni néanmoins des résultats assez intéressants pour être conservé. Dans le même ordre d'idées, montrons dans quelles classes se placeraient les S_4 dont le graphique comporte 3 traits.

Si l'on désigne par d et s les nombres respectifs des sommets doubles et simples, et par c le nombre des points isolés, les graphiques de cette nature, et sans point triple, vérifient les deux relations

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 4,$$

donc $d = 2 + c \geq 2$.

γ_1. Une première solution est $d = 2$, $s = 2$, $c = 0$. Un type de cette classe est $(12, 23, 34)$, et le nombre des systèmes de ce type est 12; cependant il n'y

en a que 6 qui soient irréductibles les uns aux autres par (ν), puisque

$$\nu_1\nu_4(12, 23, 34) = (13, 32, 24) = \tau_{23}(12, 23, 34).$$

Ils appartiennent aux 6 familles de la classe C_2; on vérifie d'ailleurs, par exemple, que $\nu_1\nu_3(12, 23, 34) = (14)$.

γ_2. L'autre solution est $d = 3$, $s = 0$, $c = 1$. Un système type est $(12, 23, 31)$, représenté par un triangle; les 4 systèmes analogues appartiennent à la même classe (8) car

$$\nu_1\nu_2(12, 23, 31) = (12, 24, 41) = \tau_{34}(12, 23, 31),$$

donc, de même,

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 31) = \tau_{24}(12, 23, 31); \qquad \nu_1\nu_4(12, 23, 31) = \tau_{14}(12, 23, 31).$$

δ. Les systèmes qui ont quatre ε_{ij} négatifs, sans indice triple, sont fournis par la résolution du système

$$2d + s = 8, \qquad d + s + c = 4,$$

dont la solution unique est $d = 4$, $s = c = 0$. Ils appartiennent à la classe du type $(12, 23, 34, 41)$; c'est la classe C_4 car ce type est transformé en σ_4^1 par $\nu_1\nu_3$.

5. $n = 5$. — Les $2^{10} = 1024$ systèmes S_5 se groupent *a priori* en $2^6 = 64$ familles f contenant chacune $2^4 = 16$ systèmes équivalents par (ν). Nous prenons naturellement

$$\sigma_5^1 = \left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{matrix}\right\} = (\quad),$$

représenté par les 5 sommets d'un pentagone, comme système type de la première famille f_1, identifiée avec la première classe $C_1 = C(\sigma_5^1)$.

Ici, les ν_i changent les signes des $4\varepsilon_{i\alpha}(\alpha \neq i)$, et les produits $\nu_i\nu_j$ changent le signe de 6 symboles ε_{x3}; ces transformations sont les seuls éléments de (ν), en outre de l'identité. Nous allons examiner les familles déduites de f_1, ou, ce qui est équivalent, les systèmes déduits de σ_5^1 par un, deux ou trois changements de signe des ε_{ij}.

α. Les systèmes qui n'ont qu'un ε_{ij} négatif ne sont pas semblables à σ_5^1, mais sont équivalents par (τ). Aux 10 symboles ε_{ij} correspondent ainsi 10 familles f d'une même classe, directement semblables au système type $\sigma_5^2 = (12)$. C'est la classe $C_2 = C(\sigma_5^2)$.

β. Les systèmes déduits de σ_5^1 par deux changements de signe ont un graphique formé par deux traits, et se partagent en deux classes suivant que le nombre d des points doubles est 0 ou 1.

(8) Il s'agit de C_1', comme le montre $\nu_3(12, 23, 31) = (12; 34)$.

β_1. La première solution fournit les systèmes du type

$$\sigma_5^3 = (12; 34),$$

au nombre de $\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 15$; ils constituent, à l'aide de (ν), la classe $C_3 = C(\sigma_5^3)$ de 15 familles.

β_2. L'autre solution fournit les systèmes du type (12, 13); ils n'engendrent que 15 familles, car $\nu_4(12, 13) = (14, 15)$; ils sont inversement semblables à ceux de la classe C_3 car

$$\nu_4\nu_5(12, 13) = \nu'(23, 45).$$

Leurs 15 familles forment la classe $C'_3 = C(\sigma_5'^3)$, en désignant par $\sigma_5'^3$ le système $\nu'\sigma_5^3$.

γ. Examinons maintenant les S_5 à trois ε_{ij} négatifs, donc représentés par 3 traits joignant des sommets du pentagone. On peut écarter les S_5 qui ont un point triple, car le ν_i dont l'indice est celui d'un tel point remplace les trois segments par un seul. Avec les notations adoptées, il s'agit de résoudre le système d'équations

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 5;$$

on en déduit $d = c + 1$, donc $2c + 1 \leq 5$, ou $c \leq 2$; il y a ainsi 3 solutions

(1) $\qquad d = 1, \quad s = 4, \quad c = 0,$

(2) $\qquad d = 2, \quad s = 2, \quad c = 1,$

(3) $\qquad d = 3, \quad s = 0, \quad c = 2.$

γ_1. Les S_5 fournis par (1) sont du type (12, 13; 45), et au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = 30$. Les 30 familles qu'on en déduit par (ν) sont semblables trois à trois, car

$$\nu_1\nu_4(12, 13; 45) = (42, 43; 15) = \tau_{14}(12, 13; 45),$$
$$\nu_1\nu_5(12, 13; 45) = \tau_{15}(12, 13; 45).$$

C'est une classe de 10 familles, d'ailleurs inversement semblables à $C(\sigma_5^2)$, car

$$\nu_4\nu_5(12, 13; 45) = \nu'(23).$$

Nous la désignerons par $C(\sigma_5'^2) = C'_2$, où $\sigma_5'^2 = \nu'\sigma_5^2$.

γ_2. Les S_5 fournis par (2) sont du type

$$\sigma_5^4 = (12, 23, 34),$$

et sont représentés par 3 segments consécutifs. Ils sont au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} = 60$. Les 60 familles correspondantes sont semblables

cinq à cinq; en effet,

$$\nu_2(12;\ 23,\ 34) = (52,\ 24,\ 43) = \tau_{15}\tau_{34}(12,\ 23,\ 34),$$

et, de même,

$$\nu_3(12,\ 23,\ 34) = (21,\ 13,\ 35) = \tau_{12}\tau_{45}(12,\ 23,\ 34);$$

en réitérant sur ces nouvelles formes, on a encore

$$\nu_2\nu_4(12,\ 23,\ 34) = \nu_4(52,\ 24,\ 43) = (25,\ 54,\ 41),$$
$$\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 34) = \nu_1(21,\ 13,\ 35) = (41,\ 15,\ 53).$$

Ces deux derniers types sont équivalents par ν_5. Ces 12 familles sont deux à deux inversement semblables, car

$$\nu'\nu_5(12,\ 23,\ 34) = (31,\ 14,\ 42),$$

et leur classe $C_4 = C(\sigma_5^4)$ est invariante par similitude inverse. Le déterminant Δ_5^4 de ces systèmes est une fonction paire de a.

γ_3. Les S_5 fournis par (3) sont du type (12, 23, 31), et sont représentés par les 10 triangles qu'on peut construire avec les 5 sommets du pentagone. Leurs 10 familles sont celles de la classe C_2' formée en γ_1, car, par exemple,

$$\nu_1(12,\ 23,\ 31) = (14,\ 15;\ 23).$$

6. Cette discussion nous a donné 6 classes et 63 familles; il ne manque plus qu'une famille et il est clair que c'est la classe à une famille inversement semblable à C_1. Il est à prévoir que l'étude des S_5 représentés par plus de 3 traits ne nous fournira pas d'autre nouvelle classe que $C_1' = \nu' C_1$; elle n'en est pas moins instructive et nous la poursuivons.

δ. Puisque nous pouvons ignorer les diagrammes à point triple, les S_5 représentés par 4 traits sont donnés par la résolution du système d'équations

$$2d + s = 8, \qquad d + s + c = 5,$$

donc $d = c + 3$, avec $c \leq 1$. Il n'y a que les deux solutions $d = 3$, $s = 2$, $c = 0$, et $d = 4$, $s = 0$, $c = 1$.

δ_1. Si les deux points simples sont unis, les S_5 fournis par la première solution sont du type (12, 23, 31; 45). On voit tout de suite que $\nu_4\nu_6$ le transforme en $\nu'\sigma_5^1$, et la classe de ces systèmes est justement la classe à une famille C_1'.

δ_2. Si les deux points simples sont unis à deux des trois points doubles, les S_5 sont du type (12, 23, 34, 45). Ils appartiennent à la classe C_3 puisque

$$\nu_2\nu_4(12,\ 23,\ 34,\ 45) = (14;\ 25).$$

δ_3. Les S_5 fournis par la deuxième solution $d = 4$, $s = 0$, $c = 1$ sont ceux du type (12, 23, 34, 41), représentés par un quadrilatère; leurs 15 familles sont celles de C_3' car

$$\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 34,\ 41) = (15,\ 35).$$

η. Les S_5 représentés par 5 traits, et sans point triple, sont fournis par le système d'équations

$$2d+s=10, \qquad d+s+c=5,$$

donc $d=5$, $s=c=0$. Cette solution unique donne les systèmes du type de (12, 23, 34, 45, 51), représentés par un pentagone. Leur classe comprend $\frac{5!}{5\times 2}=12$ familles, comme C_4, et l'on a en effet

$$\nu_1\nu_4(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51)=(13,\ 32,\ 24).$$

Il n'y a pas lieu de poursuivre la discussion, car tout S_5 dont plus de cinq ε_{ij} sont négatifs est inversement semblable à un système qui en a moins de cinq. Nous avons bien obtenu les 64 familles et, comme pour les valeurs précédentes de n, le tableau suivant récapitule ces résultats, en fournissant en outre les valeurs des déterminants Δ_5 relatifs à chacune des sept classes; nous en omettons le calcul, qui est sans intérêt :

	$C_1=C(\sigma_5^1)=C(\ \ )$	$1f$	$\Delta_5^1=(1-a)^4(1+4a)$
δ_1 :	$C_1'=C(\sigma_1'^5)=\nu' C_1$	$1f$	$\Delta_5'^4=(1+a)^4(1-4a)$
α :	$C_2=C(\sigma_5^2)=C(12)$	$10f$	$\Delta_5^2=(1-a)^2(1+a)(1+a-8a^2)$
γ_1 et γ_3 :	$C_2'=C(\sigma_5'^2)=\nu' C_2$	$10f$	$\Delta_5'^2=(1+a)^2(1-a)(1-a-8a^2)$
β_1 et δ_2 :	$C_3=C(\sigma_5^3)=C(12;\ 34)$	$15f$	$\Delta_5^3=(1+a)^2(1-3a)(1+a-4a^2)$
β_2 et δ_3 :	$C_3'=C(\sigma_5'^3)=\nu' C_3$	$15f$	$\Delta_5'^3=(1-a)^2(1+3a)(1-a-4a^2)$
γ_2 et η :	$C_4=C_4'=C(\sigma_5^4)=C(12, 23, 34)$	$12f$	$\Delta_5^4=(1-5a^2)^2$

CHAPITRE II.

Les hexasphères isogonaux.

7. Les $2^{15}=2^{10}\times 2^5=1024\times 32=32\,768$ systèmes S_6 se groupent en $2^{10}=1024$ familles f contenant chacune $2^5=32$ systèmes équivalents par (ν). Les transformations ν_i de ce groupe changent les cinq symboles $\varepsilon_{i\alpha}(\alpha\neq i)$, les produits $\nu_i\nu_j(i\neq j)$ changent les signes des huit $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul indice est i ou j, et les produits $\nu_i\nu_j\nu_k(i, j, k$ distincts) changent les neuf $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul indice est i, j ou k. Ces transformations sont les seuls éléments de (ν), en outre de l'identité.

Nous prenons toujours le système strictement isogonal

$$\sigma_6^1=\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{array}\right\}=(\ \ )$$

pour type de la première famille f, qui constitue la première classe C_1, et nous allons classer les systèmes qui en diffèrent par un ou plusieurs changements de signe des ε_{ij}.

α. Les S_6 dont un seul ε_{ij} vaut -1 ne sont pas semblables à σ_6^1, mais sont semblables entre eux par (τ). Aux 15 symboles ε_{ij} correspondent ainsi 15 familles f, réductibles l'une à l'autre par (τ), et groupées dans une classe $C_2 = C(\sigma_6^2)$, dont le système type est $\sigma_6^2 = (12)$.

β. Les S_6 représentés par deux traits joignant des sommets de l'hexagone se partagent en deux classes, suivant que le dessin comporte, ou non, un point double.

β_1. Lorsqu'il n'y a pas de point double, S_6 est du type

$$\sigma_6^3 = (12; 34);$$

ces S_6 sont au nombre de $\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 45$, et fournissent autant de familles par (ν).

β_2. Les S_6 qui ont un sommet double ont pour type

$$\sigma_6^4 = (12, 13),$$

et se groupent en $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = 60$ familles.

8. Comme pour $n \leq 5$, il n'y a pas lieu de discuter des S_6 qui ont un point triple, car la transformation ν_i de même indice que ce point réduit à deux les segments qui en partent; la même observation vaut *a fortiori* pour les sommets d'ordre plus grand. Dans ces conditions, les S_6 représentés par trois traits sont fournis par la résolution du système

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 6.$$

Il y a donc 4 solutions, avec $d = c \leq 3$, soit

(1) $\quad d = c = 0, \quad s = 6,$

(2) $\quad d = c = 1, \quad s = 4,$

(3) $\quad d = c = 2, \quad s = 2,$

(4) $\quad d = c = 3, \quad s = 0.$

γ_1. La première solution fournit les S_6 du type

$$\sigma_6^5 = (12; 34; 56).$$

Le nombre des familles équivalentes par (τ) est

$$\frac{1}{6}\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 15.$$

γ_2. Les S_6 fournis par (2) sont du type

$$\sigma_6^6 = (12, 13; 45),$$

et sont au nombre de $60 \times 3 = 180$. Les 180 familles qu'on en déduit par (ν) sont inversement semblables deux à deux, car on a, par exemple,

$$\nu' \nu_1 \nu_2 \nu_3 (12, 13; 45) = (64, 65; 23) = \tau_{16} \tau_{24} \tau_{35} \sigma_6^6.$$

On vérifiera que Δ_6^6 est une fonction paire de a.

γ_3. Lorsqu'on écarte les deux points isolés d'un S_6 vérifiant (3), on obtient un S_4 de l'alinéa γ_4 du paragraphe 4. Il n'y a donc que des S_6 du type

$$\sigma_6^7 = (12, 23, 34),$$

au nombre de $\frac{6 \times 5}{2} \times 12 = 180$, fournissant autant de familles; le nombre de celles-ci n'est pas réductible par (ν), comme il l'est pour les classes associées au même type dans les ordres $n = 4$ ou 5.

γ_4. (4) ne fournit évidemment pas d'autres systèmes que ceux du type

$$\sigma_6^8 = (12, 23, 31),$$

et les familles qu'on en déduit sont au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 20$. Cette classe est invariante par ν', car on a, par exemple,

$$\nu' \nu_1 \nu_2 \nu_3 (12, 23, 31) = (45, 56, 64) = \tau_{14} \tau_{25} \tau_{36} \sigma_6^8.$$

9. Pour les S_6 qui ont quatre ε_{ij} négatifs, les nombres d, s, c vérifient les relations

$$2d + s = 8, \qquad d + s + c = 6,$$

donc $d = c + 2$, avec $c \leq 2$. Ce système admet donc les trois solutions

(5) $\qquad d = 2, \qquad s = 4, \qquad c = 0,$

(6) $\qquad d = 3, \qquad s = 2, \qquad c = 1,$

(7) $\qquad d = 4, \qquad s = 0, \qquad c = 2.$

Les systèmes qui satisfont à (5) ont deux formes possibles, suivant que les points doubles sont unis, ou non. Pour les solutions (6) et (7), il suffit d'écarter un point isolé pour retrouver les formes trouvées au paragraphe 6, alinéas δ, dans l'étude des S_5.

δ_1. Les S_6 fournis par (5) et dont les points doubles sont adjacents sont du type (12, 23, 34; 56); ils sont au nombre de $\frac{6 \times 5}{2} \times 4 \times 3 = 180$, comme ceux de la classe $C(\sigma_6^7)$; effectivement,

$$\nu' \nu_5 \nu_6 (12, 23, 34; 56) = (31, 14, 42).$$

Nous désignerons cette classe, inversement semblable à $C(\sigma_6^7)$, par $C(\sigma_6'^7)$ où $\sigma_6'^7 = \nu'\sigma_6^7$.

$\hat{o}_2$. Les autres S_6 déduits de (5) sont ceux du type (12, 13; 45, 46). Ils sont au nombre de $\frac{6!}{8} = 90$. Ils sont équivalents deux à deux par (ν) car, par exemple,

$$\nu_1\nu_4(12, 13; 45, 46) = (15, 16; 42, 43) = \tau_{14}(12, 13; 45, 46),$$

et donnent seulement 45 familles; c'est le nombre des familles de $C(\sigma_6^3)$, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 13; 45, 46) = (23; 56).$$

On prendra $\sigma_6'^3 = \nu'\sigma_6^3$ pour type de cette classe.

$\hat{o}_3$. Les S_6 analogues aux S_5 de l'alinéa $\hat{o}_1$ (§ 6) sont ceux du type (12, 23, 31; 45), et fournissent 60 familles comme dans $C(\sigma_6^4)$. C'est effectivement la classe inversement semblable, car

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 31; 45) = (46, 56).$$

Nous la représenterons par $C(\sigma_6'^4)$ où $\sigma_6'^4 = \nu'\sigma_6^4$.

$\hat{o}_4$. L'alinéa $\hat{o}_2$ (§ 6) fournit de même les S_6 du type

$$\sigma_6^9 = (12, 23, 34, 45),$$

au nombre de $\frac{6!}{2} = 360$. Cependant, leur classe ne comprend que 180 familles, d'après

$$\nu_2\nu_4(12, 23, 34, 45) = (14, 46, 62, 25) = \tau_{24}\tau_{36}(12, 23, 34, 45).$$

Ces familles sont inversement semblables deux à deux, puisque

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 34, 45) = (13, 34, 46, 65) = \tau_{15}\tau_{26}\tau_{34}(12, 23, 34, 45).$$

On verra que le déterminant Δ_6 de cette classe est une fonction paire de a.

$\hat{o}_5$. L'alinéa $\hat{o}_3$ (§ 6) donne les S_6 du type (12, 23, 34, 41); ils sont au nombre de $\frac{6\times 5}{2}\times 3 = 45$, mais n'appartiennent qu'à 15 familles, car

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34, 41) = (15, 53, 36, 61) = \tau_{25}\tau_{46}(12, 23, 34, 41),$$

et, de même,

$$\nu_2\nu_4(12, 23, 34, 41) = \tau_{15}\tau_{36}(12, 23, 34, 41).$$

Ce nombre est celui des familles de $C(\sigma_6^5)$; c'est la classe inversement semblable $C(\sigma_6'^5)$, où $\sigma_6'^5 = \nu'\sigma_6^5$, puisque

$$\nu'\nu_5\nu_6(12, 23, 34, 41) = (13, 24, 56) = \tau_{23}\sigma_6^5.$$

10. Les S_6 à cinq ε_{ij} négatifs sont fournis par les solutions du système

$$2d + s = 10, \qquad d + s + c = 6;$$

on a donc $d = c + 4 \leq 5$, qui donne $c \leq 1$, d'où résultent les deux solutions

$$d = 4, \quad s = 2, \quad c = 0, \tag{8}$$

$$d = 5, \quad s = 0, \quad c = 1. \tag{9}$$

Dans les S_6 qui relèvent de (8), les deux points simples peuvent être adjacents, ou unis séparément à un même point double, ou à deux points doubles; il existe donc 3 types de graphique. Par contre, (9) fournit un seul type, comme à l'alinéa η des S_5.

η_1. Les S_6 qui vérifient (8), et dont les points simples sont unis, sont du type (12, 23, 34, 41; 56), et au nombre de 45, comme dans les classes $C(\sigma_6^3)$ et $C(\sigma_6'^3)$. On retrouve cette dernière, car

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 34, 41; 56) = (16, 36; 25, 45)$$

est du type formé à l'alinéa δ_2.

η_2. Lorsque les deux points simples sont unis à un même point, les S_6 fournis par (8) sont du type (12, 23, 31; 45, 56). Leur nombre est $6 \times \frac{5 \times 4}{2} = 60$, mais ils sont réductibles par (ν) quatre à quatre, car

$$\nu_1\nu_5(12, 23, 31; 45, 56) = (52, 23, 35; 41, 16) = \tau_{15}(12, 23, 31; 45, 56),$$

et l'on voit de même que $\nu_2\nu_5$ et $\nu_3\nu_5$ équivalent respectivement, pour ce système, à τ_{25} et τ_{35}. Cette classe comprend ainsi 15 familles, comme $C(\sigma_6^2)$; c'est la classe inversement semblable, puisque

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 31; 45, 56) = (46).$$

Nous la désignons par $C_2' = C(\sigma_2')$, où $\sigma_6'^2 = \nu'\sigma_6^2$.

η_3. Lorsque les deux points simples sont unis à deux points doubles, les S_6 fournis par (8) sont du type (12, 23, 34, 45, 56), et au nombre de $\frac{6!}{2} = 360$. Ils forment 180 familles car ils sont équivalents par (ν), deux à deux, en vertu de

$$\nu_2\nu_5(12, 23, 34, 45, 56) = (15, 53, 34, 42, 26) = \tau_{25}(12, 23, 34, 45, 56).$$

C'est le nombre des familles de $C(\sigma_6^7)$; il s'agit de $C(\sigma_6'^7)$ car

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 34, 45, 56) = (41, 16, 63; 25)$$

est du type étudié à l'alinéa δ_1.

η_4. Les S_6 fournis par (9) sont ceux dont le graphique comporte un pentagone, et dont un type est

$$\sigma_6'^{10} = (12, 23, 34, 45, 51).$$

Ils sont au nombre de $6 \times \frac{5!}{5 \times 2} = 72$, mais ils ne forment que 12 familles,

car ils sont équivalents six à six par (ν). En effet, les transformations $\nu_i\nu_j$ dont les indices i, j désignent deux sommets non consécutifs transforment ce pentagone en un autre pentagone; c'est ainsi qu'on a

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34, 45, 51) = (16, 63, 35, 54, 41) = \tau_{26}\tau_{45}\sigma_6^{10},$$

donc, par des transpositions évidentes,

$$\nu_2\nu_4\sigma_6^{10} = \tau_{36}\tau_{15}\sigma_6^{10}, \qquad \nu_3\nu_5\sigma_6^{10} = \tau_{46}\tau_{12}\sigma_6^{10},$$
$$\nu_1\nu_4\sigma_6^{10} = \tau_{56}\tau_{23}\sigma_6^{10}, \qquad \nu_2\nu_5\sigma_6^{10} = \tau_{16}\tau_{34}\sigma_6^{10}.$$

Cette classe est en outre invariante par ν', car

$$\nu'\nu_6(12, 23, 34, 45, 51) = (13, 35, 52, 24, 41)$$

est le pentagone formé par les diagonales de celui qui représente σ_6^{10}. Le déterminant de cette classe $C(\sigma_6^{10})$ est une fonction paire de a.

11. Les S_6 dont six ε_{ij} sont négatifs sont fournis par les solutions du système

$$2d + s = 12, \qquad d + s + c = 6;$$

on a donc $d = c + 6 \leq 6 - c$, et, par suite, la solution unique $d = 6$, $s = c = 0$. Cependant, les six segments peuvent former deux triangles ou un hexagone.

ζ_1. Les S_6 représentés par deux triangles sont du type $(12, 23, 31; 45, 56, 64)$ et sont au nombre de $\frac{1}{2} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 10$. Cependant, ils sont tous équivalents par (ν), car, sur le type cité, chacune des 9 transformations

$$\nu_i\nu_j (i = 1, 2, 3; j = 4, 5, 6)$$

équivaut à la transposition τ_{ij}. La famille unique de cette classe a justement pour type $\sigma_6'^{1} = \nu'\sigma_6^{1}$, comme le montre $\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 31; 45, 56, 64)$, dont tous les ε_{ij} sont négatifs.

ζ_2. Il y a $\frac{6!}{6 \times 2} = 60$ S_6 dont le diagramme est un hexagone; un type en est $(12, 23, 34, 45, 56, 61)$. Cependant

$$\nu_1\nu_4(12, 23, 34, 45, 56, 61) = (13, 32, 24, 46, 65, 51) = \tau_{23}\tau_{56}(12, 23, 34, 45, 56, 61);$$

par suite, $\nu_2\nu_5$ et $\nu_3\nu_6$ transforment ce type comme le font respectivement $\tau_{34}\tau_{61}$ et $\tau_{45}\tau_{12}$; la classe de ces S_6 ne contient que 15 familles. Ce n'est pas une classe nouvelle, puisque

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 34, 45, 56, 61) = (14; 25; 36) \in C(\sigma_6^{5}).$$

12. La discussion est close puisqu'on ne peut tracer plus de six segments sans tripler au moins un des six sommets. Les 1014 familles f irréductibles par (ν)

se partagent ainsi en 16 classes, dont nous donnons le tableau, avec les renseignements habituels, en n'indiquant que les S_6 sans sommet triple :

	$C_1 = C(\sigma_6^1) = C(\ )$	$1f$	$\Delta_6^1 = (1-a)^5(1+5a)$
ζ_1 :	$C'_1 = C(\sigma_6'^1) = \nu' C_1$	$1f$	$\Delta_6'^1 = (1+a)^5(1-5a)$
α :	$C_2 = C(\sigma_6^2) = C(12)$	$15f$	$\Delta_6^2 = (1-a)^3(1+a)(1+2a-11a^2)$
η_2 :	$C'_2 = C(\sigma_6'^2) = \nu' C_2$	$15f$	$\Delta_6'^2 = (1+a)^3(1-a)(1-2a-11a^2)$
β_1 :	$C_3 = C(\sigma_6^3) = C(12; 34)$	$45f$	$\Delta_6^3 = (1-a)(1+a)^2(1-3a)(1+2a-7a^2)$
δ_2 et η_1 :	$C'_3 = C(\sigma_6'^3) = \nu' C_3$	$45f$	$\Delta_6'^3 = (1+a)(1-a)^2(1+3a)(1-2a-7a^2)$
β_2 :	$C_4 = C(\sigma_6^4) = C(12, 13)$	$60f$	$\Delta_6^4 = (1-a)^3(1+3a-9a^2-19a^3)$
δ_3 :	$C'_4 = C(\sigma_6'^4) = \nu' C_4$	$60f$	$\Delta_6'^4 = (1+a)^3(1-3a-9a^2+19a^3)$
γ_1 et ζ_2 :	$C_5 = C(\sigma_6^5) = C(12; 34; 56)$	$15f$	$\Delta_6^5 = (1+a)^3(1-3a)^2(1+3a)$
δ_5 :	$C'_5 = C(\sigma_6'^5) = \nu' C_5$	$15f$	$\Delta_6'^5 = (1-a)^3(1+3a)^2(1-3a)$
γ_2 :	$C_6 = C'_6 = C(\sigma_6^6) = C(12, 13; 45)$	$180f$	$\Delta_6^6 = \Delta_6'^6 = (1-a)(1+a)(1-14a^2+29a^4)$
γ_3 :	$C_7 = C(\sigma_6^7) = C(12, 23, 34)$	$180f$	$\Delta_6^7 = (1-a)(1-5a^2)(1+a-9a^2-a^3)$
δ_1 et η_3 :	$C'_7 = C(\sigma_6'^7) = \nu' C_7$	$180f$	$\Delta_6'^7 = (1+a)(1-5a^2)(1-a-9a_2+a^3)$
γ_4 :	$C_8 = C'_8 = C(\sigma_6^8) = C(12, 23, 31)$	$20f$	$\Delta_6^8 = \Delta_6'^8 = (1-a)^2(1+a)^2(1-13a^2)$
δ_4 :	$C_9 = C'_9 = C(\sigma_6^9) = C(12, 23, 34, 45)$	$180f$	$\Delta_6^9 = \Delta_6'^9 = (1-a)(1+a)(1-3a)(1+3a)(1-5a^2)$
η_4 ;	$C_{10} = C'_{10} = C(\sigma_6^{10}) = C(12, 23, 34, 45, 51)$	$12f$	$\Delta_6^{10} = \Delta_6'^{10} = (1-5a^2)^3$

Seuls σ_6^1 et $\sigma_6'^1$ sont strictement isogonaux, et les systèmes directement semblables à un système strictement isogonal sont les 64 systèmes des deux premières classes C_1 et C'_1. On observe que les déterminants des 16 classes sont des polynomes distincts, donc deux S_6 isogonaux sont directement semblables pourvu que leurs déterminants Δ_6 soient deux polynomes identiques.

CHAPITRE III.

Les heptasphères isogonaux.

13. Les $2^{21} = 2\,097\,152$ S_7 se groupent en $2^{15} = 32\,768$ familles f contenant chacune $2^6 = 64$ systèmes équivalents par (ν). Les transformations ν_i modifient les six $\varepsilon_{i\alpha}$ dont l'indice α diffère de i, les produits $\nu_i\nu_j (i \neq j)$ changent les signes des dix $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul indice est i ou j, et les $\nu_i\nu_j\nu_k$ (i, j, k distincts) changent les douze $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul indice est i, j ou k. Ces transformations sont les seuls éléments de (ν), avec l'identité. La discussion ne peut pas ignorer les S_7 dont le diagramme a un ou plusieurs points triples. Cependant, si S_7 a deux sommets triples i, j non adjacents, les six segments qui en partent deviennent quatre segments par $\nu_i\nu_j$, ce qui réduit de deux unités le nombre des traits du graphique ; autrement dit, un tel S_7 est directement semblable à un heptasphère rencontré

auparavant dans la discussion. Pour un motif analogue, il est inutile d'examiner les S_7 qui ont deux points triples adjacents, i et j, mais aucun point double non adjacent à i, car ν_i ne crée aucun point triple, et fait du sommet j un point double. L'examen des S_7 dont un sommet i est d'ordre plus grand que 3 est sans objet puisque ν_i réduirait de deux unités au moins le nombre des traits du graphique.

Nous prenons toujours le système strictement isogonal

$$\sigma_7^1 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{array} \right\} = (\quad)$$

pour type de la première famille f, qui constitue la première classe C_1.

α. Les S_7 dont un seul ε_{ij} vaut -1 ne peuvent être semblables à σ_7^1, mais le sont entre eux par (τ). Aux 21 symboles ε_{ij} correspondent ainsi 21 familles f, réductibles l'une à l'autre par (τ), et groupées dans une même classe $C_2 = C(\sigma_7^2)$, dont le système type est, par exemple, $\sigma_7^2 = (12)$.

β. Comme pour $n = 6$, les S_7 représentés par deux traits se groupent en deux classes.

β_1. Sans sommet double, S_7 est du type

$$\sigma_7^3 = (12\,;\,34)\,;$$

ces S_7 sont au nombre de $\frac{1}{2} \times \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} = 105$, et fournissent par (ν) autant de familles.

β_2. Les S_7 qui ont un point double ont pour type

$$\sigma_7^4 = (12,\,13),$$

et donnent également 105 familles.

14. Les S_7 dont le diagramme a trois traits ont un point triple au plus. S'il n'y en a pas, les sommets vérifient le système d'équations

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 7,$$

donc $d = c - 1 \leqq 3$; on en conclut que $1 \leqq c \leqq 4$, ce qui donne 4 solutions

(1) $\quad d = 0, \quad s = 6, \quad c = 1,$

(2) $\quad d = 1, \quad s = 4, \quad c = 2,$

(3) $\quad d = 2, \quad s = 2, \quad c = 3,$

(4) $\quad d = 3, \quad s = 0, \quad c = 4.$

Avec un sommet triple, la seule solution est évidemment

$$t=1, \quad d=0, \quad s=3, \quad c=3, \tag{5}$$

t désignant systématiquement le nombres des points triples.

γ_1. Les S_7 fournis par (1) sont du type

$$\sigma_7^8=(12;\,34;\,56),$$

et au nombre de $7\times 5\times 3=105$; ils donnent, par (ν), autant de familles.

γ_2. Les S_7 déduits de (2) sont ceux du type

$$\sigma_7^6=(12,\,13;\,45),$$

au nombre de $7\times\frac{6\times 5}{2}\times\frac{4\times 3}{2}=630$, associés à autant de familles.

γ_3. (3) ne donne que les S_7 du type

$$\sigma_7^7=(12,\,23,\,34);$$

ils sont au nombre de $\frac{7\times 6\times 5\times 4}{2}=420$, et fournissent par (ν) autant de familles.

γ_4. Les S_7 fournis par (4) sont naturellement ceux du type

$$\sigma_7^8=(12,\,23,\,31),$$

au nombre de 35, et donnant autant de familles.

γ_5. Enfin, la solution (5) fournit les S_7 du type

$$\sigma_7^9=(12,\,13,\,14);$$

ils sont au nombre de 140; ils ne donnent pourtant que 70 familles, car

$$\nu_1(12,\,13,\,14)=(15,\,16,\,17).$$

15. S_7 ne peut avoir deux sommets triples si son diagramme a moins de cinq traits, donc $t=0$ ou 1 pour les S_7 à quatre ε_{ij} négatifs. Ceux pour lesquels $t=0$ sont déterminés par les relations

$$2d+s=8, \qquad d+s+c=7,$$

soit $d=c+1$, $s=6-2c$, donc $0\leqq c\leqq 3$; on obtient ainsi les quatre solutions

$$t=0, \quad d=1, \quad s=6, \quad c=0, \tag{6}$$
$$t=0, \quad d=2, \quad s=4, \quad c=1, \tag{7}$$
$$t=0, \quad d=3, \quad s=2, \quad c=2, \tag{8}$$
$$t=0, \quad d=4, \quad s=0, \quad c=3. \tag{9}$$

Avec $t=1$, le système à résoudre est

$$2d+s=5, \qquad d+s+c=6,$$

d'où résultent $d=c-1$, $s=7-2c$, donc $1\leq c\leq 3$; on obtient ainsi les trois solutions

(10) $t=1, \quad d=0, \quad s=5, \quad c=1,$

(11) $t=1, \quad d=1, \quad s=3, \quad c=2,$

(12) $t=1, \quad d=2, \quad s=1, \quad c=3.$

δ_1. Les S_7 déduits de (6) sont ceux du type

$$\sigma_7^{10}=(12,\ 13;\ 45;\ 67);$$

ils sont au nombre de $7\times\frac{6\times 5}{2}\times 3=315$, et donnent autant de familles.

δ_2. Lorsque $d=2$, les deux points doubles peuvent être unis, ou non, comme pour les S_6. Dans le premier cas, S_7 est du type

$$\sigma_7^{11}=(12,\ 23,\ 34;\ 56);$$

ces S_7 sont sept fois plus nombreux que les S_6 du même type, donc au nombre de 1260, et donnent autant de familles.

δ_3. Les autres solutions de (7) sont les S_7 du type

$$\sigma_7^{12}=(12,\ 13;\ 45,\ 46),$$

au nombre de $\frac{7!}{8}=630$; ils donnent autant de familles.

δ_4. Comme pour $n=5$ ou 6, (8) convient à deux types de systèmes. Un premier type est

$$\sigma_7^{13}=(12,\ 23,\ 31;\ 45);$$

il y a $35\times 6=210$ S_7 de ce type, et autant de familles.

δ_5. Un deuxième type est

$$\sigma_7^{14}=(12,\ 23,\ 34,\ 45);$$

il y a $\frac{7!}{4}=1260$ S_7 de ce type, et autant de familles.

δ_6. La solution (9) conduit aux seuls systèmes représentés par un quadrilatère du type

$$\sigma_7^{15}=(12,\ 23,\ 34,\ 41).$$

Ils sont au nombre de $7\times 5\times 3=105$, et fournissent autant de familles.

δ_7. Les S_7 qui satisfont à (10) sont du type

$$\sigma_7^{16}=(12,\ 13,\ 14;\ 56),$$

ils sont au nombre de $7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} \times 3 = 420$, et donnent, par (ν), autant de familles.

δ_8. Les S_7 déduits de (11) sont ceux du type

$$\sigma_7^{17} = (12, 23; 14, 15);$$

il y en a $7 \times 6 \times 5 \times \frac{4 \times 3}{2} = 1260$, mais ils ne donnent que 630 familles, d'après

$$\nu_1(12, 23; 14, 15) = (13, 32; 16, 17) = \tau_{23}\tau_{46}\tau_{57}\sigma_7^{17}.$$

δ_9. Enfin (12) fournit les S_7 du type (12, 23, 31; 14), qui sont au nombre de $35 \times 12 = 420$. C'est effectivement la classe $C(\sigma_7^{16})$, car

$$\nu_1(12, 23, 31; 14) = (15, 16, 17; 23) = \tau_{25}\tau_{36}\tau_{47}\sigma_7^{16}.$$

16. Un S_7 représenté par cinq traits a deux points triples au plus. Si $t = 2$, la remarque que nous avons faite au début du paragraphe 13 permet de supposer que les deux points triples sont unis; les points doubles possibles leur sont nécessairement adjacents, et la même remarque permet d'écarter ces systèmes.

Les S_7 sans point triple sont associés au système d'équations

$$2d + s = 10, \quad d + s + c = 7,$$

de sorte que $d = c + 3$, $s = 4 - 2c$; on a donc $0 \leq c \leq 2$, et, par suite, trois solutions

(13) $t = 0, \quad d = 3, \quad s = 4, \quad c = 0,$

(14) $t = 0, \quad d = 4, \quad s = 2, \quad c = 1,$

(15) $t = 0, \quad d = 5, \quad s = 0, \quad c = 2.$

Si $t = 1$, le système à résoudre est

$$2d + s = 7, \quad d + s + c = 6,$$

ce qui donne $d = c + 1$, $s = 5 - 2c$, donc $0 \leq c \leq 2$; nous obtenons encore trois solutions

(16) $t = 1, \quad d = 1, \quad s = 5, \quad c = 0,$

(17) $t = 1, \quad d = 2, \quad s = 3, \quad c = 1,$

(18) $t = 1, \quad d = 3, \quad s = 1, \quad c = 2.$

Les diagrammes qui vérifient (13) sont de trois sortes, selon que quatre, deux ou zéro points simples sont isolés des points doubles. Ceux que fournissent (14) et (15) sont analogues à ceux déduits au paragraphe 10 des équations (8) et (9); il y en a respectivement trois types distincts et un type. La solution (16) fournit deux sortes de systèmes suivant que le sommet triple est adjacent, ou non, au point double. Dans les S_7 qui vérifient (17), le point triple est nécessairement adjacent à un ou deux points doubles; la première

circonstance fournit un seul type, et la deuxième en donne deux. La solution (18) donne deux sortes de systèmes, selon que le sommet simple est uni, ou non, au point triple.

η_{11}. Les S_7 qui vérifient (13), et dont les quatre sommets simples sont isolés des points doubles, sont du type (12, 23, 31; 45; 67); il y en a $\frac{7\times 6\times 5}{3!}\times 3 = 105$, et autant de familles; c'est le nombre obtenu en δ_6, et la classe formée ici est justement la classe inversement semblable à $C(\sigma_7^{15})$; en effet,

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 31; 45; 67) = (65, 57, 74, 46) = \tau_{16}\tau_{25}\tau_{37}\sigma_7^{15}.$$

Nous prendrons pour type de cette classe $\sigma_7'^{15} = \nu'\sigma_7^{15}$.

η_{12}. Lorsque deux sommets simples seulement sont isolés des points doubles, les S_7 déduits de (13) sont du type

$$\sigma_7^{18} = (12, 23, 34, 45; 67);$$

ils sont au nombre de $\frac{7\times 6}{2}\times\frac{5!}{2} = 1260$, et donnent autant de familles.

η_{13}. La troisième solution fournie par (13) consiste en les S_7 du type (12, 23, 34; 56, 67), et trois fois plus nombreux que ceux de l'alinéa γ_3, soit au nombre de $420\times 3 = 1260$. C'est le nombre trouvé en δ_2, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 34; 56, 67) = (24, 41, 13; 57) \in C(\sigma_7^{14}).$$

Nous prendrons $\sigma_7'^{11} = \nu'\sigma_7^{14}$ comme type de cette classe de 1260 familles.

η_{14}. A la classe formée à l'alinéa η_4 du paragraphe 10 correspondent ici les S_7 du type (12, 23, 34, 41; 56). Leur nombre est donc $45\times 7 = 315$, et ils donnent autant de familles. C'est le nombre trouvé pour la classe $C(\sigma_7^{10})$ en δ_1, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 41; 56) = (57, 76; 13; 24).$$

Nous prendrons $\sigma_7'^{10} = \nu'\sigma_7^{15}$ pour type de cette classe de 315 familles.

η_{15}. La deuxième solution déduite de (14) est formée par les systèmes du type obtenu à l'alinéa η_{12} (§ 10), soit (12, 23, 31; 45, 56); ils sont au nombre de $60\times 7 = 420$, et fournissent autant de familles. C'est le nombre trouvé pour $C(\sigma_7^{16})$, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 45, 56) = (71, 72, 73; 46).$$

Nous désignerons cette classe par $C(\sigma_7'^{16})$ où $\sigma_7'^{16} = \nu'\sigma_7^{16}$.

η_{16}. L'alinéa η_3 (§ 10) donne de même le troisième type associé à (14), soit

$$\sigma_7^{19} = (12, 23, 34, 45, 56).$$

Ces S_7 sont au nombre de $360\times 7 = 2520$, et fournissent autant de familles.

η_{17}. Enfin l'alinéa η_4 (§ 10) donne les S_7 associés à (15), du type de

$$\sigma_7^{20} = (12, 23, 34, 45, 51).$$

Il y en a $\frac{7^2 \times 7}{2} = 252$, et ils donnent autant de familles.

η_{18}. Les S_7 de la solution (16), dont les points double et triple ne sont pas adjacents, sont du type de (12, 13, 14; 56, 67); ils sont au nombre de $7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times 3 = 420$, mais ne se répartissent que dans 210 familles, car

$$\nu_1\nu_6(12, 13, 14; 56, 67) = (62, 63, 64; 51, 17) = \tau_{16}(12, 13, 14; 56, 67).$$

C'est le nombre des familles de la classe de σ_7^{13}, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 13, 14; 56, 67) = (23, 34, 42; 57).$$

Nous prendrons $\nu'\sigma_7^{13} = \sigma_7'^{13}$ pour type de cette classe.

η_{19}. Les S_7 de la solution (16) dont le point double est uni au point triple sont du type

$$\sigma_7^{21} = (12, 23; 14, 15; 67);$$

ils sont au nombre de $7 \times 6 \times 5 \times \frac{4 \times 3}{2} = 1260$, et donnent autant de familles.

η_{10}. Les S_7 de la solution (17), dont le point triple est uni (9) à un seul point double, sont du type

$$\sigma_7^{22} = (12, 23, 34; 15, 16).$$

Il y en a $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais ils ne donnent que 1260 familles, d'après

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34; 15, 16) = (37, 71, 14; 35, 36) = \tau_{13}\tau_{27}\sigma_7^{22}.$$

η_{11}. Lorsque le point triple d'un S_7 associé à (17) est uni aux deux points doubles, ceux-ci peuvent être eux-mêmes adjacents ou non. Dans le premier cas, un trait unit deux des points simples, et le S_7 est du type (12, 23, 31; 14; 56). Le nombre des S_7 de ce type est $\frac{7 \times 6 \times 5}{2} \times 4 \times 3 = 1260$, mais ils ne donnent que 630 familles, d'après

$$\nu_1(12, 23, 31; 14; 56) = (15, 56, 61; 17; 23) = \tau_{25}\tau_{36}\tau_{17}(12, 23, 31; 14; 56).$$

La classe obtenue est la classe inversement semblable à $C(\sigma_7^{12})$, puisque (10)

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14; 56) = (42, 43; 75, 76) = \tau_{14}\tau_{17}\sigma_7^{12}.$$

Nous prendrons $\sigma_7'^{12} = \nu'\sigma_7^{12}$ pour type de cette classe.

η_{12}. Lorsque les deux points doubles, adjacents au point triple, sont adja-

(9) Rappelons qu'uni et adjacent sont synonymes.

(10) Le produit $\tau_{14}\tau_{74}$ s'entend en l'effectuant de droite à gauche.

cents à deux sommets simples, le S_7 est du type

$$\sigma_7^{23} = (12, 23; 14, 45; 16).$$

Ces systèmes sont au nombre de $\frac{7!}{2} = 2520$, mais ne donnent que 1260 familles, car

$$\nu_1(12, 23; 14, 45; 16) = (13, 32; 15, 54; 17) = \tau_{23}\tau_{45}\tau_{67}\sigma_7^{23}.$$

η_{13}. Les S_7 qui vérifient (18), et dont le sommet simple est uni au point triple, sont du type

$$\sigma_7^{24} = (12, 23, 34, 41; 15);$$

il y en a $\frac{7\times 6\times 5\times 4}{2}\times 3 = 1260$, mais ils ne donnent que 630 familles, d'après

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34, 41; 15) = (36, 61, 17, 73; 35) = \tau_{13}\tau_{26}\tau_{47}\sigma_7^{24}.$$

η_{14}. Les autres S_7 fournis par (18) sont ceux du type (12, 23, 31; 14, 45). Ils sont au nombre de 1260, mais ne donnent rien d'autre que la classe $C(\sigma_7^{21})$, puisque

$$\nu_1(12, 23, 31; 14, 45) = (15, 54; 16, 17; 23).$$

17. Les graphiques formés par six segments vérifient le système d'équations

$$3t + 2d + s = 12, \qquad t + d + s + c = 7,$$

donc $t \leq 4$. Ceux qui n'ont pas de point triple, et qui font l'objet de ce paragraphe, se rattachent au système

$$2d + s = 12, \qquad d + s + c = 7,$$

d'où l'on tire $d = c + 5$, $s = 2 - 2c$, donc $c \leq 1$. On obtient ainsi les deux cas

(19) $\qquad t = 0, \quad d = 5, \quad s = 2, \quad c = 0,$

(20) $\qquad t = 0, \quad d = 6, \quad s = 0, \quad c = 1.$

Le solution (19) fournit quatre types de diagramme, suivant que celui-ci comprend un pentagone, un quadrilatère, un triangle, ou une seule ligne brisée ouverte. Les graphiques conformes à (20) sont analogues à ceux que nous avons formés au paragraphe 11, avec $n = 6$.

ζ_{21}. Un premier type conforme à (19) est (12, 23, 34, 45, 51; 67). Les S_7 de ce type sont au nombre de $\frac{7\times 6}{2}\times\frac{5!}{5\times 2} = 252$; c'est le nombre des systèmes du type de σ_7^{20}, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 45, 51; 67) = (13, 35, 52, 24, 41) = \tau_{23}\tau_{45}\sigma_7^{20}.$$

Nous formons donc ici la classe $C(\sigma_7'^{20})$, de 252 familles, dont un type est $\sigma_7'^{20} = \nu'\sigma_7^{20}$.

ζ_2. Les S_7 conformes à (19), et qui comprennent un quadrilatère, sont du type (12, 23, 34, 41; 56, 67). Ils sont au nombre de $7 \times \frac{6\times 5}{2} \times \frac{4!}{4\times 2} = 315$, mais ne donnent que 105 familles; en effet

$$\nu_1\nu_3\nu_6(12, 23, 34, 41; 56, 67) = (15, 53, 37, 71; 26, 64) = \tau_{25}\tau_{47}(12, 23, 34, 41; 56, 67),$$

et, de même, $\nu_2\nu_4\nu_6$ transforme ce système type comme $\tau_{15}\tau_{37}$. Ce nombre est celui des familles obtenues à l'alinéa γ_1, ce qui s'explique par

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 41; 56, 67) = (13, 24, 57) = \tau_{23}\tau_{67}\sigma_7^5.$$

Nous prendrons $\sigma_7'^5 = \nu'\sigma_7^5$ comme type de cette classe inversement semblable à $C(\sigma_7^5)$.

ζ_3. Les solutions de (19) dont le graphique contient un triangle sont les S_7 du type (12, 23, 31; 45, 56, 67). Il y en a $\frac{7\times 6\times 5}{3!} \times \frac{4!}{2} = 420$, donnant autant de familles. C'est la classe inversement semblable à $C(\sigma_7^7)$, comme le montre

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 31; 45, 56, 67) = (64, 47, 75).$$

Nous désignerons cette classe par $C(\sigma_7'^7)$ où $\sigma_7'^7 = \nu'\sigma_7^7$.

ζ_4. La quatrième solution déduite de (19) est la classe des S_7 qui sont du type de (12, 23, 34, 45, 56, 67). Ces S_7, au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, ne donnent que 1260 familles, car

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 34, 45, 56, 67) = (52, 27, 74, 41, 16, 63) = \tau_{15}\tau_{37}(12, 23, 34, 45, 56, 67).$$

Cette classe est la classe inversement semblable à $C(\sigma_7^{23})$, d'après

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 45, 56, 67) = (41, 13; 45, 57; 42).$$

On prendra $\sigma_7'^{23} = \nu'\sigma_7^{23}$ pour type de cette classe.

ζ_5. Un premier type de système vérifiant (20) a la représentation des S_6 formés à l'alinéa ζ_1 (§ 11), soit (12, 23, 31; 45, 56, 64). Le nombre de ces S_7 est $10 \times 7 = 70$, et ils donnent autant de familles. C'est le nombre trouvé pour la classe $C(\sigma_7^9)$, ce qui s'explique par

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 31; 45, 56, 64) = (74, 75, 76).$$

Il s'agit donc de la classe $C(\sigma_7'^9)$, où $\sigma_7'^9 = \nu'\sigma_7^9$.

ζ_6. La deuxième solution fournie par (20) est la classe des S_7 du type

$$\sigma_7^{25} = (12, 23, 34, 45, 56, 61),$$

représenté par un hexagone. Ils sont sept fois plus nombreux que les S_6 de l'alinéa ζ_2 (§ 11), et donnent autant de familles, soit 420.

18. Les S_7 représentés par six segments, avec un seul sommet triple,

se rattachent au système de relations

$$2d+s=9, \qquad d+s+c=6;$$

ils sont donc tels qu'on ait $d=c+3$, $s=3-2c$. On obtient ainsi les deux solutions

(21) $\qquad t=1, \quad d=3, \quad s=3, \quad c=0,$

(22) $\qquad t=1, \quad d=4, \quad s=1, \quad c=1.$

Sept formes de graphique sont conformes à (21) : dans deux d'entre elles, deux des points simples sont adjacents, le troisième sommet simple étant uni à un point double ou au point triple; on obtient également deux formes de diagramme où deux points simples sont adjacents à deux points doubles, suivant que le troisième point simple est uni à un troisième point double ou au point triple; deux formes de graphique ont deux points simples unis au point triple; enfin un type de dessin a deux points simples unis à un même point double. On voit de même que (22) conduit à trois types de graphique, suivant que le point simple est uni au point triple, ou a un point double adjacent au point triple, ou à un point double adjacent à un autre point double.

ζ_7. La première solution déduite de (21) est du type de (12, 23, 31; 14, 45; 67). Ces S_7 sont au nombre de $7\times\frac{6\times5}{2}\times4\times3=1260$, mais ils ne donnent que 630 familles, d'après

$$\nu_1(12, 23, 31; 14, 45; 67)=(16, 67, 71; 15, 54; 23)=\tau_{26}\tau_{37}\tau_{45}(12, 23, 31; 14, 45; 67).$$

D'autre part,

$$\nu'\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14, 45; 67)=(52, 24, 43, 35; 51)=\tau_{15}\tau_{34}\sigma_7^{24}$$

montre qu'il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{24})$, où $\sigma_7'^{24}=\nu'\sigma_7^{24}$.

ζ_8. La deuxième solution conforme à (21) donne les S_7 du type de (12, 23, 34, 41; 15; 67). Il y en a également 1260, et ils donnent autant de familles. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{21})$ où $\sigma_7'^{21}=\nu'\sigma_7^{21}$, car ([11])

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 41; 15; 67)=(51, 13; 56, 57; 24)\in C(\sigma_7^{21}).$$

ζ_9. Dans la troisième solution déduite de (21), les trois points simples sont unis aux trois points doubles, eux-mêmes unis au point triple. Ces S_7 sont donc du type (12, 23; 14, 45; 16, 67). Il y en a $\frac{1}{6}7!=840$, mais seulement 420 familles, d'après

$$\nu_1(12, 23; 14, 45; 16, 67)=(13, 32; 15, 54; 17, 76)=\tau_{23}\tau_{45}\tau_{67}(12, 23; 14, 45; 16, 67).$$

([11]) $\nu'\nu_6\nu_7$ donnerait un S_7 du type formé à l'alinéa η_{14}.

Ce n'est rien d'autre que la classe $C(\sigma_7^{25})$, comme le montre

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23; 14, 45; 16, 67) = (25, 56, 63, 34, 47, 72).$$

ζ_{10}. La quatrième solution conforme à (21) est du type (12, 23, 34; 15, 56; 17). Cela fait $7! = 5040$ systèmes, répartis dans 2520 familles, car

$$\nu_1\nu_3\nu_6(12, 23, 34; 15, 56; 17) = (67, 73, 35; 64, 41; 62) = \tau_{16}\tau_{27}\tau_{45}(12, 23, 34; 15, 56; 17).$$

C'est la classe $C(\sigma_7'^{19})$ où $\sigma_7'^{19} = \nu'\sigma_7^{19}$, comme le montre

$$\nu'\nu_2\nu_3\nu_4(12, 23, 34; 15, 56; 17) = (42, 21, 16, 67, 75) \in C(\sigma_7^{19}).$$

ζ_{11}. La cinquième solution fournie par (21) a un diagramme du type de (12, 23, 34, 45; 16, 17), où le troisième point simple est relié, mais non adjacent, au point triple. Mais cette classe n'est rien d'autre que la classe $C(\sigma_7'^{21})$ formée à l'alinéa ζ_8, car

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 34, 45; 16, 17) = (56, 63, 37, 75; 52; 14).$$

ζ_{12}. Les S_7 fournis par (21), et dont les trois points simples sont unis au point triple, sont ceux du type de (12, 13, 14; 56, 67, 75). Bien qu'au nombre de $\frac{7\times 6\times 5\times 4}{3!} = 140$, ils ne fournissent que 35 familles; en effet

$$\nu_1\nu_5(12, 13, 14; 56, 67, 75) = (52, 53, 54; 16, 67, 71) = \tau_{15}(12, 13, 14; 56, 67, 75),$$

et, de même, $\nu_1\nu_6$ et $\nu_1\nu_7$ équivalent respectivement à τ_{16} et τ_{17}. Il s'agit d'ailleurs de la classe $C(\sigma_7'^{8})$, où $\sigma_7'^{8} = \nu'\sigma_7^{8}$, d'après

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 13, 14; 56, 67, 75) = (42, 23, 34) = \tau_{14}\sigma_7^{8}.$$

ζ_{13}. La dernière solution que fournit (21) est l'ensemble des S_7 du type (12, 23, 31; 14; 56, 67). Ils sont au nombre de $7\times\frac{6\times 5}{2}\times 4\times 3 = 1260$, mais il n'y a que 630 familles, parce que

$$\nu_1\nu_6(12, 23, 31; 14; 56, 67) = (62, 23, 36; 64; 51, 17) = \tau_{16}(12, 23, 31; 14; 56, 67).$$

C'est d'ailleurs la classe $C(\sigma_7'^{6})$ inversement semblable à $C(\sigma_7^{6})$, d'après

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14; 56, 67) = (42, 43; 57) = \tau_{17}\tau_{14}\tau_7^{6}.$$

ζ_{14}. Un type de la première solution déduite de (22) est

$$\sigma_7^{26} = (12, 23, 34, 45, 51; 16).$$

Cela fait $\frac{1}{2}7! = 2520\ S_7$, mais seulement 840 familles, car

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34, 45, 51; 16) = (37, 71, 14, 45, 53; 36) = \tau_{13}\tau_{27}\sigma_7^{26},$$

donc, pareillement,

$$\nu_1\nu_4\sigma_7^{26} = \tau_{14}\tau_{57}\sigma_7^{26}.$$

ζ_{15}. Les S_7 de la deuxième solution conforme à (22) sont ceux du type (12, 23, 34, 41; 15, 56). Il y en a encore $\frac{1}{2}7! = 2520$, répartis dans 1260 familles, car

$$\nu_2\nu_4\nu_5(12, 23, 34, 41; 15, 56) = (72, 26, 64, 47; 75, 53) = \tau_{17}\tau_{36}(12, 23, 34, 41; 15, 56).$$

Il s'agit d'ailleurs de la classe $C(\sigma_7'^{18})$, où $\sigma_7'^{18} = \nu'\sigma_7^{18}$, puisque

$$\nu'\nu_3\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 41; 15, 56) = (31, 15, 57, 76; 24) \in C(\sigma_7^{18}).$$

ζ_{16}. La dernière solution déduite de (22) est l'ensemble des S_7 du type (12, 23, 31; 14, 45, 56). Au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, ils donnent 1260 familles, car

$$\nu_1\nu_5(12, 23, 31; 14, 45, 56) = (52, 23, 35; 57, 71, 16) = \tau_{15}\tau_{47}(12, 23, 31; 14, 45, 56).$$

Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{22})$, où $\sigma_7'^{22} = \nu'\sigma_7^{22}$, puisque

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56) = (71, 14, 46; 72, 73) \in C(\sigma_7^{22}).$$

19. Les S_7 dont le diagramme est formé par six traits, avec deux points triples, sont associés au système d'équations

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 5,$$

donc tels qu'on ait $d = c + 1$, $s = 4 - 2c$. On obtient ainsi les trois solutions

(23) $\quad t = 2, \quad d = 1, \quad s = 4, \quad c = 0,$

(24) $\quad t = 2, \quad d = 2, \quad s = 2, \quad c = 1,$

(25) $\quad t = 2, \quad d = 3, \quad s = 0, \quad c = 2.$

Rappelons-nous la remarque faite au début du chapitre. Il suffit alors de considérer les figures dont les deux points triples sont adjacents. Comme il est impossible de se conformer à (23) sans que le point double unique soit adjacent à l'un des sommets triples, (23) ne peut conduire à un type nouveau.

ζ_{17}. La même observation nous permet de n'examiner, parmi les S_7 conformes à (24), que ceux dont les deux sommets triples sont adjacents, sans qu'aucun d'eux soit adjacent aux deux points doubles. On n'obtient ainsi que les S_7 du type unique

$$\sigma_7^{27} = (12, 23, 34, 41; 15; 26).$$

Ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais ils ne donnent que 360 familles, grâce à la relation

$$\nu_1(12, 23, 34, 41; 15; 26) = (13, 32, 26, 61; 17; 34) = \tau_{23}\tau_{46}\tau_{57}\sigma_7^{27},$$

et à celles qu'on en déduit en permutant les sommets triples [12], et par itéra-

[12] Bien entendu, une telle permutation affecte d'autres sommets par raison de symétrie.

tion; il s'agit d'abord de

$$\nu_2\sigma_7^{27} = \tau_{14}\tau_{35}\tau_{67}\sigma_7^{27},$$

puis, par itération, de

$$\nu_1\nu_3\sigma_7^{27} = \tau_{13}\tau_{26}\tau_{47}\sigma_7^{27}; \qquad \nu_2\nu_4\sigma_7^{27} = \tau_{15}\tau_{24}\tau_{37}\sigma_7^{27};$$

et enfin, par une nouvelle itération, de

$$\nu_1\nu_3\nu_6\sigma_7^{27} = \tau_{16}\tau_{27}\tau_{45}\sigma_7^{27}; \qquad \nu_2\nu_4\nu_5\sigma_7^{27} = \tau_{17}\tau_{25}\tau_{36}\sigma_7^{27}.$$

ζ_{18}. Pour les mêmes raisons, un seul type des S_7 fournis par (25) mérite la discussion. Il s'agit de ceux qui sont du type (12, 23, 34, 41; 15, 52), mais ils appartiennent à la classe $C(\sigma_7'^{18})$ déjà formés en ζ_{15}, car

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34, 41; 15, 52) = (37, 71, 16, 63; 35, 52).$$

20. Lorsque $t=3$, les S_7 à six ε_{ij} négatifs sont fournis par le système de relations

$$2d+s=3, \qquad d+s+c=4,$$

donc par $d=c-1$, $s=5-2c$. Les seules valeurs admissibles de c sont $c=1$ et $c=2$, auxquelles correspondent les deux possibilités

$$t=3, \quad d=0, \quad s=3, \quad c=1,$$
$$t=3, \quad d=1, \quad s=1, \quad c=2.$$

Les seuls diagrammes à retenir sont ceux dont les points triples forment un triangle. Mais ceux qui vérifient la première solution n'ont aucun point double, et ceux qui sont conformes à la deuxième peuvent être également ignorés car leur point double unique est nécessairement adjacent à un, et même deux, sommet triple.

Enfin, lorsque $t=4$, le système d'équations associé

$$2d+s=0, \qquad d+s+c=3$$

n'a d'autre solution que $d=s=0$, $c=3$. Les quatre points triples sont unis deux à deux, mais ces S_7 sont hors de discussion puisqu'ils sont sans point double.

21. Les graphiques formés par sept segments vérifient le système d'équations

$$3t+2d+s=14, \qquad t+d+s+c=7,$$

donc $t\leq 4$. Ceux qui n'ont pas de point triple, et qui nous intéressent tout d'abord, sont assujettis aux équations

$$2d+s=14, \qquad d+s+c=7.$$

de sorte que $d = c + 7$, $s + 2c = 0$; il n'y a pas d'autre solution que

$$t = 0, \qquad d = 7, \qquad s = 0, \qquad c = 0.$$

Les sept points doubles ne peuvent former qu'un heptagone ou la réunion d'un quadrilatère et d'un triangle.

λ_1. Dans le premier cas, les S_7 sont du type (12, 23, 34, 45, 56, 67, 71). Il y en a $\frac{7!}{2 \times 7} = 360$, et ils donnent autant de familles. C'est le nombre des familles de la classe $C(\sigma_7^{27})$ formée à l'alinéa ζ_{17}. Il s'agit effectivement de la classe inversement semblable $C(\sigma_7'^{27})$, où $\sigma_7'^{27} = \nu'\sigma_7^{27}$, puisque

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 34, 45, 56, 67, 71) = (47, 71, 13, 34; 46; 75) \in C(\sigma_7^{27}).$$

λ_2. Les S_7 représentés par un quadrilatère et un triangle sont du type (12, 23, 34, 41; 56, 67, 75). Il y en a $\frac{7!}{2 \times 4 \times 3!} = 105$, et ils donnent autant de familles. Il s'agit d'ailleurs de la classe $C(\sigma_7'^{3})$, où $\sigma_7'^{3} = \nu'\sigma_7^{3}$, d'après

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 41; 56, 67, 75) = (13, 24) = \tau_{23}\sigma_7^{3}.$$

22. Lorsque $t = 1$, les S_7 en question sont fournis par les équations

$$2d + s = 11, \qquad d + s + c = 6,$$

donc $d = c + 5$, $s = 1 - 2c$; il n'y a pas d'autre solution que

$$t = 1, \qquad d = 5, \qquad s = 1, \qquad c = 0.$$

Le point simple ne peut terminer une ligne brisée isolée du point triple. Si un segment l'unit à celui-ci, l'ablation de ce segment donne le graphique d'un S_6 à six segments et six sommets doubles, de l'un des deux types formés au paragraphe 11. Les diagrammes où deux segments relient le point simple au point triple se rattachent de même au S_5 à cinq segments et cinq points doubles formé à l'alinéa γ_1(§6). Enfin, lorsqu'une ligne brisée de trois, ou quatre, traits relie le point simple au point triple, celui-ci forme respectivement un quadrilatère, ou un triangle, avec les trois, ou deux, sommets doubles restants.

λ_3. Les S_7 de la première de ces cinq solutions sont du type (12, 23, 31; 14; 56, 67, 75). Leur nombre est $7 \times \frac{6 \times 5}{2} \times 4 = 420$, mais ils ne donnent que 105 familles; en effet,

$$\nu_1\nu_5(12, 23, 31; 14; 56, 67, 75) = (52, 23, 35; 54; 16, 67, 71) = \tau_{15}(12, 23, 31; 14; 56, 67, 75),$$

et $\nu_1\nu_6$, $\nu_1\nu_7$ transforment de même ce type comme τ_{16} et τ_{17} respectivement. Nous trouvons ici la classe $C(\sigma_7'^{4})$, où $\sigma_7'^{4} = \nu'\sigma_7^{4}$, car

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14; 56, 67, 75) = (42, 43) = \tau_{14}\sigma_7^{4}.$$

λ_4. Les S_7 de la deuxième solution sont du type (12, 23, 34, 45, 56, 61; 17). Ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais deux à deux équivalents par (ν), d'après

$$\nu_1\nu_4(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17) = (42, 23, 31, 15, 56, 64; 47) = \tau_{14}(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17).$$

Cette classe de 1260 familles a été formée à l'alinéa η_2 (§ 16), puisque

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17) = (25, 57, 73, 36; 14) \in C(\sigma_7^{18}).$$

λ_5. Les S_7 qui se rattachent aux S_5 de l'alinéa η_1 (§6) sont du type (12, 23, 34, 45, 51; 16, 67). Ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais trois à trois équivalents par (ν), car

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 34, 45, 51; 16, 67) = (52, 27, 74, 41, 15; 56, 63)$$

transforme ce diagramme comme $\tau_{15}\tau_{37}$, et, par symétrie, $\nu_3\nu_5\nu_6$ équivaut à $\tau_{12}\tau_{47}$. Cette classe de 840 familles n'est rien d'autre que $C(\sigma_7'^{26})$, où $\sigma_7'^{26} = \nu'\sigma_7^{26}$, d'après

$$\nu'\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 45, 51; 16, 67) = (13, 35, 52, 24, 41; 16) \in C(\sigma_7^{26}).$$

λ_6. Les S_7, dont le graphique se réduit à un quadrilatère après l'ablation de trois traits, sont ceux du type (12, 23, 34, 41; 15, 56, 67). Il y en a toujours 2520, donnant 1260 familles, d'après

$$\begin{aligned}\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 34, 41; 15, 56, 67) &= (52, 27, 74, 45; 51, 16, 63)\\ &= \tau_{15}\tau_{37}(12, 23, 34, 41; 15, 56, 67).\end{aligned}$$

C'est la classe $C(\sigma_7'^{11})$ formée à l'alinéa η_3, puisque

$$\nu_1\nu_3\nu_6(12, 23, 34, 41; 15, 56, 67) = (17, 73, 35; 46, 62) = \tau_{27}\tau_{45}(12, 23, 34; 56, 67).$$

La transformation $\nu'\nu_3\nu_6\nu_7$ fournirait directement un élément de $C(\sigma_7^{11})$.

λ_7. Les S_7 de la dernière solution sont du type (12, 23, 31; 14, 45, 56, 67). Toujours au nombre de 2520, ils ne donnent que 630 familles. En effet,

$$\nu_1\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67) = (62, 23, 36; 64, 45, 51, 17) = \tau_{16}(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67);$$

de plus

$$\begin{aligned}\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67) &= (36, 61, 13; 34, 47, 72, 25)\\ &= \tau_{13}\tau_{26}\tau_{37}(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67),\end{aligned}$$

et, par symétrie,

$$\nu_3\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67) = \tau_{12}\tau_{36}\tau_{37}(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67).$$

C'est la classe $C(\sigma_7'^{17})$, où $\sigma_7'^{17} = \nu'\sigma_7^{17}$, car

$$\nu'\nu_3\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67) = (45, 57; 42, 43) \in C(\sigma_7^{17}).$$

23. Les graphiques à sept traits et deux points triples relèvent du système d'équations

$$2d+s=8, \qquad d+s+c=5,$$

donc sont tels qu'on ait $d=c+3$, $s=2-2c$, et, par suite, $0\leq c\leq 1$. On obtient ainsi les deux solutions

(26) $\qquad t=2, \quad d=3, \quad s=2, \quad c=0,$

(27) $\qquad t=2, \quad d=4, \quad s=0, \quad c=1.$

Nous n'étudions que les S_7 dont les deux points triples sont unis. La solution (26) donne alors huit formes distinctes, et (27) en donne trois, que nous passons en revue dans les alinéas λ_8 à λ_{15} pour (26), et λ_{16} à λ_{18} pour (27).

λ_8. Les S_7 de (26) dont les deux points simples sont unis sont nécessairement représentés par un diagramme contenant un quadrilatère et un triangle construits avec les sommets multiples, du type unique (12, 23, 34, 41; 15, 52; 67). Ils sont au nombre de $\frac{1}{4}7!=1260$, et donnent autant de familles. C'est la classe $C(\sigma_7'^{14})$, où $\sigma_7'^{14}=\nu'\sigma_7^{14}$, d'après

$$\nu'\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 41; 15, 52; 67)=(13, 35, 54, 42)\in C(\sigma_7^{14}).$$

λ_9. Les S_7 dont les deux points simples sont unis à un même point double sont nécessairement du type (12; 13, 32; 14, 42; 56, 67). Il y en a $7\times\frac{6\times5}{2}\times\frac{4\times3}{2}=630$, se repartissant dans six fois moins de familles, car leur classe est la classe $C(\sigma_7'^3)$ formée à l'alinéa λ_2; on a en effet

$$\nu_3\nu_4\nu_6(12; 13, 32; 14, 42; 56, 67)=(35, 54, 47, 73; 12, 26, 61)\in C(\sigma_7'^3).$$

On pourrait aussi former directement [13]

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12; 13, 32; 14, 42; 56, 67)=(34; 57)=\tau_{15}\tau_{27}\sigma_7^3.$$

λ_{10}. Les S_7 dont les points simples sont unis à un même point triple sont du type (12; 13, 34, 45, 51; 26, 27). Il y en a $7\times6\times\frac{5\times4\times3}{2}=1260$, mais ils ne donnent que 315 familles, car ν_1, $\nu_2\nu_4$ et $\nu_1\nu_2\nu_4$ transforment ce type en trois autres S_7 de même forme. Ce n'est rien d'autre que la classe $C(\sigma_7'^{10})$, déjà formée à l'alinéa η_4, comme le montrent soit

$$\nu_2\nu_3\nu_5(12; 13, 34, 45, 51; 26, 27)=(36, 65, 57, 73; 24)\in C(\sigma_7'^{10}),$$

soit

$$\nu'\nu_2\nu_6\nu_7(12; 13, 34, 45, 51; 26, 27)=(21, 14; 35; 67)=\tau_{12}\tau_{34}\tau_7^{10}.$$

λ_{11}. Lorsque les deux points simples sont adjacents aux points triples, ceux-ci

---

[13] ν_1, ν_2, $\nu_1\nu_6$, $\nu_2\nu_6$ et $\nu_1\nu_2\nu_6$ transforment (12; 13, 32; 14, 42; 56, 67) en cinq S_7 du même type.

forment nécessairement un pentagone avec les trois points doubles, et S_7 est du type $(12; 13, 34, 45, 52; 16; 27)$. Il y en a $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais ils sont équivalents six à six par (ν); en effet,

$$\nu_1\nu_5(12; 13, 34, 45, 52; 16; 27) = (57; 53, 34, 41, 17; 56; 72)$$
$$= \tau_{15}\tau_{27}(12; 13, 34, 45, 52; 16; 27);$$

par symétrie, $\nu_2\nu_3$ équivaut, pour ce type, à $\tau_{23}\tau_{16}$. En réitérant, on est conduit à former $\nu_1\nu_5\nu_7\nu_3$, qui équivaut à $\nu_2\nu_4\nu_6$, soit

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12; 13, 34, 45, 52; 16; 27) = (36; 31, 14, 47, 76; 32; 65),$$

et de même, par symétrie,

$$\nu_1\nu_5\nu_7(12; 13, 34, 45, 52; 16; 27) = (57; 52, 24, 46, 67; 51; 73),$$

et enfin, par une nouvelle itération,

$$\nu_1\nu_2\nu_4(12; 13, 34, 45, 52; 16; 27) = (12; 17, 74, 46, 62; 15; 23)$$
$$= \tau_{37}\tau_{56}(12; 13, 34, 45, 52; 16; 27).$$

Ces 420 familles sont inversement semblables à celles de $C(\sigma_7^{25})$, car

$$\nu'\nu_3\nu_4\nu_5(12; 13, 34, 45, 52; 16; 27) = (13, 35, 52, 26, 67, 71) \in C(\sigma_7^{25}).$$

Nous désignerons cette classe par $C(\sigma_7'^{25})$, où $\sigma_7'^{25} = \nu'\sigma_7^{25}$.

λ_{12}. Les S_7 dont les deux points simples sont réunis au même point triple, respectivement par un trait et deux traits, sont du type $(12; 13, 34, 41; 25, 56; 27)$. Au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, ils ne donnent que 1260 familles, car

$$\nu_1\nu_5(12; 13, 34, 41; 25, 56; 27) = (57; 53, 34, 45; 71, 16; 72)$$
$$= \tau_{15}\tau_{27}(12; 13, 34, 41; 25, 56; 27).$$

On retrouve ici la classe $C(\sigma_7'^{14})$ formée à l'alinéa λ_8, d'après

$$\nu_1(12; 13, 34, 41; 25, 56; 27) = (15, 52, 27, 71; 16, 65; 34) \in C(\sigma_7'^{14}).$$

λ_{13}. Lorsque les deux points simples sont réunis respectivement aux deux points triples, l'un par un trait et l'autre par deux traits, S_7 est du type $(12, 23, 34, 41; 15, 56; 27)$. Ces systèmes sont au nombre de $7! = 5040$, mais deux à deux équivalents par (ν), car

$$\nu_1(12, 23, 34, 41; 15, 56; 27) = (13, 32, 27, 71; 16, 65; 34)$$
$$= \tau_{23}\tau_{47}\tau_{56}(12, 23, 34, 41; 15, 56; 27).$$

Cette classe de 2520 familles n'est rien d'autre que $C(\sigma_7^{19})$, déjà formée à l'alinéa γ_{16}, comme le montre

$$\nu_2\nu_4\nu_5(12, 23, 34, 41; 15, 56; 27) = (26, 64, 47, 75, 53) \in C(\sigma_7^{19}).$$

λ_{14}. Les deux points simples ne peuvent être réunis au même point triple par deux lignes à deux traits, mais ils peuvent l'être aux deux points triples.

Les S_7 en question sont du type $(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67)$, au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais réductibles sept à sept par (ν). En effet,

$$\begin{aligned}\nu_1(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67) &= (16, 67, 71; 15, 54; 62, 23)\\ &= \tau_{26}\tau_{37}\tau_{45}(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67);\end{aligned}$$

par itération, on transforme ce nouveau système par ν_6, ce qui donne

$$\nu_1\nu_6(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67) = (56, 64, 45; 51, 17; 63, 32),$$

et une nouvelle itération fournit encore

$$\nu_1\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67) = (35, 52, 23; 36, 64; 57, 71).$$

Symétriquement, ν_2, $\nu_2\nu_4$ et $\nu_2\nu_4\nu_7$ équivalent pour ce type à une transformation de (τ). Les 360 familles de cette classe sont celles de $C(\sigma_7'^{27})$ déjà formée à l'alinéa λ_1, car

$$\nu_3\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67) = (12, 24, 47, 73, 35, 56, 61) \in C(\sigma_7'^{27}).$$

λ_{15}. Si une ligne à trois traits réunit l'un des points simples à un point triple, l'autre point simple est nécessairement adjacent au second point triple, et le S_7 est du type $(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27)$. Le nombre de ces systèmes est $7! = 5040$, mais ils sont quatre à quatre équivalents par (ν); en effet,

$$\begin{aligned}\nu_1(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) &= (15, 56, 61; 17, 72, 23; 54)\\ &= \tau_{25}\tau_{36}\tau_{47}(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27),\\ \nu_2\nu_5(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) &= (15, 53, 31; 14, 42, 26; 57)\\ &= \tau_{25}(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27),\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_2\nu_5(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) &= (12, 26, 61; 17, 75, 53; 24)\\ &= \tau_{36}\tau_{47}(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27).\end{aligned}$$

Ces 1260 familles sont celles de la classe $C(\sigma_7'^{14})$ formée à l'alinéa λ_8 (et déjà retrouvée en λ_{12}), car

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) = (36, 67, 74, 43; 31, 16; 25).$$

Bien entendu, on pourrait former directement

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) = (37, 71, 14, 46) = \tau_{13}\tau_{27}\tau_{56}\sigma_7'^{14}.$$

λ_{16}. Dans les graphiques conformes à (27), chaque point triple est adjacent à deux points doubles. Les S_7 où les deux couples de points doubles ne sont pas unis sont du type $(12; 13, 34, 41; 25, 56, 62)$; ils sont au nombre de $2^{-3}7! = 630$, et donnent autant de familles. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{17})$ déjà formée à l'alinéa λ_7,

car

$$\nu_1\nu_5(12;\ 13,\ 34,\ 41;\ 25,\ 56,\ 62) = (53,\ 34,\ 45;\ 57,\ 71,\ 16,\ 62) \in C(\sigma_7'^{17}).$$

On peut aussi vérifier directement que

$$\nu'\nu_2\nu_5\nu_6(12;\ 13,\ 34,\ 41;\ 25,\ 56,\ 62) = (71,\ 12;\ 73,\ 74) \in C(\sigma_7^{17}).$$

λ_{17}. Si l'un des quatre points doubles est adjacent aux deux points triples, les graphiques fournis par (27) sont du type (12, 23, 34, 45, 51; 16, 62). Ces S_7 sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais équivalents trois à trois par (ν), puisque $\nu_1\nu_4$ transforme le type cité comme $\tau_{14}\tau_{57}$, et que, par symétrie, $\nu_2\nu_4$ équivaut à $\tau_{21}\tau_{37}$. Ces 840 familles sont celles de la classe $C(\sigma_7'^{26})$ déjà formée à l'alinéa λ_5, car

$$\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51;\ 16,\ 62) = (35,\ 54,\ 41,\ 17,\ 73;\ 36,\ 62) \in C(\sigma_7'^{26}).$$

On a encore directement

$$\nu'\nu_3\nu_4\nu_7(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51;\ 16,\ 62) = (52,\ 23,\ 37,\ 74,\ 45;\ 56) \in C(\sigma_7^{26}).$$

λ_{18}. Enfin les couples de points doubles adjacents à chaque point triple peuvent être eux-mêmes unis en formant deux quadrilatères ayant pour côté commun le segment qui unit les points triples. Les S_7 correspondants sont ceux du type (12, 23, 34, 41; 15, 56, 62). Ils sont au nombre de $\frac{1}{4}7! = 1260$, et donnent autant de familles. C'est la classe $C(\sigma_7^{23})$ déjà formée à l'alinéa γ_{12}, d'après

$$\nu_1\nu_3\nu_6(12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 15,\ 56,\ 62) = (73,\ 35;\ 76,\ 64;\ 71) \in C(\sigma_7^{23}).$$

24. Les S_7 à sept traits et trois points triples sont assujettis aux relations

$$2d + s = 5, \qquad d + s + c = 4,$$

ou $d = c + 1$, $s = 3 - 2c$. Aux deux valeurs acceptables de c correspondent ainsi les deux solutions

(28) $\qquad t = 3, \quad d = 1, \quad s = 3, \quad c = 0,$

(29) $\qquad t = 3, \quad d = 2, \quad s = 1, \quad c = 1.$

Il suffit d'examiner les graphiques dont les trois points triples sont unis triangulairement. Dans les conditions (28), on voit que le point double ne peut être adjacent à deux points simples; l'un des sommets triples est donc adjacent à ce point double unique, et l'observation générale que nous avons déjà fréquemment utilisée permet d'écarter l'examen de ces S_7. Par contre, sur deux formes de graphique vérifiant (29), chacun des points triples n'est pas adjacent à un certain point double.

λ_{19}. Parmi ces deux solutions à étudier, les S_7 dont le point simple est uni à un point triple sont du type (12, 23, 31; 14, 45, 52; 36). Leur nombre

est $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais ils sont réductibles six à six par (ν); en effet,

$$\nu_3(12, 23, 31; 14, 45, 52; 36) = (45, 53, 34; 41, 12, 25; 37)$$
$$= \tau_{14}\tau_{25}\tau_{67}(12, 23, 31; 14, 45, 52; 36),$$
$$\nu_1\nu_5(12, 23, 31; 14, 45, 52; 36) = (56, 63, 35; 57, 71, 16; 32)$$
$$= \tau_{15}\tau_{26}\tau_{47}(12, 23, 31; 14, 45, 52; 36).$$

Par symétrie, et par la multiplication des transformations, on voit que $\nu_2\nu_4$ équivaut, pour ce type, à $\tau_{16}\tau_{24}\tau_{57}$, puis que

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 31; 14, 45, 52; 36) = (17, 73, 31; 16, 65, 57; 34),$$
$$\nu_2\nu_3\nu_4(12, 23, 31; 14, 45, 52; 36) = (27, 73, 32; 26, 64, 47; 35).$$

Cette classe de 420 familles n'est rien d'autre que $C(\sigma_7'^{25})$ formée à l'alinéa λ_{11}, comme le montre

$$\nu_1(12, 23, 31; 14, 45, 52; 36) = (15; 16, 63, 32, 25; 17; 54) \in C(\sigma_7'^{25}),$$

ou encore

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_7(12, 23, 31; 14, 45, 52; 36) = (14, 47, 75, 52, 26, 61) \in C(\sigma_7^{25}).$$

λ_{20}. Les S_7 dont le point simple est uni à un point double sont nécessairement du type (12, 23, 31; 14, 42; 35, 56). Au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, ils donnent 1260 familles car

$$\nu_1\nu_2\nu_5(12, 23, 31; 14, 42; 35, 56) = (12, 27, 71; 16, 62; 75, 54)$$
$$= \tau_{37}\tau_{46}(12, 23, 31; 14, 42; 35, 56).$$

Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{14})$ déjà rencontrée aux alinéas λ_8, λ_{12}, λ_{15}. Par exemple,

$$\nu_3(12, 23, 31; 14, 42; 35, 56) = (43; 41, 12, 24; 36, 65; 37)$$

est du type formé à l'alinéa λ_{12}; on a encore

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14, 42; 35, 56) = (34, 45, 57, 76) \in C(\sigma_7^{14}).$$

25. Les S_7 à sept traits et quatre points triples sont assujettis aux relations

$$2d + s = 2, \qquad d + s + c = 3,$$

donc $d = c - 1$, $s = 4 - 2c$. Aux deux valeurs acceptables de c correspondent les deux systèmes d'équations

(30) $\qquad t = 4, \quad d = 0, \quad s = 2, \quad c = 1,$

(31) $\qquad t = 4, \quad d = 1, \quad s = 0, \quad c = 2.$

Dans les seuls diagrammes utiles, les quatre points triples sont unis deux à deux, par six traits; (31) n'est pas réalisable, mais (30) fournit une solution, où les deux points simples sont adjacents.

λ_{21}. Les S_7 en question sont du type (12, 13, 14, 23, 24, 34; 56), au nombre de $\frac{7\times6\times5}{2}=105$; ils donnent autant de familles; il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^4)$ formée à l'alinéa λ_3, comme le montre

$$\nu_1(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56)=(15, 56, 61; 17; 23, 34, 42)\in C(\sigma_7'^4),$$

ou, directement,

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56)=(75, 76)=\tau_{17}\tau_{25}\tau_{36}\sigma_7^4.$$

26. Les graphiques à huit traits relèvent du système d'équations

$$3t+2d+s=16, \qquad t+d+s+c=7,$$

d'où l'on tire $2t+d=c+9$, et $t=s+2c+2$; il y a donc au moins deux points triples, qu'on suppose adjacents.

Lorsque $t=2$, on obtient la solution unique

$$(32) \qquad t=2, \quad d=5, \quad s=0, \quad c=0.$$

Quatre formes de graphique sont à examiner : une forme où les deux points doubles unis à un point triple sont également unis à l'autre point triple; une forme où un seul de ces deux points doubles est uni au second point triple; et deux formes où les deux points doubles adjacents à un point triple ne sont pas unis à l'autre, car ces deux points doubles peuvent être eux-mêmes unis, ou non.

μ_1. Les S_7 de la première forme sont du type (12, 23, 31; 14, 42; 56, 67, 75), et au nombre de $\frac{7\times6}{2}\times\frac{5\times4}{2}=210$. Ils ne donnent que 21 familles; en effet,

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_5(12, 23, 31; 14, 42; 56, 67, 75)&=(52, 23, 35; 54, 42; 16, 67, 71)\\&=\tau_{15}(12, 23, 31; 54, 42; 56, 67, 75);\end{aligned}$$

symétriquement, $\nu_1\nu_6$, $\nu_1\nu_7$, $\nu_2\nu_5$, $\nu_2\nu_6$, $\nu_2\nu_7$ transforment ce type comme τ_{16}, τ_{17}, τ_{25}, τ_{26}, τ_{27} respectivement; en outre, l'itération montre que $\nu_3\nu_4\nu_7$ équivaut $\tau_{15}\tau_{26}$, et, de même, $\nu_3\nu_4\nu_5$ à $\tau_{16}\tau_{27}$, et $\nu_3\nu_4\nu_6$ à $\tau_{15}\tau_{27}$. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^2)$, car

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14, 42; 56, 67, 75)=(34)\in C(\sigma_7^2).$$

μ_2. Les S_7 qui vérifient (32), et dont les deux points triples sont unis à trois points doubles, sont du type (12, 23, 34, 45, 56, 61; 17, 72); ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7!=2\,520$, mais ne donnent que 630 familles; en effet,

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_4(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17, 72)&=(42, 23, 31, 15, 56, 64; 47, 72)\\&=\tau_{14}(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17, 72);\end{aligned}$$

par symétrie, $\nu_2\nu_5$ équivaut à τ_{25}, et, par itération, $\nu_1\nu_4\nu_2\nu_5=\nu_3\nu_6\nu_7$ équivaut

pour ce type à $\tau_{14}\tau_{25}$. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{24})$, déjà formée à l'alinéa ζ_7, comme le montre $\nu_1\nu_3\nu_5$, ou bien

$$\nu'\nu_3\nu_4\nu_5(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17, 72) = (62, 23, 35, 56; 67) \in C(\sigma_7^{24}).$$

μ_3. L'une des formes de graphique où le deux points triples sont adjacents à quatre des cinq points doubles comporte un triangle et un quadrilatère; les S_7 en question sont du type $(12; 13, 34, 45, 51; 26, 67, 72)$, et au nombre de $\frac{1}{4}7! = 1260$; c'est une classe de 630 familles, car

$$\begin{aligned}\nu_2\nu_4(12; 13, 34, 45, 51; 26, 67, 72) &= (14; 13, 32, 25, 51; 46, 67, 74)\\ &= \tau_{24}(12; 13, 34, 45, 51; 26, 67, 72).\end{aligned}$$

Il s'agit de $C(\sigma_7'^{6})$, déjà formée à l'alinéa ζ_{13}, comme le montre $\nu_1\nu_4\nu_6$, ou, directement,

$$\nu'\nu_2\nu_6\nu_7(12; 13, 34, 45, 51; 26, 67, 72) = (12, 14; 35) = \tau_{34}\sigma_7^6.$$

μ_4. La dernière solution fournie par (32) comporte un quadrilatère et un pentagone construits sur le segment unissant les deux points triples.

Ces S_7, du type $(12, 23, 34, 45, 51; 16, 67, 72)$, sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, et donnent autant de familles. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{19})$ formée à l'alinéa ζ_{10}, comme le montre la transformation de ce type par $\nu_1\nu_4\nu_7$, ou bien

$$\nu'\nu_3\nu_4\nu_5(12, 23, 34, 45, 51; 16, 67, 72) = (62, 23, 35, 51, 17) \in C(\sigma_7^{19}).$$

27. Les S_7 à huits traits et trois points triples sont associés aux relations $d = c + 3$, $s = 1 - 2c$; il n'y a pas d'autre solution que

$$t = 3, \qquad d = 3, \qquad s = 1, \qquad c = 0. \tag{33}$$

On suppose que les trois points triples forment un triangle; le point simple est alors réuni à l'un d'eux par un, deux ou trois traits.

μ_5. Les S_7 dont le point simple est adjacent à un point triple sont du type $(12, 23, 31; 24, 45, 56, 63; 17)$; ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais réductibles dix à dix par (ν). En effet,

$$\begin{aligned}\nu_2(12, 23, 31; 24, 45, 56, 63; 17) &= (52, 26, 65; 27, 71, 13, 36; 54)\\ \tau_{15}\tau_{36}\tau_{47} &= (12, 23, 31; 24, 45, 56, 63; 17);\end{aligned}$$

par symétrie, ν_3 transforme ce type comme $\tau_{15}\tau_{24}\tau_{67}$; par itération, on voit ensuite que $\nu_2\nu_6$ équivaut à $\tau_{26}\tau_{37}$, donc $\nu_3\nu_4$ à $\tau_{31}\tau_{27}$. Une nouvelle itération montre que $\nu_2\nu_6\nu_7$ équivaut à $\tau_{15}\tau_{27}\tau_{34}$, donc aussi que $\nu_3\nu_4\nu_7$ équivaut à $\tau_{15}\tau_{37}\tau_{26}$. Enfin, on a encore

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_3(12, 23, 31; 24, 45, 56, 63; 17) &= (52, 23, 35; 24, 41, 16, 63; 57)\\ &= \tau_{13}(12, 23, 31; 24, 45, 56, 63; 17),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\nu_1\nu_5\nu_2$ équivaut à $\tau_{36}\tau_{47}$, et, par symétrie, que $\nu_1\nu_5\nu_3$ équivaut à $\tau_{26}\tau_{47}$. Ces 252 familles sont celles de la classe $C(\sigma_7'^{20})$ formée à l'alinéa ζ_1, comme le montre

$$\nu_1\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 24, 45, 56, 63; 17) = (23, 34, 47, 76, 62; 15) \in C(\sigma_7'^{20}),$$

ou encore

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 24, 45, 56, 63; 17) = (24, 46, 63, 37, 72) \in C(\sigma_7^{20}).$$

μ_6. La deuxième solution conforme à (33) est formée par les S_7 du type (12, 23, 31; 24, 45, 53; 16, 67), au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$. Leur classe ne comprend que 1260 familles, car

$$\nu_1(12, 23, 31; 24, 45, 53; 16, 67) = (14, 45, 51; 42, 23, 35; 17, 76)$$
$$= \tau_{24}\tau_{35}\tau_{67}(12, 23, 31; 24, 45, 53; 16, 67).$$

Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{23})$, formée à l'alinéa ζ_4, comme le montre

$$\nu_2\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 24, 45, 53; 16, 67) = (46, 63, 31, 15, 57, 72) \in C(\sigma_7'^{23}),$$

ou

$$\nu'\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 24, 45, 53; 16, 67) = (14, 43; 15, 52; 16) \in C(\sigma_7^{23}).$$

μ_7. La dernière solution fournie par (33) consiste en les S_7 du type (12, 23, 31; 24, 43; 15, 56, 67). Ils sont toujours au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2520$, mais réductibles six à six par (ν). En effet,

$$\nu_2(12, 23, 31; 24, 43; 15, 56, 67) = (52, 26, 65; 27, 76; 51, 13, 34)$$
$$= \tau_{15}\tau_{36}\tau_{47}(12, 23, 31; 24, 43; 15, 56, 67).$$

Par symétrie, ν_3 équivaut à $\tau_{15}\tau_{26}\tau_{47}$. Par itération, on en conclut que $\nu_2\nu_6$ équivaut pour ce S_7 à τ_{26}, et $\nu_3\nu_6$ à τ_{36}, et enfin $\nu_2\nu_3\nu_6$ à $\tau_{15}\tau_{47}$. Cette classe de 420 familles n'est rien d'autre que $C(\sigma_7'^{7})$, formée à l'alinéa ζ_3, puisque

$$\nu_1\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 24, 43; 15, 56, 67) = (23, 36, 62; 17, 74, 45) \in C(\sigma_7'^{7}),$$

ou

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 24, 43; 15, 56, 67) = (41, 15, 57) \in C(\sigma_7^{7}).$$

28. Pour les S_7 à huit traits et quatre points triples, on a $d = c + 1$, $s = 2 - 2c$; il y a donc deux possibilités

(34) $\qquad t = 4, \quad d = 1, \quad s = 2, \quad c = 0,$

(35) $\qquad t = 4, \quad d = 2, \quad s = 0, \quad c = 1.$

Il est clair qu'aucun S_7 dont les quatre points triples sont adjacents deux à deux, ce qui exige six traits, ne peut vérifier (35). Seul (34) donne un graphique admissible, où le point double est adjacent aux deux points simples.

μ_8. Les S_7 en question sont du type (12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 57). Leur

nombre est $\frac{7\times6\times5}{2}=105$, et ils sont réductibles cinq à cinq par (ν); en effet,

$$\nu_1\nu_5(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 57)=(52, 53, 54, 23, 24, 34; 16, 17)$$

transforme ce type comme τ_{15}; par conséquent, $\nu_2\nu_5$, $\nu_3\nu_5$, $\nu_4\nu_5$ équivalent respectivement, pour ce même type, à τ_{25}, τ_{35}, τ_{45}. Ces 21 familles sont celles de la classe $C(\sigma_7'^2)$, formée à l'alinéa μ_1, comme le montre par exemple

$$\nu_1(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 57)=(15, 56, 61; 17, 75; 23, 34, 42)\in C(\sigma_7'^2),$$

ou

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 57)=(67)=\tau_{16}\tau_{27}\sigma_7^2.$$

29. Il est inutile d'examiner les S_7 à huit traits et plus de quatre points triples puisque ceux-ci ne peuvent être adjacents deux à deux qu'en traçant au moins dix traits, et qu'ils sont au moins des points quadruples. Les S_7 à neuf traits relèvent du système d'équations

$$3t+2d+s=18, \qquad t+d+s+c=7,$$

ou $2t+d-c=11$, $t=s+2c+4$, donc $t\geqq 4$. La remarque que nous venons de faire nous permet de nous borner à la seule valeur $t=4$, donc au système

$$t=4, \qquad d=3, \qquad s=0, \qquad c=0. \tag{36}$$

x. Les quatre points triples étant unis deux à deux, les trois points doubles sont unis en triangle, et les S_7 en question sont du type (12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 67, 75); ils sont en nombre de $\frac{7\times6\times5}{3!}=35$, mais tous équivalents par (ν).

En effet, on voit tout de suite que

$$\nu_1(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 67, 75)=\tau_{25}\tau_{36}\tau_{47}(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 67, 75),$$

donc ν_2, ν_3, ν_4 équivalent respectivement, pour ce type, à $\tau_{15}\tau_{36}\tau_{47}$, $\tau_{15}\tau_{26}\tau_{47}$, $\tau_{15}\tau_{26}\tau_{37}$; par itération, il en résulte que chacune des 12 transformations $\nu_i\nu_k$ ($i\leqq 4$; $k\geqq 5$) équivaut à τ_{ik} pour ce S_7, et que chacun des 18 produits $\nu_i\nu_j\nu_k$ ($i, j\leqq 4$; $k\geqq 5$) équivaut à $\tau_{\alpha l}\tau_{\beta m}$ où α, β sont les indices distincts de i et j parmi 1, 2, 3, 4, et l, m les indices autres que k parmi 5, 6, 7.

Cette classe à une seule famille est justement $C(\sigma_7'^1)$ où $\sigma_7'^1=\nu'\sigma_7^1$, comme le montre

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 67, 75)=(\ )=\sigma_7^1.$$

30. Il est inutile de poursuivre la discussion avec les S_7 dont le graphique a plus de neuf traits (14). Les S_7 à m traits relèvent en effet du système d'équations

$$3t+2d+s=2m, \qquad t+d+s+c=7,$$

(14) Rappelons que 3 est l'ordre maximum des sommets des graphiques à considérer.

	$C_1 = C(\sigma_7^1) = C(\ )$	1 f	$\Delta_7^1 = (1-a)^6(1+6a)$
χ :	$C'_1 = C(\sigma_7'^1) = \nu' C_1$	1 f	$\Delta_7'^1 = (1+a)^6(1-6a)$
α :	$C_2 = C(\sigma_7^2) = C(12)$	21 f	$\Delta_7^2 = (1-a)^4(1+a)(1+3a-14a^2)$
μ_1 et μ_8 :	$C'_2 = C(\sigma_7'^2) = \nu' C_2$	21 f	$\Delta_7'^2 = (1+a)^4(1-a)(1-3a-14a^2)$
β_1 :	$C_3 = C(\sigma_7^3) = C(12; 34)$	105 f	$\Delta_7^3 = (1-a)^2(1+a)^2(1-2a)(1-3a)(1+5a)$
λ_2 et λ_9 :	$C'_3 = C(\sigma_7'^3) = \nu' C_3$	105 f	$\Delta_7'^3 = (1+a)^2(1-a)^2(1+2a)(1+3a)(1-5a)$
β_2 :	$C_4 = C(\sigma_7^4) = C(12, 13)$	105 f	$\Delta_7^4 = (1-a)^4(1+4a-11a^2-26a^3)$
λ_3 et λ_{21} :	$C'_4 = C(\sigma_7'^4) = \nu' C_4$	105 f	$\Delta_7'^4 = (1+a)^4(1-4a-11a^2+26a^3)$
γ_1 :	$C_5 = C(\sigma_7^5) = C(12; 34; 56)$	105 f	$\Delta_7^5 = (1+a)^3(1-3a)^2(1+3a-6a^2)$
ζ_2 :	$C'_5 = C(\sigma_7'^5) = \nu' C_5$	105 f	$\Delta_7'^5 = (1-a)^3(1+3a)^2(1-3a-6a^2)$
γ_2 :	$C_6 = C(\sigma_7^6) = (12, 13; 45)$	630 f	$\Delta_7^6 = (1-a)^2(1+a)(1-a-19a^2-a^3+50a^4)$
ζ_{13} et μ_3 :	$C'_6 = C(\sigma_7'^6) = \nu' C_6$	630 f	$\Delta_7'^6 = (1+a)^2(1-a)(1-a-19a^2+a^3+50a^4)$
γ_3 :	$C_7 = C(\sigma_7^7) = C(12, 23, 34)$	420 f	$\Delta_7^7 = (1-a)^2(1-5a^2)(1+2a-13a^2-2a^3)$
ζ_3 et μ_7 :	$C'_7 = C(\sigma_7'^7) = \nu' C_7$	420 f	$\Delta_7'^7 = (1+a)^2(1-5a^2)(1-2a-13a^2+2a^3)$
γ_4 :	$C_8 = C(\sigma_7^8) = C(12, 23, 31)$	35 f	$\Delta_7^8 = (1-a)^3(1+a)^2(1+a-18a^2)$
ζ_{12} :	$C'_8 = C(\sigma_7'^8) = \nu' C_8$	35 f	$\Delta_7'^8 = (1+a)^3(1-a)^2(1-a-18a^2)$
γ_5 :	$C_9 = C(\sigma_7^9) = C(12, 13, 14)$	70 f	$\Delta_7^9 = (1-a)^5(1+2a)(1-3a)(1+5a)$
ζ_5 :	$C'_9 = C(\sigma_7'^9) = \nu' C_9$	70 f	$\Delta_7'^9 = (1+a)^5(1-2a)(1+3a)(1-5a)$
δ_1 :	$C_{10} = C(\sigma_7^{10}) = C(12, 13; 45; 67)$	315 f	$\Delta_7^{10} = (1-a)(1+a)^2(1-3a)(1+2a-13a^2-22a^3)$
η_4 et λ_{10} :	$C'_{10} = C(\sigma_7'^{10}) = \nu' C_{10}$	315 f	$\Delta_7'^{10} = (1+a)(1-a)^2(1+3a)(1-2a-13a^2+22a^3)$
δ_2 :	$C_{11} = C(\sigma_7^{11}) = C(12, 23, 34; 56)$	1 260 f	$\Delta_7^{11} = (1-a)^2(1-2a-7a^2)(1+4a-3a^2-10a^3)$
η_3 et λ_6 :	$C'_{11} = C(\sigma_7'^{11}) = \nu' C_{11}$	1 260 f	$\Delta_7'^{11} = (1+a)^2(1+2a-7a^2)(1-4a-3a^2+10a^3)$
δ_3 :	$C_{12} = C(\sigma_7^{12}) = C(12, 13; 45, 46)$	630 f	$\Delta_7^{12} = (1-a)(1-5a^2)(1-a-15a^2+21a^3+2a^4)$
η_{11} :	$C'_{12} = C(\sigma_7'^{12}) = \nu' C_{12}$	630 f	$\Delta_7'^{12} = (1-a)(1-5a^2)(1+a-15a^2-21a^3+2a^4)$
δ_4 :	$C_{13} = C(\sigma_7^{13}) = C(12, 23, 31; 45)$	210 f	$\Delta_7^{13} = (1-a)(1+a)^3(1-2a)(1-17a^2)$
η_8 :	$C'_{13} = C(\sigma_7'^{13}) = \nu' C_{13}$	210 f	$\Delta_7'^{13} = (1-a)(1-a)^3(1+2a)(1-17a^2)$
δ_5 :	$C_{14} = C(\sigma_7^{14}) = C(12, 23, 34, 45)$	1 260 f	$\Delta_7^{14} = (1-a)^2(1+a)(1-3a)(1+4a-7a^2-26a^3)$
λ_8, λ_{12}, λ_{15} et λ_{20} :	$C'_{14} = C(\sigma_7'^{14}) = \nu' C_{14}$	1 260 f	$\Delta_7'^{14} = (1+a)^2(1-a)(1+3a)(1-4a-7a^2+26a^3)$
δ_6 :	$C_{15} = C(\sigma_7^{15}) = C(12, 23, 34, 41)$	105 f	$\Delta_7^{15} = (1-a)^4(1+3a)(1+a-14a^2)$
η_1 :	$C'_{15} = C(\sigma_7'^{15}) = \nu' C_{15}$	105 f	$\Delta_7'^{15} = (1+a)^4(1-3a)(1-a-14a^2)$
δ_7 et δ_9 :	$C_{16} = C(\sigma_7^{16}) = C(12, 13, 14; 56)$	420 f	$\Delta_7^{16} = (1-a)^2(1+a)(1-a-19a^2-5a^3+46a^4)$
η_5 :	$C'_{16} = C(\sigma_7'^{16}) = \nu' C_{16}$	420 f	$\Delta_7'^{16} = (1+a)^2(1-a)(1-a-19a^2+5a^3+46a^4)$
δ_8 :	$C_{17} = C(\sigma_7^{17}) = C(12, 23; 14, 15)$	630 f	$\Delta_7^{17} = (1-a)^2(1+2a-11a^2)(1-7a^2-2a^3)$
λ_7 et λ_{16} :	$C'_{17} = C(\sigma_7'^{17}) = \nu' C_{17}$	630 f	$\Delta_7'^{17} = (1-a)^2(1-2a-11a^2)(1-7a^2+2a^3)$
η_2 et λ_4 :	$C_{18} = C(\sigma_7^{18}) = C(12, 23, 34, 45; 67)$	1 260 f	$\Delta_7^{18} = (1-a)^2(1-3a)(1+a-15a^2-13a^3+34a^4)$
ζ_{15} et ζ_{18} :	$C'_{18} = C(\sigma_7'^{18}) = \nu' C_{18}$	1 260 f	$\Delta_7'^{18} = (1-a)^2(1+3a)(1-a-15a^2+13a^3+34a^4)$
η_6 et λ_{13} :	$C_{19} = C(\sigma_7^{19}) = C(12, 23, 34, 45, 56)$	2 520 f	$\Delta_7^{19} = (1-a-9a^2+a^3)(1+a-11a^2-a^3+18a^4)$
ζ_{10} et μ_4 :	$C'_{19} = C(\sigma_7'^{19}) = \nu' C_{19}$	2 520 f	$\Delta_7'^{19} = (1+a-9a^2-a^3)(1-a-11a^2+a^3+18a^4)$
η_7 :	$C_{20} = C(\sigma_7^{20}) = C(12, 23, 34, 45, 51)$	252 f	$\Delta_7^{20} = (1-a)(1-5a^2)^2(1+a-10a^2)$
ζ_4 et μ_5 :	$C'_{20} = C(\sigma_7'^{20}) = \nu' C_{20}$	252 f	$\Delta_7'^{20} = (1+a)(1-5a^2)^2(1-a-10a^2)$
η_9 et η_{14} :	$C_{21} = C(\sigma_7^{21}) = C(12, 23; 14, 15; 67)$	1 260 f	$\Delta_7^{21} = (1-a)(1+a)(1-20a^2+2a^3+83a^4-2a^5)$

ζ_8 et ζ_{11} :	$C'_{21}=C(\sigma_7'^{21})=\nu' C_{21}$	1 260 f	$\Delta_7'^{21}=(1+a)(1-a)(1-20a^2-2a^3+83a^4+2a^5)$
η_{10} :	$C_{22}=C(\sigma_7^{22})=C(12, 23, 34; 15, 16)$	1 260 f	$\Delta_7^{22}=(1-a)^2(1-5a^2)(1+2a-13a^2-18a^3)$
ζ_{16} :	$C'_{22}=C(\sigma_7'^{22})=\nu' C_{22}$	1 260 f	$\Delta_7'^{22}=(1+a)^2(1-5a^2)(1-2a-13a^2+18a^3)$
η_{12} et λ_{18} :	$C_{23}=C(\sigma_7^{23})=C(12, 23; 14, 45; 16)$	1 260 f	$\Delta_7^{23}=(1+a)(1-3a)(1+2a-7a^2)(1-7a^2+2a^3)$
ζ_4 et μ_6 :	$C'_{23}=C(\sigma_7'^{23})=\nu' C_{23}$	1 260 f	$\Delta_7'^{23}=(1-a)(1+3a)(1-2a-7a^2)(1-7a^2-2a^3)$
η_{13} :	$C_{24}=C(\sigma_7^{24})=C(12, 23, 34, 41; 15)$	630 f	$\Delta_7^{24}=(1-a)^2(1-3a)(1+3a)(1+2a-9a^2-2a^3)$
ζ_7 et μ_2 :	$C'_{24}=C(\sigma_7'^{24})=\nu' C_{24}$	630 f	$\Delta_7'^{24}=(1+a)^2(1+3a)(1-3a)(1-2a-9a^2+2a^3)$
ζ_6 et ζ_9 :	$C_{25}=C(\sigma_7^{25})=C(12, 23, 34, 45, 56, 61)$	420 f	$\Delta_7^{25}=(1+a)^2(1-2a)(1-3a)^2(1+3a)^2$
λ_{11} et λ_{19} :	$C'_{25}=C(\sigma_7'^{25})=\nu' C_{25}$	420 f	$\Delta_7'^{25}=(1-a)^2(1+2a)(1+3a)^2(1-3a)^2$
ζ_{14} :	$C_{26}=C(\sigma_7^{26})=C(12, 23, 34, 45, 51; 16)$	840 f	$\Delta_7^{26}=(1-3a)(1-5a^2)^2(1+3a-2a^2)$
λ_5 et λ_{17} :	$C'_{26}=C(\sigma_7'^{26})=\nu' C_{26}$	840 f	$\Delta_7'^{26}=(1+3a)(1-5a^2)^2(1-3a-2a^2)$
ζ_{17} :	$C_{27}=C(\sigma_7^{27})=C(12, 23, 34, 41; 15; 26)$	360 f	$\Delta_7^{27}=(1-2a)(1+a-9a^2-a^3)^2$
λ_1 et λ_{15} :	$C'_{27}=C(\sigma_7'^{27})=\nu' C_{27}$	360 f	$\Delta_7'^{27}=(1+2a)(1-a-9a^2+a^3)^2$

donc, par une combinaison évidente,

$$t=2m-14+s+2c\geqq 2m-14;$$

m étant supérieur à 7, et les t points triples étant adjacents deux à deux, le graphique comporte au moins $\frac{(2m-14)(2m-15)}{2}=(m-7)(2m-15)$ traits. Ce dernier nombre ne pouvant surpasser m, on a l'inégalité

$$2m^2-30m+105\leqq 0.$$

Le plus grand zéro de ce polynome est compris entre 9 et 10, donc m ne peut dépasser 9. Remarquons aussi qu'il aurait été inutile *a priori* de supposer $m\geqq 11$, car ν' ramènerait le S_7 à un système de $21-m$ traits, donc de moins de onze traits.

31. Comme pour les valeurs précédentes de n, nous récapitulons ces résultats dans un tableau donnant, pour chacune des 54 classes, le nombre des familles, les alinéas où elles ont été formées, et la valeur du polynome Δ_n, dont nous omettons les calculs qui n'offrent que des difficultés d'ordre numérique, (*voir* tableau ci-contre et ci-dessus).

On observe que les 54 classes sont deux à deux inversement semblables, alors que, pour $n=4$, 5 ou 6, certaines des classes sont invariantes par ν'. Tous les $\Delta_n(n=1, 2, \ldots, 7)$ sont distincts, ce qui établit le théorème cité dans l'introduction. Enfin, la somme des nombres de familles de ce tableau est bien 32 768.

CHAPITRE IV.

Les S_n isogonaux du plan.

32. La formation des S_n isogonaux du plan et de E_3 fait intervenir certains angles dont le cosinus et le sinus s'expriment en fonction de $a=\cos\alpha$. Il nous

sera utile de disposer d'un tableau de ces lignes trigonométriques, et d'avoir précisé les notations. Nous conviendrons de représenter par une lettre primée, telle que α_i', l'angle dont les lignes trigonométriques se déduisent de celles de α_i en changeant a en $-a$. Il suffira de citer les angles non primés dans le tableau T en question :

T.

$\cos\alpha = a$	$\sin\alpha = \sqrt{1-a^2}$
$\cos\alpha_1 = \frac{a}{1+a}$	$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{1+2a}}{1+a}$
$\cos\alpha_2 = \frac{a}{1+2a}$	$\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{(1+a)(1+3a)}}{1+2a}$
$\cos\alpha_3 = \frac{a}{1+3a}$	$\sin\alpha_3 = \frac{\sqrt{(1+2a)(1+4a)}}{1+3a}$
$\cos\beta_1 = \frac{-a(1+3a)}{(1-a)(1+2a)}$	$\sin\beta_1 = \frac{(1+a)\sqrt{1-5a^2}}{(1-a)(1+2a)}$
$\cos\beta_2 = \frac{-a(1+5a)}{(1-a)(1+3a)}$	$\sin\beta_2 = \frac{\sqrt{(1+a)(1+2a)(1+a-8a^2)}}{(1-a)(1+3a)}$
$\cos\beta_3 = \frac{a(1-3a)}{1-5a^2}$	$\sin\beta_3 = \frac{\sqrt{(1+a)(1-2a)(1+a-8a^2)}}{1-5a^2}$
$\cos\beta_4 = \frac{a(1-a)}{1-5a^2}$	$\sin\beta_4 = \frac{\sqrt{(1-2a)(1+3a)(1-a-4a^2)}}{1-5a^2}$
$\cos\beta_5 = \frac{-a(1+2a-7a^2)}{(1-a)(1-5a^2)}$	$\sin\beta_5 = \frac{(1+a)\sqrt{(1-2a)(1-3a)(1+a-4a^2)}}{(1-a)(1-5a^2)}$
$\cos\gamma_1 = \frac{a}{\sqrt{1-4a^2}}$	$\sin\gamma_1 = \frac{\sqrt{1-5a^2}}{\sqrt{1-4a^2}}$
$\cos\gamma_2 = a\sqrt{\frac{1+a}{(1+3a)(1-5a^2)}}$	$\sin\gamma_2 = \sqrt{\frac{(1+2a)(1+a-8a^2)}{(1+3a)(1-5a^2)}}$
$\cos\gamma_3 = a\sqrt{\frac{1+3a}{(1+a)(1-5a^2)}}$	$\sin\gamma_3 = \sqrt{\frac{(1+2a)(1-a-4a^2)}{(1+a)(1-5a^2)}}$

Nous aurons également besoin des valeurs numériques de certaines de ces fonctions, pour $a = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Il suffira de donner celles des lignes des angles, primés et non primés, pour les seules valeurs $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{5}}$. Nous formons ainsi les trois tableaux des valeurs numériques utiles :

T_1 : $a = \frac{1}{2}$.

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$,	$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;	$\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}$,	$\sin\alpha_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;	$\cos\beta_1 = -\frac{5}{4}$,	$\sin\beta_1 = \frac{3i}{4}$.

$$T_2 : \quad a = \frac{1}{3}.$$

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$,	$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;	$\cos\alpha_1 = \frac{1}{4}$,	$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{15}}{4}$;	$\cos\alpha'_1 = -\frac{1}{2}$,	$\sin\alpha'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\cos\beta_1 = -\frac{3}{5}$,	$\sin\beta_1 = \frac{4}{5}$;	$\cos\beta'_1 = 0$,	$\sin\beta'_1 = 1$;	$\cos\beta_4 = \frac{1}{2}$,	$\sin\beta_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\cos\beta'_4 = -1$,	$\sin\beta'_4 = 0$;	$\cos\beta_3 = -1$,	$\sin\beta_3 = 0$;	$\cos\beta'_3 = -\frac{1}{4}$,	$\sin\beta'_3 = \frac{\sqrt{15}}{4}$;
$\cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$,	$\sin\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$;	$\cos\gamma'_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,	$\sin\gamma'_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$;	$\cos\gamma_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}$,	$\sin\gamma_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}$.

$$T_3 : \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$,	$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$;	$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$,	$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$;
$\cos\alpha'_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}-1}$,	$\sin\alpha'_1 = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$;	$\cos\beta_1 = \cos\beta'_1 = -1$,	$\sin\beta_1 = \sin\beta'_1 = 0$.

33. $n = 3$. — Tous les S_3 isognaux le sont strictement (15). On peut prendre

$$S_3 = \sigma_3^1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \Delta_3 = (1-a)^2(1+2a).$$

Si $a \neq -\frac{1}{2}$, S_3 est régulier (16), et, si on le rapporte à trois cercles ω_i orthonormaux, il est de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1). \end{cases}$$

Si $a = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha_1 = -1$, et U_3 prend la forme

$$U_3 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \omega_3.$$

(15) Rappelons que, pour des raisons exposées dans l'article antérieur cité, nous écartons les systèmes de sphères tangentes ($a = \pm 1$).

(16) S_n est régulier, ou non, suivant que la famille linéaire de ses sphères contient, ou non, un système orthonormal de n sphères; cela équivaut à $\Delta_n \neq 0$, ou $\Delta_n = 0$.

avec $\omega^2 = 0$, $\omega\omega_1 = \omega\omega_2 = 0$, ce qui remplace (1) par

$$(2)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha = \dfrac{-\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \lambda(\omega_3 + i\omega_4) = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \lambda(\omega_3 + i\omega_4), \end{cases}$$

où les quatre ω_i sont orthonormaux et où λ est un scalaire quelconque. Si $\lambda = 0$, S_3 est un faisceau de trois cercles inclinés de 120° l'un sur l'autre. Si $\lambda \neq 0$, on peut faire $\lambda = \frac{1}{2}$ en choisissant convenablement le couple orthonormal ω_3, ω_4, de sorte qu'on a

$$(2')\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \dfrac{\omega_3 + i\omega_4}{2}. \end{cases}$$

Rappelons que, si les U_i sont purs, c'est-à-dire réels ou imaginaires purs, ils sont tous de même nature, réels et sécants pour $-1 < a < 1$, réels non sécants pour $a < -1$, et imaginaires purs pour $a > 1$.

Pour $a = -\frac{1}{2}$, (2′) donne des cercles réels pourvu que ω_1, ω_2 le soient, ainsi que le point $\omega_3 + i\omega_4$, c'est-à-dire pourvu que ω_1, ω_2, ω_3 soient réels et ω_4 imaginaire pur (17). Dans le cas général $-1 < a < 1$, $a \neq -\frac{1}{2}$, (1) montre que ω_1 et ω_2 sont encore réels si S_3 est pur, mais ω_3 est réel ou imaginaire pur suivant que a est supérieur ou non à $-\frac{1}{2}$. Pour $a < -1$, $\cos\alpha_1$ est réel, mais $\sin\alpha$ et $\sin\alpha_1$ sont imaginaires purs, donc S_3 est réel pourvu que ω_1 et ω_3 soient réels, et ω_2 imaginaire pur. Enfin, si $a > 1$, seul le coefficient $\sin\alpha$ des expressions est imaginaire, pur, et le S_3 est imaginaire pur pourvu que ω_1 soit imaginaire pur, et ω_2, ω_3 réels.

34. $n = 4$. — Les S_4 en question sont semblables à $S_4^1 = (\ )$, avec $\Delta_4^1 = (1-a)^3(1+3a)$, ou à $S_4^2 = (34)$, avec $\Delta_4^2 = (1-a)^2(1-5a^2)$.

Il sera commode d'appeler « associés » deux systèmes S_p et S_n lorsque les sphères de S_p, si $p \leq n$, sont les p premières sphères de S_n.

Lorsque $a = -\frac{1}{2}$, le S_3 associé au S_4 étudié est représenté par (2), avec $\lambda \neq 0$,

(17) ω_1, ω_2 sont sécants et anallagmatiquement équivalents à deux droites rectangulaires. Si O est leur intersection, ω_3 et ω_4, qui leur sont orthogonaux et sont orthogonaux entre eux, sont de la forme $\dfrac{\overrightarrow{OP}^2 - \rho^2}{2\rho}$, $\dfrac{\overrightarrow{OP}^2 + \rho^2}{-2i\rho}$ respectivement, avec le même nombre complexe ρ. Mais alors $\omega_3 + i\omega_4 = -\rho$ est réel pourvu que ρ le soit.

afin que ce S_4 puisse être régulier, puisque $\Delta_4\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$. U_1, U_2, U_4 forment un S_3 analogue, donc U_4 est de la forme

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \mu(\omega_3 - i\omega_4) \qquad (\mu \neq 0). \tag{3}$$

Nous avons remplacé le terme $\omega_3 + i\omega_4$ de U_3 par $\omega_3 - i\omega_4$ afin que les quatre U_i soient linéairement distincts, puisque S_4 est régulier. Il reste à écrire que $U_3 U_4 = \pm a$, suivant qu'il s'agit de S_4^1 ou de S_4^2. Il vient ainsi

$$U_3 U_4 = 1 + 2\lambda\mu = \mp \frac{1}{2},$$

donc $\lambda\mu = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{4}$. Pour S_4^1, $\lambda\mu = -\frac{3}{4}$, ce qui permet de prendre

$$\lambda = -\mu = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

par exemple. C'est la solution donnée dans l'article cité ([18]). Pour S_4^2, $\lambda\mu = -\frac{1}{4}$, et l'on peut prendre $\lambda = -\mu = \frac{1}{2}$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{-\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3 = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \dfrac{\omega_3 + i\omega_4}{2}, \\ U_4 = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} - \dfrac{\omega_3 - i\omega_4}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

S_4^1 est l'équivalent anallagmatique du système que forment les trois côtés d'un triangle équilatéral et son cercle circonscrit. S_4^2 a également pour image type un triangle équilatéral ABC et le cercle qui passe par A et est centré au point symétrique de A par rapport à BC.

Si $a \neq -\frac{1}{2}$, le S_3 associé est donné par (1), et le quatrième cercle U_4 de S_4^1 est de la forme ([19])

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\alpha_2 + \omega_4 \sin\alpha_2)],$$

donc S_4^1 est représenté par

$$\begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\alpha_1 + \omega_4 \sin\alpha_2)]. \end{cases} \tag{5}$$

([18]) *Loc. cit.*, p. 232-235, pour $p = 3$.

([19]) *Loc. cit.*, p. 229.

Dans S_4^2, si $a \neq -\frac{1}{2}$, le cercle U_4 à adjoindre à (1) est de la forme

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\beta_1 + \omega_4 \sin\beta_1)],$$

où $\cos\beta_1$ est déterminé par la condition

$$U_3 U_4 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 \cos\beta_1) = -\cos\alpha,$$

soit

$$\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 \cos\beta_1 = -\frac{a}{1-a},$$

qui donne pour $\cos\beta_1$ l'expression du tableau T. S_4^2 est donc représenté par les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_1 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\beta_1 + \omega_4 \sin\beta_1)]. \end{cases}$$

Comme prévu, $\sin\beta_1$ s'annule en même temps que Δ_4^2, et les quatre cercles sont alors linéairement liés ($n = N + 2$); plus précisément $\cos\beta_1 = -1$.

Rappelons la forme de S_4^1 pour $a = -\frac{1}{3}$. Dans (5), $\sin\alpha_2 = 0$ et $\cos\alpha_2 = -1$; l'expression de U_4 se réduit à

$$(7)\qquad U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 - \omega_3 \sin\alpha_1).$$

et la relation linéaire imposée par l'irrégularité de S_4^1 est

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0,$$

d'après $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

35. Examinons l'existence des S_4 purs. Pour $-1 < a < 1$, $a \neq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$, la réalité des U_i de (5) équivaut à celle de ω_1, ω_2, $\omega_3 \sin\alpha_1$, $\omega_4 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$. Les expressions de $\sin\alpha_1$ et de $\sin\alpha_2$ de T donnent alors le tableau (20)

a.....	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1
ω_1.....	r	r	r	
ω_2.....	r	r	r	
ω_3.....	i	r	r	
ω_4.....	r	i	r	

où les lettres r et i indiquent le caractère réel ou imaginaire pur. Ainsi, S_4^1 n'est

(20) Dans ce tableau, comme dans tous ceux qui suivront, la colonne qui contient $a = 0$, ne peut fournir aucun S_n pur, puisqu'il n'existe pas de S_n orthonormaux réels, si $n \geq 4$, dans le plan; il en sera de même pour $n \geq 5$ dans l'espace.

réel que pour $-1 < a \leq -\frac{1}{3}$. Pour les mêmes valeurs de a, la réalité des U_i de (6) équivaut à celle de ω_1, ω_2, $\omega_3 \sin\alpha_1$, $\omega_4 \sin\alpha_1 \sin\beta_1$, ce qui donne le tableau

a	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	1
ω_1	r	r	r	r	
ω_2	r	r	r	r	
ω_3	i	r	r	r	
ω_4	r	i	r	i	

S_4^2 n'est réel que pour $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq |a| < 1$. Le tableau suivant rassemble ces deux ensembles de résultats sur la réalité des S_4 formés de cercles sécants :

a	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	1
Réalité des S_4	S_4^1 et S_4^2	S_4^1 et S_4^2	S_4^1	aucun S_4	S_4^2	

Pour $a = -\frac{1}{3}$, la dernière équation (5) est remplacée par (7), et la réalité de S_4^1 est assurée par celle de ω_1, ω_2, ω_3, ce qui justifie la réponse affirmative donnée plus haut pour cette valeur limite. On voit de même que la réalité de S_4^2 est assurée, pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, par celle des trois premiers ω_i,

Étudions maintenant l'existence de S_4 formés par quatre cercles réels non sécants. a est inférieur à -1, donc de la forme $a = -\operatorname{ch}\theta$ (θ réel), et $\sin\alpha = i\operatorname{sh}\theta$. Les deux S_4, qui sont nécessairement réguliers, sont représentés par (5) et par (6). $\sin\alpha_1$ et $\sin\beta_1$ sont imaginaires purs, $\sin\alpha_2$ est réel, donc il faut et il suffit que ω_1 et ω_3 soient réels, ω_2 imaginaire pur, mais ω_4 réel dans (5) et imaginaire pur dans (6). Le S_4^1 réel existe, mais non le S_4^2.

Enfin les U_i imaginaires purs supposent $a > 1$, soit $a = \operatorname{ch}\theta$ (θ réel). On a encore $\sin\alpha = i\operatorname{sh}\theta$, et (5) et (6) sont valables. $\sin\alpha_1$ et $\sin\alpha_2$ sont réels, mais $\sin\beta_1$ est imaginaire pur, donc S_4^1 se construit avec un ω_1 imaginaire pur, et les autres ω_i réels, tandis que ω_4 est également imaginaire pur dans S_4^2. Le S_4^1 imaginaire pur existe donc, mais non le S_4^2.

36. $n = 5$. — Les S_5 du plan sont irréguliers, donc de la classe C_4 avec $a = -\frac{1}{4}$, ou C_2 avec $8a^2 - a - 1 = 0$, ou C_3 avec $a = \frac{1}{3}$ ou $4a^2 - a - 1 = 0$, ou enfin C_4 avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Il est inutile de considérer les classes C'_1, C'_2, C'_3 qui se ramènent aux classes citées de même indice en changeant a en $-a$, ni la valeur $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ puisque $C_4 = C'_4$.

Le S_5^1, de la classe C_1, est le pentacercle strictement isogonal construit avec $a = -\frac{1}{4}$. Le S_4 associé est régulier, et représenté par (5). U_1, U_2, U_3, U_5 forment un S_4 analogue, donc U_5 ne diffère de U_4 que par le signe du terme en ω_4. On vérifie alors qu'on a bien $U_4 U_5 = -\frac{1}{4}$, et le système qui représente ce S_5^1 est ainsi

$$(8)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\,(\omega_3 \cos\alpha_2 + \omega_4 \sin\alpha_2)], \\ U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\,(\omega_3 \cos\alpha_2 - \omega_4 \sin\alpha_2)]. \end{cases}$$

Il n'est pas pur puisque le S_4^1 associé ne l'est pas pour $a = -\frac{1}{4}$.

Un système type de la classe C_2 est $S_5^2 = (45)$, avec $8a^2 - a - 1 = 0$, dont les deux racines sont comprises entre $-\frac{1}{3}$ et 1. Le S_4 associé est encore représenté par (5), et U_5 par la dernière équation (8), pour la raison invoquée au sujet de S_5^1. (8) représente encore ce S_5^2, car on vérifie que

$$U_4 U_5 = 1 - 2\sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 = 1 - 2\frac{(1-a)(1+3a)}{1+2a} = \frac{6a^2 - 2a - 1}{1+2a}$$

est bien égal à $-a$ pour ces deux valeurs de a. S_5^2 est impur, puisque les deux valeurs de a en question sont dans l'intervalle $-\frac{1}{3}$, 1 dans lequel le S_4^1 associé est impur. Bien entendu, ces deux systèmes S_5^1 et S_5^2 existent sous forme réelle dans l'espace. La relation qui assujettit les U_i est

$$\frac{U_5 + U_4}{2} - U_3 \cos\alpha_2 - U_2 \cos\alpha_1 (1 - \cos\alpha_2) - U_1 \cos\alpha (1 - \cos\alpha_1)(1 - \cos\alpha_2) = 0,$$

où

$$\cos\alpha (1 - \cos\alpha_1) = \cos\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha_1 (1 - \cos\alpha_2) = \cos\alpha_2,$$

ce qui donne

$$(9)\qquad U_5 + U_4 - \frac{2a}{1+2a}(U_3 + U_2 + U_1) = 0.$$

37. Un système de la classe C_3 est $S_5^3 = (23, 45)$. Le S_4 associé appartient à la classe $C(\sigma_4^2)$, et est régulier; son diagramme (23) montre qu'il est de la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,(\omega_2 \cos\alpha'_1 + \omega_3 \sin\alpha'_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\,(\omega_3 \cos\gamma_1 + \omega_4 \sin\gamma_1)], \end{cases}$$

où $\cos\alpha'_1$, défini par $U_2 U_3 = -\cos\alpha$, est conforme aux notations du tableau T,

tandis que $U_1U_4 = U_2U_4 = \cos\alpha$ justifient les coefficients de ω_1 et ω_2 dans l'expression de U_4; $\cos\gamma_1$ est défini par

$$U_3U_5 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos\alpha_1\cos\alpha'_1 + \sin\alpha_1\sin\alpha'_1\cos\gamma_1) = \cos\alpha,$$

qui se réduit à

$$\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\cos\gamma_1 = \sqrt{1-4a^2}\cos\gamma_1 = a,$$

de sorte que γ_1 est l'angle ainsi désigné dans T. U_5, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, ne peut en différer que par le signe du coefficient de ω_4. Il vient alors

$$U_4U_5 = U_4(U_5 - U_4) + 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1,$$

qui vaut bien $-a$ pour $a = \frac{1}{3}$, comme il résulte tout de suite du tableau T_2. Pour $4a^2 - a - 1 = 0$, on observe que

$$U_4U_5 = 1 - 2\frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)} = \frac{-1+a+8a^2-10a^3}{1-a-2a^2}$$
$$= -\frac{2a+4a^2-10a^3}{1-a-2a^2} = a\frac{-2+4(1+a)-10a^2}{2-(1+a)-2a^2} = -a.$$

On obtient ainsi trois S_5^3, représentés par

$$(11)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 + \omega_3\sin\alpha'_1), \\ U_4 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2(\omega_3\cos\gamma_1 + \omega_4\sin\gamma_1)], \\ U_5 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3\cos\gamma_1 - \omega_4\sin\gamma_1)], \end{cases}$$

avec $a = \frac{1}{3}$, ou $a' = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$, ou $a'' = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$. Ces trois valeurs sont comprises entre -1 et $+1$, donc les S_5^3 purs doivent être réels; plus précisément, on vérifie que $-\frac{1}{2} < a' < 0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < a'' < 1$, donc $\sin\alpha_1$ et $\sin\alpha'_1\cos\gamma_1$ sont réels; les U_i sont réels pourvu que ω_1 et ω_2 le soient, et que ω_3, ω_4 soient respectivement de même nature que $\sin\alpha'_1$ et $\sin\gamma_1$; on voit aisément que $-\frac{1}{\sqrt{5}} < a'$, tandis que $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est manifestement entre $\frac{1}{3}$ et a'', donc $\sin\alpha'_1$ est réel pour $\frac{1}{3}$ et a', et imaginaire pur pour a''; $\sin\gamma_1$ est réel, car $\sin^2\gamma_1$ est du signe de $(1-2a)(1-5a^2)$, qui est positif pour ces trois valeurs de a. Ainsi ω_4 doit être réel, tandis que ω_3 est réel pour $\frac{1}{3}$ et a', imaginaire pur pour a''. Le seul S_5^3 réel est celui construit avec $a = a''$.

La relation linéaire existant entre ces cinq cercles est, grâce à T,

$$\begin{vmatrix} U_1 & 1 & 0 & 0 \\ U_2 & a & 1 & 0 \\ U_3 & a & \frac{-a}{1-a} & \frac{\sqrt{1-2a}}{1-a} \\ U_4+U_5 & 2a & \frac{2a}{1+a} & \frac{2a}{(1+a)\sqrt{1-2a}} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la dernière colonne par $\sqrt{1-2a}$, et ajoutons la deuxième ligne à la troisième; il vient

$$\begin{vmatrix} U_1 & 1 & 0 & 0 \\ U_2 & a & 1 & 0 \\ U_2+U_3 & 2a & \frac{1-2a}{1-a} & \frac{1-2a}{1-a} \\ U_4+U_5 & 2a & \frac{2a}{1+a} & \frac{2a}{1+a} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} U_1 & 1 & 0 \\ U_2+U_3 & 2a & \frac{1-2a}{1-a} \\ U_4+U_5 & 2a & \frac{2a}{1+a} \end{vmatrix} = 0;$$

on observe que

$$\frac{1-2a}{1-a} - \frac{2a}{1+a} = \frac{1-3a}{1-a^2}, \qquad \frac{1-2a}{1-a} + \frac{2a}{1+a} = \frac{1+a-4a^2}{1-a^2},$$

donc la soustraction des deux dernières lignes pour $a = \frac{1}{3}$, et leur addition pour a' et a'', donnent les deux relations respectives

$$(12) \qquad U_2+U_3-U_4-U_5 = 0, \qquad a = \frac{1}{3},$$

$$(12') \qquad U_2+U_3+U_4+U_5 = 4aU_1, \qquad 4a^2-a-1 = 0.$$

Observons que, pour $a = \frac{1}{3}$, U_2, U_3, U_4, U_5 forment un S_4 irrégulier; ce système est en effet de la classe $C(\sigma_4'^1)$, dont le déterminant

$$\Delta_4'^1 = (1+a)^3(1-3a)$$

est nul pour cette valeur de a.

38. Étudions maintenant les S_5 de la classe C_4, avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Un système type est $S_5^4 = (23, 34, 45)$. Le S_3 associé est régulier, mais le S_4 associé ne l'est pas, car il appartient à la classe $C(\sigma_4^2)$; U_1, U_2, U_3 ont encore les expressions (10), mais U_4, qui leur est linéairement lié, avec $U_1U_4 = U_2U_4 = a$, est de la forme

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \varepsilon\omega_3 \sin\alpha_1),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ est déterminé par la condition $U_3U_4 = -a$. La même observation vaut pour U_5, qui doit se déduire de U_4 en changeant le signe de ε, puisque

$U_3U_5 = a$. Il vient, d'autre part,

$$U_3U_4 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos\alpha_1\cos\alpha'_1 + \varepsilon\sin\alpha_1\sin\alpha'_1) = \varepsilon\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1$$
$$= \varepsilon\sqrt{1-4a^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} = \varepsilon a,$$

donc $\varepsilon = -1$ répond aux conditions. On voit enfin que

$$U_4U_5 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1) = 1 - 2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1 = 1 - 2\frac{(1-a)(1+2a)}{1+a}$$
$$= 1 - 2\frac{1+a-\frac{2}{5}}{1+a} = -1 + \frac{4}{5}\frac{1-a}{1-a^2} = -a,$$

comme il se doit, donc ce S_5^4 existe, sous la forme des expressions

$$(13)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 + \omega_3\sin\alpha'_1), \\ U_4 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 - \omega_3\sin\alpha_1), \\ U_5 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 + \omega_3\sin\alpha_1). \end{cases}$$

Tous les coefficients sont réels, donc les U_i sont réels pourvu que ω_1, ω_2, ω_3 le soient, ce qui est possible. Formons les deux relations qui unissent U_4 et U_5 à U_1, U_2, U_3. Elles sont de la forme

$$\begin{vmatrix} U_2 - aU_1 & 1 & 0 \\ U_3 - aU_1 & \cos\alpha'_1 & \sin\alpha'_1 \\ U_i - aU_1 & \cos\alpha_1 & \varepsilon\sin\alpha_1 \end{vmatrix} = 0,$$

avec $\varepsilon = -1$ pour $i = 4$, $\varepsilon = 1$ pour $i = 5$. Après multiplication par $1 - a^2$, cela se développe en

$$(1+a)\sqrt{1-2a}\,(U_i - aU_1) - \varepsilon(1-a)\sqrt{1+2a}\,(U_3 - aU_1)$$
$$- a\left(\sqrt{1-2a} + \varepsilon\sqrt{1+2a}\right)(U_2 - aU_1) = 0;$$

grâce à

$$(1+a)(1-2a) = \frac{3}{5} - a = a(3a-1), \qquad \sqrt{1-4a^2} = a,$$

la multiplication de cette relation par $\frac{1}{a}\sqrt{1-2a}$ la transforme en

$$(3a-1)(U_i - aU_1) - \varepsilon(1-a)(U_3 - aU_1) - (1-2a+\varepsilon a)(U_2 - aU_1) = 0,$$

ou

$$(3a-1)U_i - \varepsilon(1-a)U_3 - (1-2a+\varepsilon a)U_2 - a(5a-2-\varepsilon)U_1 = 0,$$

ou enfin

$$(3a-1)U_i - \varepsilon(1-a)U_3 - (1-2a+\varepsilon a)U_2 - (1-2a-\varepsilon a)U_1 = 0.$$

Les deux valeurs de ε donnent ainsi les deux relations

$$(3a-1)(U_4+U_2)+(1-a)(U_3-U_1)=0,$$
$$(3a-1)(U_5+U_1)-(1-a)(U_3+U_2)=0.$$

En observant enfin que $\frac{1-a}{3a-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, on a en définitive

$$(14)\qquad \begin{cases} U_4+U_2+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(U_3-U_1)=0, \\ U_5+U_1-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(U_3+U_2)=0. \end{cases}$$

39. $n=6$. — Le S_5 associé est l'un des systèmes que nous venons de former, à une anallagmatie près, avec $a=-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou l'un des zéros de $8a^2-a-1$, $4a^2-a-1$. Mais a doit également annuler l'un des déterminants Δ_6, ce qui n'est possible que si $a=\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Les classes $C(\sigma_6^h)$ irrégulières pour $a=\frac{1}{3}$ sont ([21]) C_3, C_5, C_5' et C_9. Un diagramme de C_3 est (34, 56), dont le S_5 associé est (34), de la classe $C(\sigma_5^2)$, qui est régulier pour $a=\frac{1}{3}$. Un diagramme de C_5' est le quadrilatère (34, 45, 56, 63), dont le S_5 associé est (34, 45), de la classe $C(\sigma_5'^3)$, également régulier pour $a=\frac{1}{3}$; il en est de même pour $S_5=(23, 34, 45)$, de la classe $C(\sigma_5^1)$, associé au diagramme (23, 34, 45, 56) de C_9.

La classe C_5 peut seule fournir un S_6. Prenons $S_6=(23; 45; 61)$, de sorte que le S_5 associé soit le $S_5^3=(23; 45)$ représenté par les équations (11). Le cercle $-U_6$ faisant les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, U_6 est de la forme

$$U_6=-\omega_1\cos\alpha-\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1'+\sin\alpha_1'(\omega_3\cos\alpha_2'+\omega_4\sin\alpha_2')],$$

où α_2' est déterminé par les conditions $U_3U_6=U_4U_6=U_5U_6=a$. La première s'écrit

$$U_3(U_6+U_3)=\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1'(1-\cos\alpha_2')=\frac{(1+a)(1-2a)}{1-a}(1-\cos\alpha_2')=1+a,$$

qui donne

$$\cos\alpha_2'=1-\frac{1-a}{1-2a}=\frac{-a}{1-2a},$$

conformément aux notations du tableau T; mais, ici, $\cos\alpha_2'=-1$, $\sin\alpha_2'=0$.

([21]) *Cf.* § 12.

On vérifie alors tout de suite que

$$U_4(U_6+U_3)=U_5(U_6+U_3)=2\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\cos\gamma_1=2a,$$

d'où résulte la solution S_6^5 représentée par le système d'expressions

$$(15)\qquad \begin{cases} U_1= & \omega_1,\\ U_2= & \omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha,\\ U_3= & \omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1+\omega_3\sin\alpha'_1),\\ U_4= & \omega_1\cos\alpha+\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1(\omega_3\cos\gamma_1+\omega_4\sin\gamma_1)],\\ U_5= & \omega_1\cos\alpha+\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1(\omega_3\cos\gamma_1-\omega_4\sin\gamma_1)],\\ U_6= & -\omega_1\cos\alpha-\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1-\omega_3\sin\alpha'_1). \end{cases}$$

Avec les valeurs numériques du tableau T_2, ce système s'écrit

$$(15')\qquad \begin{cases} U_1=\omega_1, & U_4=\dfrac{\omega_1}{3}+\dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}}+\dfrac{\omega_3+2\omega_4}{\sqrt{6}},\\ U_2=\dfrac{\omega_1+2\sqrt{2}\,\omega_2}{3}, & U_5=\dfrac{\omega_1}{3}+\dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}}+\dfrac{\omega_3-2\omega_4}{\sqrt{6}},\\ U_3=\dfrac{\omega_1}{3}+\sqrt{2}\,\dfrac{-\omega_2+\sqrt{3}\,\omega_3}{3}, & U_6=-\dfrac{\omega_1}{3}+\sqrt{2}\,\dfrac{\omega_2+\sqrt{3}\,\omega_3}{3}. \end{cases}$$

Outre la relation (12) formée au paragraphe 37, il existe une relation linéaire entre U_1, U_2, U_3, U_6, qui apparaît tout de suite en formant U_6-U_3, donc les U_i sont liés par les deux relations

$$(16)\qquad \begin{cases} U_2+U_3-U_4-U_5=0,\\ U_1-U_2-U_3+U_6=0. \end{cases}$$

(15′) n'est pas pur, puisque S_3^3 ne l'est pas pour $a=\frac{1}{3}$; c'est d'ailleurs évident sur ces expressions numériques.

40. Recherchons maintenant les S_6 formés avec $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Les classes $C(\sigma_6^h)$ irrégulières pour cette valeur sont C_7, C'_7, C_9 et C_{10}. Au diagramme (45, 56, 61) de la classe C_7 est associé $S_5^2=(45)$, régulier pour $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Au diagramme (45, 56, 61; 23) de C'_7 est associé $S_5^3=(23;45)$, qui est également régulier. Ce même S_5^3 est associé au $S_6=(23, 36, 64, 45)$ de la classe C_9. Ainsi, la seule classe qui puisse fournir une solution est C_{10}. Avec $S_6^{10}=(23, 34, 45, 56, 62)$, le S_5 associé est le S_5^4 représenté par les expressions (13). U_6, qui fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$U_6=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha'_1+\sin\alpha'_1(\omega_3\cos\beta'_1+\omega_4\sin\beta'_1)],$$

où $\cos\beta'_1$ est défini par $U_3U_6=\cos\alpha$, c'est-à-dire

$$U_3(U_3-U_6)=\sin^2\alpha\sin^2\alpha'_1(1-\cos\beta'_1)=\frac{(1+a)(1-2a)}{1-a}(1-\cos\beta'_1)=1-a,$$

qui donne

$$\cos\beta'_1 = 1 - \frac{(1-a)^2}{(1+a)(1-2a)} = \frac{a(1-3a)}{(1+a)(1-2a)},$$

conforme aux notations du tableau T. Mais alors $\sin\beta_1 = 0$, et, plus précisément, on voit que $\cos\beta_1 = -1$. On vérifie ensuite que U_1U_6 et U_5U_6 valent respectivement

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos\alpha_1\cos\alpha'_1 \pm \sin\alpha_1\sin\alpha'_1) = \pm\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1 = \pm\sqrt{1-4a^2} = \pm a,$$

comme il se doit, et l'on a ainsi obtenu le S_6^{10} du plan

$$(17)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 + \omega_3\sin\alpha'_1), \\ U_4 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 - \omega_3\sin\alpha_1), \\ U_5 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 + \omega_3\sin\alpha_1), \\ U_6 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 - \omega_3\sin\alpha'_1). \end{cases}$$

Ces expressions sont évidemment valables pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, le tableau T_3 donne les expressions numériques

$$(17')\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, & U_4 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1}, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}}, & U_5 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{-\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1}, & U_6 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1}. \end{cases}$$

Il suffirait de changer $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ pour $a = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Ce système est réel si ω_1, ω_2, ω_3 le sont. U_1, U_2, U_3 sont seuls linéairement distincts, et il s'ajoute aux relations (14) la relation

$$U_6 + U_3 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}(U_2 - U_1) = 0,$$

pour le système (17').

41. $n = 7$. — Le S_6 associé est l'un des deux systèmes que nous venons de former avec $a = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Supposons d'abord $a = \frac{1}{3}$. Le diagramme de S_7, qui se déduit de celui de S_6^* par l'adjonction de 0, 1, 2 ou 3 segments ([22]) issus du sommet 7, est formé par

([22]) Ce nombre de segments peut être supposé ≤ 3, en utilisant au besoin ν_7.

3 traits au moins (isolés dans ce cas) et 6 au plus. Les seules classes de S_7, irrégulières pour $a = \frac{1}{3}$, et susceptibles d'une telle représentation graphique, sont ainsi ([23]) C_5, C_{10}, C_{14}, C'_{15}, C_{18}, C_{23}, C_{24}, C'_{24}, C_{25}, C_{26}.

Un diagramme de C_5 est (34, 56, 71), et le S_5 associé est (34), de la classe $C(\sigma_5^2)$, régulière pour $a = \frac{1}{3}$. Ce même S_5 est associé à $S_7 = (17, 72; 34; 56)$, de la classe C_{10}; il n'y a pas non plus de S_7^{10}. Les quatre traits consécutifs de C_{14} ne peuvent se construire à partir de S_6^5. Un graphique de C'_{15} est $S_7 = (12, 23, 31; 46; 57)$, et le S_5 associé est (12, 23, 31), de la classe $C(\sigma_3'^2)$ formée à l'alinéa γ_3 (§ 5), donc régulier pour $a = \frac{1}{3}$. $S_5 = (34)$ est encore associé au $S_7 = (16, 65, 57, 72; 34)$ de la classe C_{18}, ainsi qu'au $S_7 = (76, 65; 74, 43; 72)$ de C_{23}, et au $S_7 = (73, 34, 46, 67; 75)$ de C_{24}. Un graphique de la classe C'_{24}, de l'alinéa ζ_7 (§ 18) est (21, 17, 72; 23, 34; 56) dont le S_6 associé est (12, 23, 34; 56), de la classe $C(\sigma_6'^7)$ régulière pour $a = \frac{1}{3}$. Les deux diagrammes (23, 34, 45, 56, 67, 72) de C_{25} et (23, 34, 35, 57, 72; 71) de C_{26} ont le même S_5 associé, dont le diagramme (23, 34, 45) appartient à la classe $C(\sigma_3^4)$, régulière pour $a = \frac{1}{3}$. Ainsi, cette valeur de a ne fournit aucun S_7.

Lorsque $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, le diagramme de S_7 est associé à celui de S_6^{10}, et comporte

Système.	Valeur de a.	Expressions représentatives.	Nature.
$S_5^1 = (\ )$	$-\frac{1}{4}$	(8)	impur
$S_5^2 = (45)$	$8a^2 - a - 1 = 0$	(8)	»
$S_5^3 = (23; 45)$	$\frac{1}{3}$	(11)	»
	$\frac{1-\sqrt{17}}{8}$	(11)	»
	$\frac{1+\sqrt{17}}{8}$	(11)	réel
$S_5^4 = (23, 34, 45)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	(13)	»
$S_6^7 = (23; 45; 61)$	$\frac{1}{3}$	(15)	impur
$S_6^{10} = (23, 34, 45, 56, 62)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	(17)	réel

([23]) Le diagramme de C'_{25}, formé aux alinéas λ_{11} et λ_{17}, comporte 7 traits.

donc 5 traits au moins (formant alors un pentagone) et 8 au plus. Les seules classes de S_7 à retenir sont C'_7, C'_{12}, C_{20}, C'_{20}, C'_{22}, C_{26}, C'_{26}. Mais le S_7 de C'_7 formé à l'alinéa ζ_3 (§ 17), ni celui de C'_{12}, formé à l'alinéa η_{11} (§ 16) n'ont 5 traits consécutifs. Les diagrammes $(73, 34, 46, 65, 57)$ de C_{20} et $(73, 34, 46, 65, 57; 71)$ de C_{26} sont associés à $S_5^2=(34)$, régulier pour $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$. $S_5^3=(12, 34)$, régulier pour cette même valeur de a, est le S_5 associé au $S_7=(73, 34, 46, 65, 57; 12)$ de C'_{20} formé à l'alinéa ζ_1 (§ 17), ainsi qu'au $S_7=(73, 34, 46, 65, 57; 71, 12)$ de C'_{26} formé à l'alinéa λ_5 (§ 22). Enfin, le diagramme de C'_{22} formé à l'alinéa ζ_{16} (§ 18) ne peut se déduire d'un pentagone. $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ne fournit aucun S_7.

Nous avons ainsi démontré qu'il n'existe aucun heptacercle isogonal dans le plan. Par contre, il existe quatre types de pentacercle et deux types d'hexacercle, dont nous rappelons les caractéristiques dans le tableau ci-dessus.

CHAPITRE V.

Les S_n isogonaux de l'espace E_3.

42. Les S_3 et les S_4 sont les mêmes que dans E_2, sauf les S_4 irréguliers, qu'on peut supposer formés avec $a=-\frac{1}{3}$ ou $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Le S_3 associé à $S_4^1\left(a=-\frac{1}{3}\right)$ ou à $S_4^2\left(a=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ est encore donné par (1; IV), mais l'expression (7; IV) ou (6; IV) de U_4 est remplacée par

$$U_4=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1-\omega_3\sin\alpha_1)+h\frac{\omega_4+i\omega_5}{2}, \tag{1}$$

où h est quelconque.

La discussion faite au paragraphe 35 sur la pureté des S_4 montre que ceux-ci existent sous forme réelle pour $-1<a<1$, car il existe quatre ω_i réels dans E_3; par contre il n'existe pas non plus de S_4^2 pur pour $|a|>1$, car aucun espace E_n ne contient deux ω_i imaginaires purs.

On peut construire les deux S_4 irréguliers représentés par (1; IV) et (1) en prenant trois plans orthonormaux pour ω_1, ω_2, ω_3, et deux sphères respectivement réelle et imaginaire pure pour ω_4, ω_5. Nous appelons $\mathfrak{S}_0$ le pentasphère orthonormal correspondant [24]

$$\mathfrak{S}_0:\quad \omega_i=\vec{e}_i.\overrightarrow{OP}\quad (i=1, 2, 3),\qquad \omega_4=\frac{\overrightarrow{OP}^2-\rho^2}{2\rho},\qquad \omega_5=\frac{\overrightarrow{OP}^2+\rho^2}{-2i\rho},$$

[24] Les trois vecteurs $\vec{e}_i$ sont orthonormaux; ρ est réel; P désigne le point courant de l'espace.

de sorte que $\omega_4 + i\omega_5 = -\rho$ représente le plan de l'infini. U_1, U_2, U_3 forment alors un trièdre de sommet O, que U_4 complète en tétraèdre si $h \neq 0$. Réciproquement, tout tétraèdre isogonal est un S_4 irrégulier, et est semblable à ceux-ci. Les seuls polyèdres réguliers dont l'angle polyèdre est un trièdre non rectangle sont le tétraèdre et le dodécaèdre. Le S_4^1 que nous venons de construire est justement un tétraèdre régulier, et le S_4^2 est le tétraèdre obtenu en coupant un trièdre de dodécaèdre régulier par un plan. Il ne peut s'agir d'un plan perpendiculaire à l'axe ternaire puisque $U_3 U_4$ est opposé à $U_1 U_4 = U_2 U_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On montre aisément que U_4 coupe les trois arêtes du trièdre à des distances proportionnelles à 1, 1, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Les expressions explicites de ces deux tétraèdres sont respectivement, pour $S_4^1\left(a = \frac{1}{3}\right)$,

$$(2)\quad \begin{cases} U_1 = \vec{e}_1 . \overrightarrow{OP}, \\ U_2 = \dfrac{-\vec{e}_1 + 2\sqrt{2}\,\vec{e}_2}{3}\overrightarrow{OP}, \\ U_3 = -\dfrac{\vec{e}_1 + \sqrt{2}\,\vec{e}_2 - \sqrt{6}\,\vec{e}_3}{3}\overrightarrow{OP}, \\ U_4 = -\dfrac{\vec{e}_1 + \sqrt{2}\,\vec{e}_2 + \sqrt{6}\,\vec{e}_3}{3}\overrightarrow{OP} - l, \end{cases}$$

où $l = \frac{h\rho}{2} \neq 0$, et, pour $S_4^2\left(a = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$,

$$(3)\quad \begin{cases} U_1 = \vec{e}_1 . \overrightarrow{OP}, \\ U_2 = \dfrac{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{OP}, \\ U_3 = \left(\vec{e}_1 + 2\dfrac{\vec{e}_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\vec{e}_3}{\sqrt{5}+1}\right)\dfrac{\overrightarrow{OP}}{\sqrt{5}}, \\ U_4 = \left(\vec{e}_1 + 2\dfrac{\vec{e}_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\vec{e}_3}{\sqrt{5}+1}\right)\dfrac{\overrightarrow{OP}}{\sqrt{5}} - l. \end{cases}$$

43. $n = 5$. — En changeant au besoin a en $-a$, il suffit de former un S_5 de chacune des classes C_1, C_2, C_3, C_4.

Le système strictement isogonal S_5^1 de C_1 est représenté par les expressions

$$(4)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \sin\alpha_2 + \omega_4 \sin\alpha_2)], \\ U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\{\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4 \cos\alpha_3 + \omega_5 \sin\alpha_3)]\}, \end{cases}$$

lorsqu'il est « itérativement régulier », c'est-à-dire lorsque tous les S_p associés d'ordre $p<n$, sont réguliers; pour $n=5$, cela suppose $a\neq-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$; les notations des angles α_i sont celles du tableau T. On a démontré dans un article antérieur ([25]) que (4) n'est pur que si $a\leq-\frac{1}{4}$ ou $a>1$, les U_i étant réelles et sécantes pour $-1<a\leq-\frac{1}{4}$, réelles non sécantes pour $a<-1$, et imaginaires pures pour $a>1$. Les expressions valables pour $a=-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ ont été données dans cet article ([26]). Pour $a=-\frac{1}{2}$, on peut leur donner la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} U_1=\omega_1, \\ U_2=\dfrac{-\omega_1+\sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3=-\dfrac{\omega_1+\sqrt{3}\,\omega_2}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\omega_3+i\omega_4), \\ U_4=-\dfrac{\omega_1+\sqrt{3}\,\omega_2}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\omega_3-i\omega_4), \\ U_5=-\dfrac{\omega_1+\sqrt{3}\,\omega_2}{2}+i\sqrt{3}\,(\omega_4+i\omega_5), \end{cases}$$

qu'on obtient en reproduisant les expressions (2; IV) et (3; IV) avec $\lambda=-\mu=\frac{\sqrt{3}}{2}$, et en ajoutant une cinquième sphère U_5, qui est *a priori* de la forme

$$(6)\qquad U_5=-\frac{\omega_1+\sqrt{3}\,\omega_2}{2}+\omega,$$

avec $\omega^2=\omega\omega_1=\omega\omega_2=0$, et $U_3U_5=U_4U_5=-\frac{1}{2}$. Avec un pentasphère du type $\mathfrak{S}_0$ du paragraphe 42, où les indices 1, 2, 3, 4, 5 des ω_i de (5) sont les indices 1, 2, 4, 5, 3 de $\mathfrak{S}_0$, U_1, U_2, U_3 sont les faces d'un prisme équilatéral parallèle à $\vec{e}_3$, et U_4, U_5 deux sphères centrées sur l'axe de ce prisme et circonscrites aux sections droites de leurs centres. En fonction de ρ, la hauteur de la section droite est $\rho\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc le rayon de ces sphères est $\frac{\rho}{\sqrt{3}}$, et la distance de leurs centres est égale à ρ.

Avec $a=-\frac{1}{3}$, une solution consiste en le tétraèdre régulier (2), de hauteur $l(l>0)$, auquel on adjoint une sphère qui est nécessairement de la forme

$$(7)\qquad U_5=-\frac{\vec{e}_1+\sqrt{2}\,\vec{e}_2+\sqrt{6}\,\vec{e}_3}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{\overrightarrow{OP}^2}{2\rho},$$

([25]) *Loc. cit.*, p. 242; c'est d'ailleurs immédiatement vérifiable.
([26]) *Loc. cit.*, p. 235.

avec $U_4U_5 = 1 + \frac{l}{\rho} = -\frac{1}{3}$, donc de rayon $|\rho| = \frac{3}{4}l$; c'est la sphère circonscrite.

44. Prenons $S_5^2 =$ (45) pour système type de la classe C_2. On sait que le déterminant $\Delta_5^2 = (1-a)^2(1+a)(1+a-8a^2)$, donc S_5^2 est régulier si $8a^2 - a - 1 \neq 0$. Lorsque a diffère de $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$, le S_4 associé est représenté par les quatre premières expressions (4), et U_5, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2 et U_3, est de la forme

$$U_5 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2)]\},$$

où $\cos\beta_2$ est déterminé par la condition $U_4U_5 = -a$; celle-ci s'écrit

$$U_4(U_4 - U_5) = \sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2(1-\cos\beta_2) \equiv \frac{(1-a)(1+3a)}{1+2a}(1-\cos\beta_2) = 1+a,$$

donc

$$\cos\beta_2 = 1 - \frac{(1+a)(1+2a)}{(1-a)(1+3a)} = \frac{-a(1+5a)}{(1-a)(1+3a)}$$

est conforme aux notations du tableau T. S_5^2 est ainsi représenté par

$$(8)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 + \omega_3\sin\alpha_1), \\ U_4 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3\cos\alpha_2 + \omega_4\sin\alpha_2)], \\ U_5 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2)]\}, \end{cases}$$

pour $a \neq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$. On vérifie l'irrégularité pour $8a^2 - a - 1 = 0$, qui annule $\sin\beta_2$.

Lorsque $a = -\frac{1}{2}$, les quatre premières expressions (5) subsistent, ainsi que (6), mais avec les conditions $U_3U_5 = -U_4U_5 = -\frac{1}{2}$; il vient alors

$$\omega(\omega_3 + i\omega_4) = -\frac{3}{\sqrt{3}}, \qquad \omega(\omega_3 - i\omega_4) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

qui, joints à $\omega\omega_1 = \omega\omega_2 = \omega^2 = 0$, donnent

$$(9)\qquad U_5 = -\frac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} - \frac{\omega_3 - 2i\omega_4}{\sqrt{3}} + \omega_5.$$

Avec les ω_i particularisés pour la construction de (5), U_1, U_2, U_3 sont les faces du même prisme, U_4 est la même sphère, mais U_5 est déplacée parallèlement au prisme de manière que la distance des deux centres soit maintenant égale à $\frac{\rho}{\sqrt{3}}$, donc au rayon.

Pour $a=-\frac{1}{3}$, (2) et (7) conviennent encore, mais $U_4U_5=1+\frac{l}{\rho}=\frac{1}{3}$ donne maintenant $\rho=-\frac{3l}{2}$; U_5 est l'homothétique double de la sphère circonscrite, par rapport à un sommet du tétraèdre.

Discutons de la réalité des S_5^2 représentés par (8). Pour $-1<a<1$, les U_i doivent être réels; les cosinus étant toujours réels, ce caractère des U_i s'exprime par la réalité de ω_1, ω_2, tandis que ω_3, ω_4, ω_5 sont respectivement de la même nature que $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_1\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\beta_2$. Les valeurs caractéristiques de a sont $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, et les zéros a', a'' de $8a^2-a-1$, qui sont compris entre $-\frac{1}{3}$ et 1. Avec les notations habituelles, la discussion est résumée dans le tableau suivant :

a	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	a'	0	a''	1
ω_1	r	r	r	r	r		
ω_2	r	r	r	r	r		
ω_3	i	r	r	r	r		
ω_4	r	i	r	r	r		
ω_5	r	r	i	r	i		

Les S_5^2 purs, formés de sphères sécantes, n'existent donc que dans les intervalles $-1<a\leq a'$ et $a''\leq a<1$; les bornes a', a'' conviennent, puisque $\sin\beta_2=0$ élimine ω_5 des expressions (8). S_5^2 devrait être également réel pour $a<-1$; or, ces valeurs de a modifient la nature des coefficients $\sin\alpha$, $\sin\alpha_2$, $\sin\beta_2$ par rapport à la colonne $-1<a<-\frac{1}{2}$; ω_2 et ω_5 devraient changer de nature et devenir imaginaires pures, ce qui est impossible. S_5^2 devrait être imaginaire pur pour $a>1$; or ces valeurs de a ne changent la nature que de $\sin\alpha$, par rapport à la colonne $a''<a<1$; ω_4 seul devrait changer de nature, ω_4 et ω_5 seraient alors imaginaires, ce qui est impossible. En résumé il n'y a pas d'autres S_5^2 purs que ceux fournis par les intervalles $-1<a\leq a'$ et $a''\leq a<1$.

45. Un système type de C_3 est $S_5^3=(23;45)$, et

$$\Delta_5^3=(1+a)^2(1-3a)(1+a-4a^2).$$

Le S_4 associé est de la classe $C(\sigma_4^2)$ et représenté par le système (10; IV) si $a\neq\frac{1}{2}$, afin que le S_3 associé soit régulier; U_1, U_2, U_3, U_5 forment un S_4 analogue, donc, si $\sin\gamma_1\neq 0$, U_5 est de la forme

$$U_5=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1+\sin\gamma_1(\omega_4\cos\beta_5+\omega_5\sin\beta_5)]\},$$

où $\cos\beta_5$ est défini par $U_4U_5=-a$; ceci s'écrit

$$U_4(U_4-U_5)=\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1(1-\cos\beta_5)=\frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)}(1-\cos\beta_5)=1+a,$$

donc

$$\cos\beta_3 = 1 \quad \frac{(1+a)^2(1-2a)}{(1-a)(1-5a^2)} - \frac{a(1+3a-7a^2)}{(1-a)(1-5a^2)}$$

correspond aux notations du tableau T. Ainsi, pour $a \neq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\pm\sqrt{5}}$, les S_5^3 en question sont représentés par le système

$$(10)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,(\omega_2 \cos\alpha_1' + \omega_3 \sin\alpha_1'), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\,(\omega_3 \cos\gamma_1 + \omega_4 \sin\gamma_1)], \\ U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,\{\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\,[\omega_3 \cos\gamma_1 + \sin\gamma_1\,(\omega_4 \cos\beta_5 + \omega_5 \sin\beta_5)]\}. \end{cases}$$

$\sin\beta_5$ s'annule effectivement si $\Delta_5^3 = 0$, ce qui rend S_5^3 irrégulier; $\cos\beta_5$ est alors égal à -1 pour les trois valeurs de a : $\frac{1}{3}$ et les zéros a', a'' de $4a^2 - a - 1$.

Recherchons tout de suite les systèmes purs fournis par (10). Pour $-1 < a < 1$, la réalité des U_i équivaut à celle de ω_1, ω_2, alors que ω_3, ω_4, ω_5 sont respectivement de la nature des coefficients [27] $\sin\alpha_1'$, $\sin\alpha_1 \sin\gamma_1$ et $\sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \sin\beta_5$, donc de

$$\sqrt{1-2a}, \quad \sqrt{(1-2a)(1-5a^2)}, \quad \sqrt{(1-3a)(1-5a^2)(1+a-4a^2)}.$$

On voit aisément que $-\frac{1}{\sqrt{5}} < a' < 0$ et $\frac{1}{2} < a'' < 1$, et l'on a le tableau

a	-1	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	a'	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	a''	1
ω_1	r	r	r	r	r	r	r		
ω_2	r	r	r	r	r	r	r		
ω_3	r	r	r	r	r	i	i		
ω_4	i	r	r	r	i	r	r		
ω_5	r	i	r	i	r	r	i		

Il n'existe des S_5^3 réels que dans les intervalles $-1 < a \leq a'$ et $\frac{1}{3} \leq a \leq a''$; les bornes $\frac{1}{3}$, a', a'' conviennent car ω_5 disparaît alors des expressions (10). Pour $a < -1$, les U_i devraient être réelles, mais $\sin\alpha$ et $\sin\alpha \sin\alpha_1'$ sont imaginaires, ce qui exige la même qualité de ω_2, ω_3, impossible à réaliser. Pour $a > 1$, les U_i devraient être imaginaires, alors que $\sin\alpha \sin\alpha_1'$ est réel; ω_1 et ω_3 devraient être imaginaires, ce qui est impossible. Il n'y a pas d'autres S_5^3 purs que les S_5^3 réels correspondant aux deux intervalles ci-dessus; même les valeurs

---

[27] On observe que $\sin\alpha_1'$ est de même nature que $\sin\alpha_1 \cos\gamma_1$.

$a = \frac{1}{2}$ et $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ pour lesquelles (10) n'est plus valable, mais qui sont dans ces intervalles, donnent des systèmes réels comme nous allons le voir.

46. Pour $a = \frac{1}{2}$, le S_3 associé de S_3^3, de diagramme (23), est irrégulier, mais le S_4 associé est régulier. U_1, U_2, U_4 formant un système strictement isogonal, on peut prendre

$$\begin{aligned} U_1 &= \omega_1, \\ U_2 &= \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_4 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_3 &= \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \lambda(\omega_3 + i\omega_4), \end{aligned}$$

avec

$$U_3 U_4 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cos\alpha_1 + \lambda \sin\alpha \sin\alpha_1 \equiv \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2},$$

donc $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$. U_5, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\{\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\beta_1 + \sin\beta_1(\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)]\},$$

avec

$$U_4(U_5 - U_4) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 (\cos\beta_1 - 1) = -(1+a),$$

donc

$$\cos\beta_1 = 1 - \frac{(1+a)^2}{(1-a)(1+2a)} = \frac{-a(1+3a)}{(1-a)(1+2a)} = -\frac{5}{4},$$

conformément aux notations des tableaux T et T_2, et $\sin\beta_1 = \frac{3i}{4}$. Il reste à écrire que $U_3 U_5 = \frac{1}{2}$, ou

$$U_3(U_5 - U_4) \equiv \lambda \sin\alpha \sin\alpha_1 (\cos\beta_1 - 1 + i \sin\beta_1 \cos\theta) = 0,$$

donc $\cos\theta = -3$, et $\sin\theta = 2i\sqrt{2}$. Nous obtenons ainsi le S_5^3

$$(11) \qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1 - \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\dfrac{\omega_3 + i\omega_4}{2}, \\ U_4 = \dfrac{\omega_1}{2} + \dfrac{\omega_2}{2\sqrt{3}} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\omega_3, \\ U_5 = \dfrac{\omega_1}{2} + \dfrac{\omega_2}{2\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\dfrac{5\omega_3 + 9i\omega_4}{2} + 3\sqrt{2}\,\omega_5\right). \end{cases}$$

Il est réel en prenant pour ω_4 la seule sphère imaginaire pure. Avec le pentasphère $\mathfrak{C}_0$, où ρ est imaginaire pur, U_1, U_2, U_3 sont les faces d'un trièdre supplémentaire d'un trièdre de tétraèdre régulier.

Lorsque $a=\frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$, $\varepsilon=\pm 1$, le S_3 associé de S_5^3 est régulier, mais le S_4 est irrégulier. Les trois premières expressions (10) subsistent, mais celle de U_4, où $\cos\gamma=\varepsilon$ et $\sin\gamma_1=0$, est remplacée par une expression de la forme

$$U_4=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1+\varepsilon\omega_3\sin\alpha_1)+\lambda(\omega_4+i\omega_5).$$

U_5, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de forme analogue, mais avec un terme en $\omega_4-i\omega_5$ puisque S_5^3 est régulier, soit

$$U_5=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1+\varepsilon\omega_3\sin\alpha_1)+\mu(\omega_4-i\omega_5).$$

Il suffit d'exprimer que $U_4U_5=-\cos\alpha$, ce qui donne tout de suite $2\lambda\mu=-\frac{\varepsilon\sqrt{5}+1}{\varepsilon\sqrt{5}}$. λ et μ ne sont pas nuls, et l'on peut choisir les valeurs $\lambda=\frac{2}{\varepsilon\sqrt{5}}$, $\mu=-\frac{\varepsilon\sqrt{5}+1}{4}=\frac{-1}{\varepsilon\sqrt{5}-1}$, sans restriction de la généralité. Le S_5^3 ainsi obtenu est

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned}
&U_1=\omega_1,\\
&U_2=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha,\\
&U_3=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1+\omega_3\sin\alpha'_1),\\
&U_4=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1+\varepsilon\omega_3\sin\alpha_1)+2\frac{\omega_4+i\omega_5}{\varepsilon\sqrt{5}},\\
&U_5=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1+\varepsilon\omega_3\sin\alpha_1)-\frac{\omega_4-i\omega_5}{\varepsilon\sqrt{5}-1}.
\end{aligned}\right.$$

Les lignes trigonométriques étant réelles, ce système est réel si ω_5 est la seule sphère ω_i qui soit imaginaire pure. Avec $\varepsilon=1$, les formules numériques sont

$$(12')\qquad\left\{\begin{aligned}
&U_1=\omega_1,\\
&U_2=\frac{\omega_1+2\omega_2}{\sqrt{5}},\\
&U_3=\frac{\omega_1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{-\omega_2+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1},\\
&U_4=\frac{\omega_1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1}+2\,\frac{\omega_4+i\omega_5}{\sqrt{5}},\\
&U_5=\frac{\omega_1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1}-\frac{\omega_4-i\omega_5}{\sqrt{5}-1}.
\end{aligned}\right.$$

Avec le pentasphère $\mathfrak{C}_0$ du paragraphe 42, ρ réel, U_1, U_2, U_3, U_4 forment un tétraèdre dont l'angle des faces U_1, U_2, U_4 est un trièdre de dodécaèdre régulier. U_3 est le plan sécant appelé U_4 dans les formules (3) et U_5 est une sphère qui passe par les sommets $U_1=U_2=U_3=0$ et $U_1=U_2=U_4=0$.

Bien entendu, le S_3^3 relatif à $a=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ s'obtient en remplaçant, dans (12′), $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$.

47. Dans la classe C_4, dont le déterminant $\Delta_3^4=(1-5a^2)^2$, considérons le système $S_3^4=(23, 34, 45)$. Le S_4 associé est itérativement régulier si $a\neq\frac{1}{2}$ et $\frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$; il relève des formules déduites de (10; IV) en remplaçant $\sin\alpha_1$ par $-\sin\alpha_1$ de manière à changer le signe de U_3U_4. Les trois premiers termes de l'expression de U_5 sont les mêmes que dans (11; IV) ou (10), et la condition $U_4U_5=-a$, qui détermine le coefficient de ω_4, donne de ce S_3^4 les expressions

$$(13)\quad\begin{cases} U_1=\omega_1,\\ U_2=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha,\\ U_3=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1'+\omega_3\sin\alpha_1'),\\ U_4=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1(\omega_3\cos\gamma_1+\omega_4\sin\gamma_1)],\\ U_5=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1-\sin\gamma_1(\omega_4\cos\alpha_1'+\omega_5\sin\alpha_1')]\}. \end{cases}$$

En effet,

$$U_4U_5=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha[\cos^2\alpha_1-\sin^2\alpha_1(\cos^2\gamma_1-\sin^2\gamma_1\cos\alpha_1')]$$

$$=1-\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1[2-\sin^2\gamma_1(1+\cos\alpha_1')]=1-\frac{2(1-a)(1+2a)-(1-5a^2)}{1+a}=-a.$$

Ce S_3^4 n'est jamais pur. En effet, les U_i devraient être réels pour $-1<a<1$, donc ω_1, ω_2 seraient réels, et les autres ω_i seraient respectivement de la nature ([28]) de $\sin\alpha_1'$, $\sin\alpha_1\sin\gamma_1$, $\sin\alpha_1\sin\alpha_1'\sin\gamma_1$. Les valeurs caractéristiques de a sont justement $\frac{1}{2}$ et $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, et fournissent le tableau

a	-1	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	1
ω_1	r	r	r	r		
ω_2	r	r	r	r		
ω_3	r	r	r	i		
ω_4	i	r	i	r		
ω_5	i	r	i	i		

qui met en évidence notre affirmation pour ces valeurs de a. Pour $a<-1$, S_3^4 devrait être encore réel, mais le facteur $\sin\alpha$ devient imaginaire; les autres sinus sont de même nature que dans la première colonne du tableau, donc les ω_i ($i\geq 2$) ont la nature contraire. Pour $a>1$, S_3^4 devrait être imaginaire, et un

([28]) $\sin\alpha_1\cos\gamma_1$ est de la nature de $\sin\alpha_1'$.

raisonnement semblable montre que les ω_i d'indice $i \geqq 2$ seraient de même nature que dans la quatrième colonne. Dans les deux cas, la réalisation est impossible.

48. Lorsque $a = \frac{1}{2}$, le S_3 associé de ce S_3^4 est encore représenté par les trois premières expressions (11) de S_3^3, mais $U_3 U_4 = -\frac{1}{2}$ conduit à changer le signe de ω_3 dans l'expression de U_4. U_5 fait, avec U_1, U_2, U_4, les mêmes angles que la sphère U_5 de (11); elle est donc de la forme ([29])

$$U_5 = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2\sqrt{3}} + \frac{5\omega_3}{2\sqrt{6}} + \frac{3i}{2\sqrt{6}}(\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta),$$

puisque le changement de signe du coefficient de ω_3 dans U_4 produit le même effet dans U_5. Il reste à préciser θ par la condition nécessaire et suffisante $U_3 U_5 = \frac{1}{2}$, qui s'écrit

$$U_3 U_5 = \frac{5}{8} - \frac{3}{8}\cos\theta = \frac{1}{2},$$

donc $\cos\theta = \frac{1}{3}$, on peut faire évidemment $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, et l'on obtient le système

$$(14)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1 - \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\dfrac{\omega_3 + i\omega_4}{2}, \\ U_4 = \dfrac{\omega_1}{2} + \dfrac{\omega_2}{2\sqrt{3}} - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\omega_3, \\ U_5 = \dfrac{\omega_1}{2} + \dfrac{\omega_2}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\dfrac{5\omega_3 + i\omega_4}{2} + i\sqrt{2}\,\omega_5\right). \end{cases}$$

Il n'est pas pur, puisque ω_4 et ω_5 devraient être imaginaires.

Pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, le S_3^4 a été formé dans le plan en (13; IV); mais, dans E_3, on peut ajouter aux formules de U_4, U_5 deux sphères-points orthogonales à ω_1, ω_2, ω_3, et orthogonales entre elles afin de conserver $U_4 U_5$. Elles sont toutes les deux de la forme $\lambda(\omega_4 + i\omega_5)$, et le S_3^4 cherché s'écrit, grâce au tableau T_3

([29]) Le coefficient $\frac{3i}{2\sqrt{6}}$ est déterminé par la condition $U_5^2 = 1$.

pour les expressions numériques,

$$
(15)\quad
\begin{cases}
U_1 = \omega_1,\\
U_2 = \omega_1\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha = \dfrac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}},\\
U_3 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 + \omega_3\sin\alpha'_1) = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{-\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1},\\
U_4 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 - \omega_3\sin\alpha_1) + \lambda\,\dfrac{\omega_4 + i\omega_5}{2}\\
\qquad = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + \lambda\,\dfrac{\omega_4 + i\omega_5}{2},\\
U_5 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 + \omega_3\sin\alpha_1) + \mu\,\dfrac{\omega_4 + i\omega_5}{2}\\
\qquad \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + \mu\,\dfrac{\omega_4 + i\omega_5}{2}.
\end{cases}
$$

Pour $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, il suffirait de changer $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$; mais le système obtenu est directement semblable à (15) puisque $C_4 = C_4$. Ce système est réel si ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, λ, μ sont réels et ω_5 imaginaire pure. Ce fait ne contredit pas les résultats du tableau du paragraphe 47, car, lorsque a tend vers $\frac{1}{\sqrt{5}}$ à gauche, ω_4 reste réelle à la limite, tandis que ω_5 devient imaginaire (la continuité de sa nature est à droite de $\frac{1}{\sqrt{5}}$). (15) représente alors un pentaèdre lorsque les ω_i sont les sphères du $\mathfrak{S}_0$ du paragraphe 42, φ réel. L'indétermination qui porte sur λ, μ traduit la possibilité de déplacer par translation les faces U_4, U_5.

49. $n = 6$. — Les S_n d'ordre $n \geq 6$ sont irréguliers dans E_3 et, pour $n = 6$, nous pouvons borner la discussion ([30]) aux dix classes C_1, C_2, ..., C_{10}.

Dans C_1, a doit valoir $-\frac{1}{5}$, et le S_5 associé à S_6^1 est donné par (4), avec $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$. Il suffit d'ajouter la sphère U_6, distincte de U_5, qui fait les mêmes angles que celle-ci avec les quatre premières sphères; il s'agit nécessairement de

$$
(16)\quad U_6 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4\cos\alpha_3 - \omega_5\sin\alpha_3)]\}.
$$

Il vient alors

$$
(17)\quad U_5 U_6 = 1 - 2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\sin^2\alpha_3 = 1 - 2\,\frac{(1-a)(1+4a)}{1+3a} = -\,\frac{1+3a-8a^2}{1+3a},
$$

([30]) *Voir* la remarque faite au début du paragraphe 36.

qui vaut bien $-\frac{1}{5}$ pour $a=-\frac{1}{3}$. Ce S_6^1 n'est pas réel, car $-\frac{1}{5}$ est dans l'intervalle d'impureté $\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ de S_5^1. Ce caractère réduit l'intérêt des expressions numériques des formules (4), (16) de ce système.

Dans la classe C_2, $11a^2-2a-1=0$. Avec $S_5^2=(56)$, le raisonnement qui vient d'être fait pour S_6^1 demeure valable. (4) et (16) représentent encore S_6^2, et (17) donne maintenant $U_5U_6=-a$ pour ces deux valeurs de a. Celles-ci sont d'ailleurs dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ et ces deux S_6^2 ne peuvent être réels.

50. La classe C_3 ne peut donner que trois types de S_6^3, car $(1-3a)(1+2a-7a^2)=0$. On peut prendre $S_6^3=(36;45)$, de sorte que le S_5 associé est un S_5^2 régulier, relevant des formules (8). U_1, U_2, U_3, U_6 forment un système du type du S_4^2 représenté dans le plan par (6; IV), donc U_6 est ici de la forme

$$(18)\quad U_6=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1[\omega_3\cos\beta_1+\sin\beta_1(\omega_4\cos\gamma_2+\varepsilon\omega_5\sin\gamma_2)]\},$$

où γ_2 et $\varepsilon=\pm 1$ sont tels que $U_4U_6=U_5U_6=a$. La première condition s'écrit

$$U_4(U_4-U_6)\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1[\cos\alpha_2(\cos\alpha_2-\cos\beta_1)+\sin\alpha_2(\sin\alpha_2-\sin\beta_1\cos\gamma_2)]=1-a,$$

soit successivement

$$\frac{1+2a}{1+a}\left[1+\frac{a^2(1+3a)}{(1-a)(1+2a)^2}-\frac{(1+a)\sqrt{(1+a)(1+3a)(1-5a^2)}}{(1-a)(1+2a)^2}\cos\gamma_2\right]=1,$$

$$\sqrt{(1+a)(1+3a)(1-5a^2)}\cos\gamma_2=1+2a-a^2-(1-a)(1+2a)=a(1+a),$$

où les trois valeurs de a surpassent -1; γ_2 est donc l'angle ainsi désigné dans T. L'autre condition s'écrit ensuite

$$(U_5-U_4)U_6\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin\alpha_2\sin\beta_1[(\cos\beta_2-1)\cos\gamma_2+\varepsilon\sin\beta_2\sin\gamma_2]=0,$$

où

$$1-\cos\beta_2=1+\frac{a(1+5a)}{(1-a)(1+3a)}=\frac{(1+a)(1+2a)}{(1-a)(1+3a)},$$

donc [31]

$$\varepsilon(1+a-8a^2)=a(1+a).$$

Ainsi, $\varepsilon=1$ pour $a=\frac{1}{3}$, et -1 pour les zéros a_1', a_1'' de $7a^2-2a-1$.

Ces S_6^3 ne sont purs que s'ils sont réels, et l'existence dépend de la situation de ces trois valeurs de a dans le tableau formé au paragraphe 44 au sujet du S_5^2 associé; on voit aisément que $-1<a'<a_1'<\frac{1}{3}<a''<a_1''<1$, donc ce S_5^2 n'est réel que si $a=a_1''$, ω_5 étant la sphère unique imaginaire pure. D'autre part, $\sin\alpha_1$ est réel, et la réalité de (18) est assurée par celle de $\sin\beta_1\cos\gamma_2$ et $i\sin\beta_1$

[31] Un même radical a la même détermination dans les expressions de $\sin\beta_2$, $\cos\gamma_2$, $\sin\gamma_2$.

$\sin\gamma_2$, c'est-à-dire de $\sqrt{1+3a}$ et de $i\sqrt{(1+3a)(1+a-8a^2)}$, ce qui est le cas pour a_1''. En résumé (8) et (18) donnent trois S_6^3, dont un seul est pur, pour $a=a_1''=\frac{1+\sqrt{8}}{7}$ $(\varepsilon=-1)$.

51. Les S_6^4 cherchés doivent annuler $\Delta_6^4=(1-a)^3(1+3a-9a^2-19a^3)$, ce qui permet trois valeurs de a, a_1', a_1'', a_1''', vérifiant les inégalités ([32]) $-1<a_1'<a_1''<0<a_1'''<1$. Ces valeurs n'annulent aucun Δ_n d'ordre $n<6$, donc le S_5 associé est itérativement régulier. En prenant $S_6^4=(45, 56)$, ce S_5 est encore représenté par (8). U_6, qui forme un S_5 strictement isogonal avec U_1, U_2, U_3, U_4, a donc pour expression

$$(19)\quad U_6=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1[\omega_3\cos\alpha_2+\sin\alpha_2(\omega_4\cos\alpha_3+\varepsilon\omega_5\sin\alpha_3)]\},$$

avec les notations du tableau T, et où la seule indéterminée est $\varepsilon=\pm 1$. Celle-ci est fixée par la condition $U_5U_6=-a$, c'est-à-dire

$$U_5(U_4-U_6)\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2[\cos\beta_2(1-\cos\alpha_3)-\varepsilon\sin\beta_2\sin\alpha_3]=0,$$

ou enfin

$$\varepsilon\sqrt{(1+2a)(1+4a)}\sqrt{(1+a)(1+2a)(1+a-8a^2)}=-a(1+2a)(1+5a).$$

Cette relation est valable puisque $\Delta_6^4=0$; donc le coefficient de ε est réel, et la vérification en est aisée par l'élévation au carré. Pour préciser, il convient de situer a_1', a_1'', a_1''' par rapport à $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, et aux zéros a', a'' de $8a^2-a-1$; nous les situerons aussi par rapport à $-\frac{1}{3}$ pour discuter de la réalité de S_6^4 à l'aide du tableau du paragraphe 44. En posant

$$\varphi(a)\equiv 19a^3+9a^2-3a-1,$$

on a

$$\varphi(-1)<0,\quad \varphi\left(-\tfrac{1}{2}\right)>0,\quad \varphi\left(-\tfrac{1}{4}\right)>0,\quad \varphi\left(-\tfrac{1}{5}\right)<0,\quad \varphi(0)<0,\quad \varphi(1)>0,$$

et, pour a', a'',

$$\begin{aligned}\varphi(a)&=19a^3+9a^2-2a-(a+1)\\&=a(19a^2+a-2)=a[19a^2+3a-2(a+1)]=3a^2(a+1)>0.\end{aligned}$$

Sachant que $a'<-\frac{1}{4}<a''$, on a donc

$$-1<a_1'<-\tfrac{1}{2}<-\tfrac{1}{3}<a'<-\tfrac{1}{4}<a_1''<-\tfrac{1}{5}<0<a_1'''<a''<1,$$

et les deux radicaux au premier membre de la relation précédente sont positifs ;

([32]) Nous les vérifions plus loin, avec d'autres inégalités.

ε est du signe de $-a(1+2a)(1+5a)$, donc $\varepsilon=1$ pour a'_1, et -1 pour a''_1 et a'''_1.

D'autre part, le S_5 associé n'est pur, donc réel, que pour $a=a'_1$; ω_3 est le seul ω_i imaginaire pur; pour cette valeur, $\sin\alpha_1$ et $\sin\alpha_2$ sont imaginaires purs, $\sin\alpha_3$ est réel, donc U_6 est réel ainsi que le S^4_6 correspondant.

52. Le déterminant Δ^5_6 de C_5 n'est nul que pour $a=\pm\frac{1}{3}$. Avec $S^5_6=(23;45;61)$, le S_5 associé est le S^3_5 représenté par (10). Comme dans E_2, au paragraphe 39, on voit que U_6 est de la forme

$$U_6=-\omega_1\cos\alpha-\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha'_1+\sin\alpha'_1(\omega_3\cos\alpha'_2+\omega)],$$

avec $\omega^2=\sin^2\alpha'_2$ et $\omega\omega_1=\omega\omega_2=\omega\omega_3=0$. Pour $a=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha'_2=-1$, $\sin\alpha'_2=0$, donc ω est de la forme $\lambda(\omega_4\pm i\omega_5)$, tandis que $U_4U_6=a$ s'écrit

$$\begin{aligned}U_4U_6&\equiv-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha[\cos\alpha_1\cos\alpha'_1+\sin\alpha_1\sin\alpha'_1(\lambda\sin\gamma_1-\cos\gamma_1)]\\&\equiv\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1(\cos\gamma_1-\lambda\sin\gamma_1)\equiv a-\lambda\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\sin\gamma_1=a,\end{aligned}$$

donc $\lambda=0$; on a bien alors $U_5U_6=U_4U_6=a$, et

$$U_6=-\omega_1\cos\alpha-\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1-\omega_3\sin\alpha'_1),\qquad a=\frac{1}{3}. \tag{20}$$

Pour $a=-\frac{1}{3}$,

$$\omega=\sin\alpha'_2(\omega_4\cos\theta+\omega_5\sin\theta),$$

et $U_4U_6=a$ donne

$$U_4U_6\equiv-\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1(\cos\gamma_1\cos\alpha'_2+\sin\gamma_1\sin\alpha'_2\cos\theta)=\cos\alpha,$$

ou

$$\cos\theta=\frac{-a(1-3a)}{\sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}};$$

c'est le $\cos\gamma'_3$ du tableau T, donc $\sin\theta=\varepsilon\sin\gamma'_3$. $\varepsilon=\pm1$ est précisé par $U_5U_6=a$, ou encore $(U_5-U_4)U_6=0$, qui se réduit à

$$(\cos\beta_5-1)\cos\gamma'_3+\varepsilon\sin\beta_5\sin\gamma'_3=0;$$

il résulte du tableau T_2 que, pour $a=-\frac{1}{3}$,

$$\cos\beta_5=-\frac{1}{4},\qquad \sin\beta_5=\frac{\sqrt{15}}{4},\qquad \cos\gamma'_3=\sqrt{\frac{3}{8}},\qquad \sin\gamma'_3=\sqrt{\frac{5}{8}},$$

donc $\varepsilon=1$, et

$$U_6=-\omega_1\cos\alpha-\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha'_1+\sin\alpha'_1[\omega_3\cos\alpha'_2+\sin\alpha'_2(\omega_4\cos\gamma'_3+\omega_5\sin\gamma'_3)]\}. \tag{21}$$

(21) convient aux deux valeurs de a.

Pour $a=\frac{1}{3}$, quatre seulement des U_i sont linéairement distincts; le S^5_6

correspondant a été explicité, sous forme réelle, en (15′; IV), avec les deux relations (16; IV). Par contre, le S_6^5 formé avec $a=-\frac{1}{3}$ est impur, car cette valeur de a est dans la colonne $\left(a', \frac{1}{3}\right)$ du tableau du paragraphe 45.

53. Dans la classe $C_6=C_6'$, $\Delta_6^6=0$ suppose $\varphi(a)\equiv 29a^4-14a^2+1=0$, dont les quatre racines sont entre -1 et 1. Avec $S_6^6=(23;\ 45,\ 56)$, le S_5 associé est encore le S_5^3 de (10). U_6, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$(22)\quad U_6=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1+\sin\gamma_1(\omega_4\cos\beta_3+\varepsilon\omega_5\sin\beta_3)]\},$$

où $\cos\beta_3$ est déterminé par $U_4U_6=a$, ou

$$U_4(U_6-U_4)\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1(\cos\beta_3-1)=a-1,$$

donc

$$\cos\beta_3=1-\frac{(1-a)(1-2a)}{1-5a^2}=\frac{a(1-3a)}{1-5a^2}$$

est le $\cos\beta_3$ du tableau T; il reste à préciser $\varepsilon=\pm 1$ par la dernière condition $U_5U_6=-a$ ou

$$U_5(U_6-U_4)\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1[\cos\beta_5(\cos\beta_3-1)+\varepsilon\sin\beta_5\sin\beta_3]=0;$$

il vient ainsi

$$\varepsilon\sqrt{(1+a)(1-2a)(1+a-8a^2)}\sqrt{(1-2a)(1-3a)(1+a-4a^2)}=a(1-2a)(7a^2-2a-1).$$

Cette relation est possible avec $\varepsilon=\pm 1$ puisque $\Delta_6^6=0$ pour ces valeurs de a, que nous désignons par $\pm a_1'$, $\pm a_1''$ $(0<a_1'<a_1'')$. Il convient de situer celles-ci par rapport à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, aux zéros $\bar{a}'$, $\bar{a}''$ de $8a^2-a-1$, et a', a'' de $4a^2-a-1$; également par rapport aux zéros a_2', a_2'' de $7a^2-2a-1$. On voit tout de suite que $\varphi\left(\pm\frac{1}{2}\right)<0$, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)<0$. Pour $\bar{a}'$ et $\bar{a}''$, on peut écrire (dsd signifiant « du signe de »)

$$\begin{aligned}&\varphi\ \mathrm{dsd}\ 29(a+1)^2-112(a+1)+64\\&\quad=29a^2-54a-19\ \mathrm{dsd}\ 29(a+1)-432a-152=-403\left(a+\frac{123}{403}\right),\end{aligned}$$

qui montre que $\varphi(a')$ et $\varphi(\bar{a}'')$ sont négatifs. Pour a' et a'', on a de même

$$\begin{aligned}&\varphi\ \mathrm{dsd}\ 29(a+1)^2-56(a+1)+16\\&\quad=29a^2+2a-11\ \mathrm{dsd}\ 29(a+1)+8a-44=37\left(a-\frac{15}{37}\right),\end{aligned}$$

donc $\varphi(a')<0$ et $\varphi(a'')>0$, en supposant $a'<0<a''$. En observant

que $a'' > \frac{1}{2}$, nous pouvons former le tableau des signes :

a	-1	$-a_1''$	$-\frac{1}{2}$	a'	$\overline{a}'$	$-a_1'$	0	a_1'	$\frac{1}{3}$	$\overline{a}''$	$\frac{1}{2}$	a_1''	a''	1
$\varphi(a)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$1-2a$		$+$				$+$		$+$			0	$-$		
$1+a-8a^2$		$-$			0	$+$		$+$		0		$-$		
$(1-2a)(1-3a)$		$+$				$+$		$+$	0		0	$+$		
$1+a-4a^2$		$-$		0		$+$		$+$				$+$	0	

Ainsi, les deux radicaux facteurs de ε sont positifs pour $\pm a_1'$ et a_1'', mais imaginaires purs pour $a = -a_1''$. Si l'on convient alors de les prendre imaginaires purs positifs dans les expressions de $\sin\beta_3$ et $\sin\beta_5$, on est amené à prendre ε du signe de $a(1-2a)(7a^2-2a-1)$ pour $\pm a_1'$ et a_1'', et du signe contraire pour $-a_1''$. Ce signe se précise en situant a_2', a_2'' par rapport à ces zéros de φ; pour ces deux valeurs de a, φ est du signe de

$$29(2a+1)^2 - 98(2a+1) + 49$$
$$= 4(29a^2 - 20a - 5) \text{ dsd } 29(2a+1) - 140a - 35 = -82\left(a + \frac{3}{41}\right),$$

d'où l'on déduit aisément $\varphi(a_2') > 0$ et $\varphi(a_2'') < 0$ $(a_2' < a_2'')$; ainsi, a_2', qui surpasse $-\frac{1}{2}$, est entre $-a_1'$ et 0, tandis que a_2'' est entre $\frac{1}{2}$ et a_1'', et l'on peut former le tableau

a	-1	$-a_1''$	$-a_1'$	a_2'	0	a_1'	$\frac{1}{2}$	a_2''	a_1''	1
$a(1-2a)(7a^2-2a-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
ε		$+$	$-$			$-$				$-$			

Pour discuter de la pureté de ces S_6^6, il convient de placer les zéros de φ dans le tableau associé au système (10). On observe tout de suite que $\pm a_1'$ sont dans la colonne $\left(a', \frac{1}{3}\right)$ d'impureté de S_3^3, tandis que celui-ci est réel pour $\pm a_1''$; a_1'' est dans la colonne $\left(\frac{1}{2}, a''\right)$, où c'est ω_3 qui est imaginaire pure; grâce à $\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) < 0$, on voit que $-a_1''$ est dans la colonne $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ où la sphère imaginaire pure est ω_4. Enfin, la comparaison de (22) avec l'expression (10) de U_5 montre que U_6 est réel comme U_5 pourvu que $\sin\beta_3 \sin\beta_5$ le soit; c'est justement ce que la formule déterminant ε nous a montré. Les deux S_6^6 formés avec $\pm a_1''$ sont réels.

54. Dans la classe C_7, $\Delta_6^7 = 0$ pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\varphi(a) \equiv a^3 + 9a^2 - a - 1 = 0$, dont nous désignons les racines par a', a'', a''', dans l'ordre croissant habituel.

$\varphi(0)<0$, $\varphi(\pm 1)>0$ et $\varphi\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)>0$ montrent qu'on a

$$a'<-1<-\frac{1}{\sqrt{5}}<a''<0<a'''<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Le S_5 associé à $S_6^7=(23, 34, 45)$ est le S_5^4 étudié aux paragraphes 47 et 48. Il est représenté par les formules (13) pour les zéros de $\varphi(a)$ et nous le savons impur; U_6 qui fait les mêmes angles que U_5 avec U_1, U_2, U_3, est alors de la forme

$$(23)\quad U_6=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1-\sin\gamma_1(\omega_4\cos\beta_4+\varepsilon\omega_5\sin\beta_4)]\},$$

où $\cos\beta_4$ est déterminé par $U_4U_6=a$. Ceci s'écrit

$$U_4(U_6-U_5)\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1(\cos\beta_4-\cos\alpha_1')=2a$$

ou

$$\cos\beta_4=\frac{2a(1+a)(1-2a)}{(1-a)(1-5a^2)}-\frac{a}{1-a}=\frac{a(1-a)}{1-5a^2};$$

β_4 est l'angle du tableau T. $\varepsilon=\pm 1$ est ensuite précisé par $U_5U_6=a$, ou

$$U_5(U_6-U_5)\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1[\cos\alpha_1'(\cos\beta_4-\cos\alpha_1')+\sin\alpha_1'(\varepsilon\sin\beta_4-\sin\alpha_1')]=a-1,$$

donc

$$\frac{1-5a^2}{(1+a)(1-2a)}(1-\cos\alpha_1'\cos\beta_4-\varepsilon\sin\alpha_1'\sin\beta_4)=1,$$

où

$$1-\cos\alpha_1'\cos\beta_4=\frac{1-4a^2}{1-5a^2};$$

il vient ainsi

$$\varepsilon\sin\alpha_1'\sin\beta_4=\frac{1-4a^2}{1-5a^2}-\frac{(1+a)(1-2a)}{1-5a^2}=\frac{a(1-2a)}{1-5a^2},$$

et enfin, en observant que les trois zéros de φ sont plus petits que $\frac{1}{2}$,

$$(24)\qquad \varepsilon\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}=a(1-a).$$

Cette relation est possible puisque $\Delta_6^7=0$, et se vérifie aisément en élevant au carré. Les radicaux de $\sin\alpha_1'$ et $\sin\beta_4$ étant arithmétiques, ε est le signe de a, donc égal à -1 pour a' et a'', 1 pour a'''.

Pour $a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, le S_5 associé est le S_5^4 représenté en (15). U_6, qui fait les mêmes angles que U_5 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$(25)\qquad U_6=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1+\omega_3\sin\alpha_1)+\nu\frac{\omega_4-i\omega_5}{2},$$

car $U_4U_6\neq U_4U_5$ exige que $\omega_4-i\omega_5$ soit substitué à $\omega_4+i\omega_5$. $U_4U_6=a$

s'écrit d'ailleurs

$$U_4(U_6 - U_5) = \frac{\lambda\nu}{2} = 2a;$$

enfin

$$U_5(U_6 - U_5) = \frac{\mu\nu}{2} = a - 1,$$

donc $\lambda\nu = 4a$, $\mu\nu = 2(a-1)$, ce qui permet de faire $\lambda = 2$, $\nu = 2a$, $\mu = 1 - \frac{1}{a} = -\frac{4}{1+\frac{1}{a}}$. Avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, et les ω_i de $\mathfrak{S}_0$, le S_6^7 obtenu, qui est réel avec ρ, est représenté par

$$(26)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{-\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1}, \\ U_4 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} - \rho, \\ U_5 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + \dfrac{2\rho}{\sqrt{5}+1}, \\ U_6 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\overrightarrow{OP}^2}{\rho}. \end{cases}$$

C'est l'ensemble d'un pentaèdre et d'une sphère; celle-ci passe par le sommet O du trièdre que font U_1, U_2, U_3; par analogie (33), elle passe aussi par ceux des trièdres U_1, U_3, U_4 et U_1, U_4, U_5,

55. Δ_6^8 est nul pour les seules valeurs utiles $a = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}$; celles-ci n'annulent aucun Δ_n d'ordre inférieur à 6, donc le S_5 associé au S_6^8 cherché est itérativement régulier. Avec $S_6^8 = (45, 56, 64)$, ce S_5 est le S_5^2 représenté par (8). U_6, qui fait les mêmes angles que U_5 avec U_1, U_2, U_3, U_4, et doit différer de U_5, ne peut être que la sphère

$$(27)\quad U_6 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha\,\{\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4\cos\beta_2 - \omega_5\sin\beta_2)]\}.$$

Il vient alors

$$U_5(U_5 - U_6) \equiv 2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\sin^2\beta_2 \equiv \frac{2(1+a)(1+a-8a^2)}{(1-a)(1+3a)} = 1 + a$$

(33) Sur le diagramme de S_6^7, les couples U_2, U_3; U_3, U_4; U_4, U_5 jouent le même rôle. La relation linéaire entre ces U_i est $2(U_2 - U_5) + (\sqrt{5} - 1)(U_3 - U_4) = 0$, facile à vérifier.

si l'on remplace 1 par $13a^2$ dans l'avant-dernier membre; donc $U_5U_6 = -a$. $1+a-8a^2$ étant positif pour ces deux valeurs de a, celles-ci sont dans la colonne a', a'' du tableau du paragraphe 44, donc ces S_6^8 sont impurs.

56. $\Delta_6^9 = 0$ suppose $a = \pm\frac{1}{3}$ ou $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$; on peut même ne considérer que les deux valeurs positives, car $C_9 = C'_9$. Le S_5 associé à $S_6^9 = (23, 34, 45, 56)$ est le $S_5^4 = (23, 34, 45)$ représenté en (13) ou (15), comme pour S_6^7. Si $a = \pm\frac{1}{3}$, (23) subsiste, mais ε est maintenant défini par $U_5U_6 = -a$, c'est-à-dire

$$U_5(U_5 - U_6) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 (1 - \cos\alpha'_1 \cos\beta_4 - \varepsilon \sin\alpha'_1 \sin\beta_4) = 1 + a;$$

$1 - 2a$ étant positif, ceci se réduit à

$$\varepsilon\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)} = (1-a)(1+2a) - (1+a)^2 = -a(1+3a),$$

donc $\varepsilon = -1$ pour $a = \frac{1}{3}$; cette relation s'évanouit pour $a = -\frac{1}{3}$, mais $\sin\beta_4 = 0$ et ε disparaît dans (23). Ces deux S_6^9, semblables, sont impurs comme (13).

Le S_6^9 construit avec $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ est encore représenté par (15) et (25), avec la seule modification

$$U_5(U_6 - U_5) \equiv \frac{\mu\nu}{2} = -(1+a),$$

qui conduit à faire $\lambda = 2$, $\nu = 2a$, $\mu = -\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \frac{4}{1 - \frac{1}{a}}$. Pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, le pentasphère $\mathfrak{S}_0$ donne le S_6^9 représenté par le système (26) modifié en son seul élément

$$U_5 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_2 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + \frac{2\rho}{\sqrt{5}-1}. \tag{28}$$

Il consiste encore en un pentaèdre et la sphère U_6, qui passe par les sommets des trièdres que forment U_1, U_2, U_3 et U_1, U_3, U_4, réels avec ρ.

57. $\Delta_6^{10} = 0$ suppose $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, et il suffit de faire $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ puisque $C_{10} = C'_{10}$. Le S_5 associé à $S_6^{10} = (23, 34, 45, 56, 62)$ est le S_5^4 de (15). U_6, qui fait les même angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$U_6 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,[\omega_2 \cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1 (\omega_3 \cos\beta'_1 + \omega)],$$

avec $\omega\omega_1 = \omega\omega_2 = \omega\omega_3 = 0$, $\omega^2 = \sin^2\beta'_1$, et où $\cos\beta'_1$ est défini par $U_3U_6 = a$; ceci s'écrit

$$U_3(U_6 - U_3) = \sin^2\alpha \sin^2\alpha'_1 (\cos\beta'_1 - 1) = a - 1,$$

donc

$$\cos\beta'_1 = 1 - \frac{(1-a)^2}{(1+a)(1-2a)} = \frac{a(1-3a)}{(1+a)(1-2a)}$$

correspond aux conventions du tableau T. Mais alors ([34]) $\cos\beta'_1 = -1$, $\sin\beta'_1 = 0$, et $\omega^2 = 0$. En remplaçant $\sin\alpha\sin\alpha'_1\omega$ par ω, $U_4U_6 = a$ donne ensuite

$$U_5(U_6 - U_3) = 2\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1 + \lambda\frac{\omega_4 + i\omega_5}{2}\omega = 2a,$$

tandis que

$$U_3U_4 = -\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1 = -a.$$

donc $\lambda(\omega_4 + i\omega_5)\omega = 0$. $U_5(U_6 - U_3) = -2a$ donne de même $\mu(\omega_4 + i\omega_5)\omega = 0$, donc ω est de la forme $\nu(\omega_4 + i\omega_5)$, où ν est quelconque. Ceci est vrai quels que soient λ, μ puisque ω_4 et ω_5 disparaissent des formules (15) lorsque $\lambda = \mu = 0$. Le S_6^{10} formé avec $\mathfrak{S}_0$ et $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ est ainsi l'hexaèdre

$$(29)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{-\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1}, \\ U_4 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{\omega_2 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} + 1} + h, \\ U_5 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} + 1} + k, \\ U_6 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1} + l, \end{cases}$$

où $\omega_i = \overrightarrow{e_i}$. $\overrightarrow{OP}$ $(i = 1, 2, 3)$, et où h, k, l sont trois longueurs quelconques, qu'on suppose réelles pour que (29) le soit. Bien entendu, il suffit de changer $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ pour former le S_6^{10} relatif à $= \frac{-1}{\sqrt{5}}$, mais qui, rappelons-le, est directement semblable à (29).

58. Nous résumons dans le tableau suivant les résultats que nous avons obtenus, concernant, pour chaque classe de S_6 isogonal, le type du diagramme, les valeurs correspondantes de a, les numéros des formules représentatives, et la nature. Signalons que la pureté équivaut à la réalité car toutes ces valeurs de a sont inférieures ([35]) à 1.

59. $n = 7$. — Les S_7 de E_3 sont irréguliers, ainsi que leur S_6 associé. Ils appartiennent donc aux classes dont le déterminant Δ_7 s'annule pour une des valeurs a du tableau de la page suivante.

([34]) *Voir* le tableau T_3.

([35]) Les zéros non explicités des polynomes de la deuxième colonne sont désignés par a', a'', ... dans l'ordre croissant.

Système.	Valeurs de a.	Formules représentatives.	Nature.
$S_6^1 = (\ )$	$a = -\frac{1}{5}$	(4) et (16)	impur
$S_6^2 = (56)$	$1 + 2a - 11a^2 = 0$	(4) et (16)	»
$S_6^3 = (36, 45)$	$(1 - 3a)(1 + 2a - 7a^2) = 0$	(8) et (18); $\varepsilon = 1$ pour $a = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = -1$ pour $a = \frac{1 \pm \sqrt{8}}{7}$	un seul réel : pour $a = \frac{1+\sqrt{8}}{7}$
$S_6^4 = (45, 56)$	$1 + 3a - 9a^2 - 19a^3 = 0$	(8) et (19); $\varepsilon = 1$ pour a' et $\varepsilon = -1$ pour a'', a''' $(a' < a'' < a''')$	un seul réel : pour $a = a'$
$S_6^5 = (23; 45; 61)$	$a = \pm\frac{1}{3}$	(10) et (21)	un réel $\left(a = \frac{1}{3}\right)$
$S_6^6 = (23; 45, 56)$	$1 - 14a^2 + 29a^4 = 0$	(10) et (22); $\varepsilon = 1$ pour $-a''$, -1 pour $\pm a'$ et a'' $(0 < a' < a'')$	deux réels $(a = \pm a'')$
$S_6^7 = (23, 34, 45)$	$a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$	(26)	réels
	$1 + a - 9a^2 - a^3 = 0$	(13) et (23); $\varepsilon = \operatorname{sgn} a$	impurs
$S_6^8 = (45, 56, 64)$	$a = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}$	(8) et (27)	»
$S_6^9 = (23, 34, 45, 56)$	$a = \pm\frac{1}{3}$	(13) et (23); $\varepsilon = -1$	»
	$a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$	(26) corrigé par (28) pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$	réels
$S_6^{10} = (23, 34, 45, 56, 62)$	$a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$	(29) pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$	»

La première est $a=-\frac{1}{5}$, relative au seul système S_6^4. Les seules classes admissibles sont $C(\sigma_7^3)$ et $C(\sigma_7^9)$; mais les S_6 associés à $S_7^3=(47;56)$ et à $S_7^9=(54, 56, 57)$ sont respectivement $S_6^2=(56)$ et $S_6^4=(45, 56)$, qui sont régulières pour $a=-\frac{1}{5}$. Il n'existe pas de S_7^3 et de S_7^9 pour cette valeur de a.

Le seul Δ_7 divisible par $1+2a-11a^2$ est Δ_7^{17}; mais le S_6 associé à $S_7^{17}=(43, 32; 45, 47)$ est $S_6^7=(23, 34, 45)$ qui est régulier pour ces valeurs; il n'y a pas de S_7^{17}.

Les zéros de $1+2a-7a^2$ annulent les seuls déterminants $\Delta_7'^{11}$ et Δ_7^{23}. Un S_7 de C'_{11} est $(23, 34, 45; 17, 76)$ dont le S_6 associé est $S_6^7=(23, 34, 45)$ qui est alors régulier. La classe C_{23} est irrégulière pour ces deux zéros, ainsi que pour $a=\frac{1}{3}$, comme S_6^3; mais le S_6 associé à $S_7^{23}=(43, 32; 47, 76; 45)$ est $S_6^7(23, 34, 45)$ qui est régulier pour ces trois valeurs; aucune des deux classes ne donne un S_7.

Les zéros de $1+3a-9a^2-29a^3$ et de $1-14a^2+29a^4$ n'annulent aucun Δ_7. Ceux de $1+a-9a^2-a^3$, associés à S_6^7, annulent seulement $\Delta_7'^{19}$ et Δ_7^{27}. Un diagramme de la classe C'_{19} est $(74, 45, 56; 72, 23; 71)$ dont le S_6 associé est $S_6^6=(23; 45, 56)$, qui est régulier. Un S_7^{27} est $(37, 75, 54, 43; 32; 76)$, dont le S_6 associé est $S_6^7=(23, 34, 45)$, formé en (13), (23), et qui est irrégulier pour ces trois zéros,

Outre ce S_7^{27}, nous sommes amené à examiner les S_7 qui appartiennent aux classes que rendent irrégulières $a=\pm\frac{1}{3}$ et $a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Puisqu'il suffit de former les classes non primées, nous étudierons, pour $a=\pm\frac{1}{3}$, les classes [36] $C_3, C_5, C_9, C_{10}, C_{14}, C_{15}, C_{18}, C_{24}, C_{25}, C_{26}$, et, pour $a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, les classes $C_7, C_{12}, C_{20}, C_{22}, C_{26}$. Aucun S_7 n'est irrégulier pour $a=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$.

60. Le diagramme $(47; 56)$ de C_3, avec $a=\frac{1}{3}$, est écarté pour le même motif que plus haut, avec $a=-\frac{1}{5}$.

Un diagramme de C_5 est $S_7^5=(23; 45; 61)$, avec $a=\frac{1}{3}$. C'est aussi celui du S_6 associé, qui est le S_6^5 formé en (10) et (20). D'autre part, U_7 fait avec U_1, U_2, U_3, U_4 le même angle α que U_6 dans S_6^6, ce dernier système relevant lui-même de (10); U_7 est donc donné par (22), où $\cos\beta_3=0$, et l'on peut prendre [37]

$$U_7=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1(\omega_3\cos\gamma_1+\omega_5\sin\gamma_1)]. \tag{30}$$

---

[36] C_{23} vient d'être totalement écartée.

[37] On peut remplacer le terme $\varepsilon\omega_5\sin\beta_3$ de (22) par ω_5, qui n'apparaît que dans l'expression de U_7.

Dans ces conditions,

$$U_7 - U_4 = \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 (\omega_5 - \omega_4),$$

donc, compte tenu de $\cos\beta_5 = -1$, $\sin\beta_5 = 0$,

$$U_5 (U_7 - U_4) = \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 = \frac{2}{3} = 2a,$$

et $U_6 (U_7 - U_4) = 0$. On a bien $U_5 U_7 = U_6 U_7 = a$, ce qui démontre l'existence d'un S_7^5. Le S_6 associé est représenté en (15′; IV), et ces équations, complétées, nous donnent le S_7^5 cherché sous la forme explicite

$$(31) \quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, & U_5 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\omega_3 - 2\omega_4}{\sqrt{6}}, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + 2\sqrt{2}\,\omega_2}{3}, & U_6 = \dfrac{-\omega_1 + \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \dfrac{2\omega_3}{\sqrt{6}}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \dfrac{2\omega_3}{\sqrt{6}}, & U_7 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\omega_3 + 2\omega_5}{\sqrt{6}}. \\ U_4 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\omega_3 + 2\omega_4}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

Contrairement à S_6^5, il est impur, puisque les coefficients des cinq ω_i sont réels. Rappelons que les U_i sont liées par les relations (16; IV).

Il n'y a pas de S_7^9, car le diagramme (71, 72, 73) de C_9, où $a = \frac{1}{3}$, a, pour S_6 associé, le système régulier S_6^1. Pour un motif analogue, il n'y a pas de S_7^{10}, car le S_8 associé à (45, 56; 23; 71) est le $S_6^6 = (23; 45, 56)$, régulier pour $a = \frac{1}{3}$. Un S_7^{14} est (45, 56, 67, 71), avec $a = \frac{1}{3}$; mais son S_6 associé est le $S_6^4 = (45, 56)$, régulier. Ce S_6^4 est également associé à $S_7^{15} = (45, 56, 67, 74)$ et est encore régulier pour $a = -\frac{1}{3}$. Les deux classes suivantes C_{18} et C_{24} sont également stériles, car les S_6 associés à $S_7^{18} = (45, 56, 67, 71; 23)$, où $a = \frac{1}{3}$, et à $S_7^{24} = (74, 45, 56, 67; 71)$, où $a = \pm\frac{1}{3}$, sont respectivement S_6^6 et S_6^4 qui sont réguliers pour ces valeurs de a.

Un diagramme de C_{25} est l'hexagone (23, 34, 45, 56, 67, 72), avec $a = \pm\frac{1}{3}$. Le S_6 associé est le S_6^9 représenté en (13) et (23), avec $\varepsilon = -1$. U_7 fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2; elle est donc de la forme

$$U_7 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1 [\omega_3 \cos\beta'_1 + \sin\beta'_1 (\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)] \},$$

où $\cos\beta'_1$ est déterminé par $U_3 U_7 = a$, soit

$$U_3 (U_3 - U_7) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha'_1 (1 - \cos\beta'_1) \equiv \frac{(1+a)(1-2a)}{1-a} (1 - \cos\beta'_1) = 1 - a;$$

$$\cos\beta'_1 = \frac{a(1-3a)}{(1+a)(1-2a)}$$

est le $\cos\beta'_1$ du tableau T. $U_4 U_7 = a$ s'écrit de même

$$U_4(U_7 - U_3) \equiv \sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 [\cos\gamma_1(1 - \cos\beta'_1) - \sin\gamma_1 \sin\beta'_1 \cos\theta]$$
$$\equiv \frac{a(1-a)^2 - (1-a)(1-5a^2)\cos\theta}{(1+a)(1-2a)} = 2a,$$

d'où résulte

$$\cos\theta = -\frac{a}{1-a} = \cos\alpha'_1.$$

$U_5 U_7 = a$, ou $U_5(U_3 - U_7) = 0$, permet de préciser $\sin\theta = \varepsilon' \sin\alpha'_1$ par

$$\cos\gamma_1(1 - \cos\beta'_1) + \sin\gamma_1 \sin\beta'_1(\cos^2\alpha'_1 + \varepsilon' \sin^2\alpha'_1) = 0,$$

ou

$$a(1-a) + (1-5a^2)\left[1 - (1-\varepsilon')\frac{1-2a}{(1-a)^2}\right] = 0;$$

compte tenu de $1 + a - 6a^2 \equiv (1-2a)(1+3a)$, ceci se réduit à

$$1 - \varepsilon' = \frac{(1+3a)(1-a)^2}{1-5a^2},$$

donc $\varepsilon' = \mp 1$ pour $a = \pm\frac{1}{3}$ respectivement. U_7 est ainsi donné par

(32) $$U_7 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{\omega_2 \cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1 [\omega_3 \cos\beta'_1 + \sin\beta'_1 (\omega_4 \cos\alpha'_1 - \omega_5 (\operatorname{sgn} a) \sin\alpha'_1)]\},$$

et complète le S_7^{25}, car nous vérifierons tout de suite, sur les formules numériques, que $U_6 U_7 = -a$. A l'aide de T_2, celles-ci sont, pour $a = \frac{1}{3}$,

(33)
$$\begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + 2\sqrt{2}\,\omega_2}{3}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \dfrac{2\omega_3}{\sqrt{6}}, \\ U_4 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} - \dfrac{\omega_3 + 2\omega_4}{\sqrt{6}}, \\ U_5 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\omega_3 + \omega_4 - \sqrt{3}\,\omega_5}{\sqrt{6}}, \\ U_6 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\omega_3 - \omega_4 + \sqrt{3}\,\omega_5}{\sqrt{6}}, \\ U_7 = \dfrac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} - \dfrac{\omega_4 + \sqrt{3}\,\omega_5}{\sqrt{6}}; \end{cases}$$

les U_i sont liées par les deux relations

(34)
$$\begin{cases} U_2 + U_3 - U_5 - U_6 = 0, \\ U_2 - U_4 - U_5 + U_7 = 0. \end{cases}$$

Pour $a = -\frac{1}{3}$, ce S_7^{27} est représenté par les formules

$$(33')\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{-\omega_1 + 2\sqrt{2}\,\omega_2}{3}, \\ U_3 = -\dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{5\omega_3}{\sqrt{30}}, \\ U_4 = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \dfrac{2\omega_3 - 4\omega_4}{\sqrt{30}}, \\ U_5 = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{2}\,\omega_2}{3} - \dfrac{2\omega_3 + \omega_4}{\sqrt{30}} - \dfrac{\omega_5}{\sqrt{2}}, \\ U_6 = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{2}\,\omega_2}{3} - \dfrac{2\omega_3 - 4\omega_4}{\sqrt{30}}, \\ U_7 = -\dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} - \dfrac{3\omega_3 - \omega_4}{\sqrt{30}} + \dfrac{\omega_5}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

et ses sphères sont liées par

$$(34')\quad \begin{cases} U_1 + U_2 + U_4 + U_6 = 0, \\ U_1 + U_3 + U_5 + U_7 = 0. \end{cases}$$

Ces deux systèmes sont impurs.

La classe C_{26}, où $a = \frac{1}{3}$, ne fournit aucun S_7, car le S_6 associé à $S_7^{26} = (72, 23, 34, 45, 57; 76)$ est le $S_6^7 = (23, 34, 45)$, qui est régulier pour cette valeur de a.

61. Examinons maintenant les cinq classes qui sont irrégulières pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Les deux premières, C_7 et C_{12} ne donnent aucun système, car les S_6 associés à $S_7^7 = (47, 75, 56)$ et $S_7^{12} = (37, 74; 45, 56)$ sont respectivement $S_6^2 = (56)$ et $S_6^4 = (45, 56)$, réguliers pour ces valeurs de a.

Le pentagone $S_7^{20} = (23, 34, 45, 57, 72)$ est associé à $S_6^7 = (23, 34, 45)$, que nous avons construit au paragraphe 54, et représenté en (26) pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Il s'agit de compléter ce système avec une septième sphère U_7. Celle-ci, qui fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$U_7 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2}{\sqrt{5}-1} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}\,(\omega_3\cos\theta + \omega),$$

où ω est une sphère orthogonale à ω_1, ω_2, ω_3, et telle que $\omega^2 = \sin^2\theta$. $\cos\theta$ est défini par $U_3 U_7 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ou

$$U_3(U_3 - U_7) \equiv \frac{4}{5}\,\frac{5-2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1)^2}\,(1-\cos\theta) \equiv \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\,(1-\cos\theta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}};$$

donc $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = 0$; ω est donc de la forme $h(\omega_4 + \varepsilon i\omega_5)$, et l'on peut poser

$$(35) \qquad U_7 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1} + h(\omega_4 + \varepsilon i\omega_5).$$

$h \neq 0$ car $U_5U_7 \neq U_6U_7$. A l'aide des expressions (15) du S_5 associé, on forme ensuite

$$U_4(U_3 - U_7) \equiv -\frac{2}{\sqrt{5}} - \lambda h \frac{1-\varepsilon}{2} = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

où $\lambda = 2$, donc $\varepsilon = 1$. On vérifie tout de suite que $U_5(U_3 - U_7) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, donc $U_5U_7 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; enfin, grâce à l'expression (25) de U_6, où $\nu = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$U_6(U_3 - U_7) \equiv \frac{2}{\sqrt{5}} - \nu h \equiv \frac{2}{\sqrt{5}}(1-h) = 0$$

donne $h = 1$. Nous formons ainsi un S_7^{20} réel, représenté par (26) et le plan

$$(36) \qquad U_7 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1} + \omega_4 + i\omega_5 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1} - \rho.$$

On forme aisément la relation linéaire qui lie U_7 à U_2, U_3, U_4. Par raison de symétrie, on a la même relation entre U_7, U_5, U_4, U_3. Ce sont ([38])

$$(37) \qquad \begin{cases} U_2 - U_3 - \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(U_4 - U_7) = 0, \\ U_3 - U_4 - \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(U_3 - U_7) = 0. \end{cases}$$

Le S_7^{20} associé à $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ s'en déduit en changeant $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ dans les expressions (26) et dans (37).

C_{22} ne donne aucun système car le S_6 associé à $S_7^{22} = (45, 56, 67; 72, 73)$ est $S_6^5 = (45, 56)$, régulier pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Enfin un diagramme de la classe C_{26} est $S_7^{26} = (72, 23, 34, 45, 57; 76)$, dont le S_6 associé est le $S_6^7 = (23, 34, 45)$ utilisé pour former S_7^{20}. La seule modification concerne le signe de U_6U_7, donc (35) subsiste, sans la réserve $h \neq 0$. $U_4(U_3 - U_7) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ donne $h(1-\varepsilon) = 0$, et cela suffit

([38]) Il en résulte la relation $U_2 - U_3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(U_3 - U_4) = 0$ déjà observée entre les sphères (26).

pour que $U_5(U_3 - U_7) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, donc $U_5 U_7 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; enfin

$$(U_5 - U_6)U_7 \equiv \mu h \frac{1-\varepsilon}{2} + \nu h \frac{1+\varepsilon}{2} = -\nu h \frac{1+\varepsilon}{2} = 0$$

donne $h(1+\varepsilon) = 0$, donc $h = 0$, et (35) se réduit à

$$U_7 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1}. \tag{38}$$

Le S_7^{26} représenté par (26) et (38) est réel, et constitué par six plans et une sphère; les quatre plans U_1, U_2, U_3, U_7 forment un angle tétraèdre, coupé par les deux plans U_4, U_5; et la sphère U_6 passe par le sommet. U_7 est une combinaison linéaire de U_1, U_2, U_3 qu'on forme aisément; la même relation existe entre U_7, U_1, U_5, U_4 par raison de symétrie; ce sont

$$\begin{cases} U_1 - U_2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(U_3 + U_7) = 0, \\ U_1 - U_3 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(U_4 + U_7) = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Il suffit de remplacer $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans toutes ces formules pour le S_7^{26} relatif à $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

62. Il ne nous reste plus qu'à construire le prolongement $S_7^{27} = (37, 75, 54, 43; 32; 76)$ du $S_6^7 = (23, 34, 45)$, formé en (13), (23) avec l'un quelconque des zéros de $\varphi(a) = 1 + a - 9a^2 - a^3$, et $\varepsilon = \operatorname{sgn} a$. U_7 fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3; il est donc de la forme

$$U_7 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{\omega_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\gamma_1 + \sin\gamma_1 (\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)]\},$$

et $U_7 - U_4$ se réduit à

$$U_7 - U_4 = \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 [\omega_4 (1 - \cos\theta) - \omega_5 \sin\theta].$$

$\cos\theta$ est déterminé par $U_4 U_7 = a$, soit

$$U_4(U_4 - U_7) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 (1 - \cos\theta) \equiv \frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)}(1 - \cos\theta) = 1 - a.$$

Par conséquent

$$\cos\theta = \frac{a(1-3a)}{1-5a^2} = \cos\beta_3,$$

avec les notations du tableau T. Posons $\sin\theta = -\varepsilon' \sin\beta_3$, ε' étant défini par

$$U_5(U_4 - U_7) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 [\cos\alpha'_1 (1 - \cos\beta_3) + \varepsilon' \sin\alpha'_1 \sin\beta_3] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon' \sqrt{1-2a}\,\sqrt{(1-2a)(1+a)(1+a-8a^2)} = a(1+a)(1-2a),$$

ou enfin, car $1-2a>0$ comme nous l'avons vu au paragraphe 54,

$$\varepsilon'\sqrt{(1+a)(1+a-8a^2)}=a(1+a). \tag{40}$$

On vérifie tout de suite que $\varepsilon'=\pm 1$ est compatible avec $\varphi(a)=0$, comme il se doit d'après $\Delta_7^{27}=0$, et, le radical étant arithmétique, $\varepsilon'=\operatorname{sgn}[a(1+a)]$. Avec les notations du paragraphe 54, $\varepsilon'=-1$ pour a'' et $\varepsilon'=1$ pour a' et a'''.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $U_6U_7=-a$, ou

$$U_6(U_4-U_7)\equiv \sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1[\cos\beta_4(1-\cos\beta_3)+\varepsilon\varepsilon'\sin\beta_4\sin\beta_3]=2a.$$

Les calculs qui précèdent permettent d'écrire le second membre

$$(1-a)\left[\cos\beta_4+\varepsilon\sin\beta_4\,\frac{\varepsilon'\sin\beta_3}{1-\cos\beta_3}\right]\equiv(1-a)(\cos\beta_4-\varepsilon\operatorname{cotg}\alpha'_1\sin\beta_4)$$
$$\equiv\frac{a(1-a)}{1-5a^2}\left(1-a+\varepsilon\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}\right)=\frac{a(1-a)^2(1+a)}{1-5a^2}$$

en utilisant (24); ceci vaut justement $2a$ lorsque $\varphi(a)=0$.

Nous avons ainsi construit un S_7^{27}, pour chaque zéro de $\varphi(a)$, représenté par les formules (13), (23) où $\varepsilon=\operatorname{sgn}a$, et

$$U_7=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1+\sin\gamma_1(\omega_4\cos\beta_3-\varepsilon'\omega_5\sin\beta_3)]\}, \tag{41}$$

avec $\varepsilon'=\operatorname{sgn}[a(1+a)]$.

Les relations linéaires qui permettent d'exprimer U_6 et U_7 en fonction des sphères de (13) ne sont pas simples. Rappelons que (13) est impur; il en est donc de même pour ces S_7^{27}.

63. Le tableau suivant résume les renseignements essentiels obtenus sur les cinq types d'heptasphères existants :

Système.	Valeurs de a.	Formules représentatives.	Nature.
$S_7^5=(23;45;61)$	$a=\frac{1}{3}$	(31)	impur
$S_7^{20}=(23,34,45,57,72)$	$a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$	(26) et (36) pour $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$	réels
$S_7^{25}=(23,34,45,56,67,72)$	$a=\pm\frac{1}{3}$	(33); (33′)	impurs
$S_7^{26}=(23,34,45,57,72;76)$	$a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$	(26) et (38) pour $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$	réels
$S_7^{27}=(34,45,57,73;32;76)$	$1+a-9a^2-a^3=0$	(13), (23), (41); $\varepsilon=\operatorname{sgn}a$; $\varepsilon'=\operatorname{sgn}[a(1+a)]$	impurs

64. $n=8$. — Les S_8 que nous recherchons sont associés aux S_7 du tableau précédent. Il s'agit donc d'ajouter à chacun d'eux une sphère U_8 pour laquelle les produits U_iU_8 ($1\leq i\leq 7$) valent $\pm a$. Nous pouvons choisir U_8 de manière que $U_1U_8=a$, et nous poserons $U_iU_8=\varepsilon_i a$ ($1\leq i\leq 7$; $\varepsilon_1=1$).

Cherchons d'abord à prolonger le système (31) qui représente S_7^5, avec $a=\frac{1}{3}$. Observons que les 6 sommets des trois segments du diagramme de S_7^5 jouent le même rôle et que les sept sphères sont liées par les relations (16; IV); il en résulte les relations

$$\begin{cases} \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4-\varepsilon_5=0, \\ 1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_6=0, \end{cases} \tag{42}$$

entre les ε_i.

Si $\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$, (42) entraîne $\varepsilon_4=\varepsilon_5=\varepsilon_6=1$; U_8 fait les mêmes angles que U_7 avec les six premières sphères U_i, et ne peut différer de U_7 qu'avec l'expression

$$U_8=\frac{\omega_1}{3}+\frac{\omega_2}{3\sqrt{2}}+\frac{\omega_3-2\omega_5}{\sqrt{6}}. \tag{43}$$

Il vient alors $U_7U_8=-\frac{1}{3}$, et $\varepsilon_7=-1$. Il existe donc un S_8, formé avec $a=\frac{1}{3}$, dont le graphique (23; 45; 61; 78) consiste en quatre segments isolés. U_8 est liée aux sphères (31) par

$$U_2+U_3-U_7-U_8=0. \tag{43'}$$

Si ε_2 ou ε_3 est égal à -1, nous pouvons admettre, par symétrie, qu'il s'agit de ε_2; (42) entraîne alors $\varepsilon_3=1$, $\varepsilon_6=-1$, $\varepsilon_5=-\varepsilon_4$. U_8, qui fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$U_8=\frac{\omega_1-\sqrt{2}\,\omega_2}{3}+\frac{2}{\sqrt{6}}\left|\omega_3\cos\theta+\sin\theta(\omega_4\cos\theta_1+\omega_5\sin\theta_1)\right|, \tag{44}$$

avec

$$U_3U_8=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta=\frac{1}{3},$$

donc $\cos\theta=0$, $\sin\theta=1$. Il suffit de former U_4U_8 et U_7U_8; mais

$$U_4U_8=\frac{2}{3}\cos\theta_1=\frac{\varepsilon_4}{3}$$

et

$$U_7U_8=\frac{2}{3}\sin\theta_1=\frac{\varepsilon_7}{3}$$

sont incompatibles. Il n'y a pas d'autre solution que (43).

65. Recherchons maintenant les S_8 associés à S_7^{25}, car il est normal de rapprocher S_7^{20} et S_7^{26} qui sont associés au même S_6.

Les six sommets de l'hexagone (23, 34, 45, 56, 67, 72) représentant $S_7^{2,7}$ jouent le même rôle. Considérons d'abord le système (33), avec $a=\frac{1}{3}$. Les relations (34) fournissent les égalités

$$(45)\qquad \begin{cases} \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5-\varepsilon_6=0, \\ \varepsilon_2-\varepsilon_4-\varepsilon_5+\varepsilon_7=0. \end{cases}$$

Si tous les ε_i valent 1, U_8 fait les mêmes angles que U_6 avec U_1, U_2, U_3, U_4, et ne peut être que

$$U_8=\frac{\omega_1}{3}+\frac{\omega_2}{3\sqrt{2}}+\frac{\omega_3-\omega_4-\sqrt{3}\,\omega_5}{\sqrt{6}}=U_6-\sqrt{2}\,\omega_5,$$

afin de différer de U_6. Mais alors $U_5U_8=U_5U_6+1=\frac{2}{3}$ est inadmissible.

Dans le cas contraire, nous pouvons faire $\varepsilon_2=-1$; et, s'il n'existe pas deux ε_i consécutifs négatifs, on peut même prendre $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=\varepsilon_7=1$, sans restreindre la généralité; (45) donne alors $\varepsilon_4=-\varepsilon_5=\varepsilon_6$. U_8, qui fait les mêmes angles que U_7 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$U_8=\frac{\omega_1-\sqrt{2}\,\omega_2}{3}+\frac{2}{\sqrt{6}}(\omega_4\cos\theta+\omega_5\sin\theta);$$

$$U_7U_8=\frac{1}{3}-\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}=\frac{1}{3}$$

donne donc $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0$. Il suffit alors de former U_4U_8, c'est-à-dire

$$U_4U_8=-\frac{2}{3}\cos\theta=\frac{\varepsilon_4}{3},$$

donc $\cos\theta=-\frac{\varepsilon_4}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{3}}$, qui sont incompatibles.

Enfin, s'il existe deux ε_i consécutifs négatifs, nous pouvons supposer $\varepsilon_2=\varepsilon_3=-1$. (45) donne alors $\varepsilon_5=\varepsilon_6=-1$, $\varepsilon_7=\varepsilon_4$. U_8 est encore de la forme (44), avec $U_3U_8=-\frac{1}{3}$, donc $\cos\theta=-1$, $\sin\theta=0$, ce qui signifie que $\frac{2\sin\theta}{\sqrt{6}}(\omega_4\cos\theta_1+\omega_5\sin\theta_1)$ est une sphère point $h(\omega_4+\varepsilon i\omega_5)$, avec $\varepsilon=\pm 1$. Il suffit d'exprimer que

$$U_3U_8=-\frac{1}{3}+h\frac{1-\varepsilon i\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{3},$$

qui donne $h=0$, donc la solution

$$(46)\qquad U_8=\frac{\omega_1-\sqrt{2}\,\omega_2}{3}-\frac{2\omega_3}{\sqrt{6}}$$

qui forme, avec (33), un S_8 de E_3. On voit tout de suite que $\varepsilon_4=1$, donc ce $S_8=(23, 34, 45, 56, 67, 72; 82, 83, 85, 86)$ est représentable par un hexa-

gone convexe, deux de ses diagonales et leur point de rencontre, plus un point isolé. U_8 est liée à (33) par la relation

$$U_1 - U_2 - U_3 - U_8 = 0. \tag{46'}$$

66. Le prolongement de (33') s'étudie comme celui de (33), avec $a = -\frac{1}{3}$, et les relations (34'). Nous avons donc ici

$$\begin{cases} 1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 = 0, \\ 1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_7 = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Si $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, il vient $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = -1$, donc il existe nécessairement deux ε_i consécutifs négatifs, et, par raison de symétrie, nous pouvons supposer qu'il s'agit de $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$; (47) donne alors $\varepsilon_6 = -\varepsilon_4$, $\varepsilon_7 = -\varepsilon_5$. U_8, qui fait les mêmes angles que U_3 avec U_4 et U_2, est de la forme

$$U_8 = -\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{30}}[\omega_3 \cos\theta + \sin\theta\,(\omega_4 \cos\theta_1 + \omega_5 \sin\theta_1)],$$

avec

$$U_3 U_8 \equiv \frac{1}{6} + \frac{5\cos\theta}{6} = \frac{1}{3},$$

donc $\cos\theta = \frac{1}{5}$, $\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Il faut ensuite, et cela suffit, que $U_4 U_8 = -\frac{\varepsilon_4}{3}$ et $U_5 U_8 = -\frac{\varepsilon_5}{3}$, où $\varepsilon_4^2 = \varepsilon_5^2 = 1$. La première condition donne

$$U_4 U_8 \equiv \frac{\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta_1}{3} \equiv \frac{1 - 4\sqrt{6}\cos\theta_1}{15} = -\frac{\varepsilon_4}{3},$$

donc $\cos\theta_1 = \frac{1 + 5\varepsilon_4}{4\sqrt{6}}$. La deuxième donne

$$U_5 U_8 \equiv -\frac{2\cos\theta + \sin\theta\cos\theta_1}{6} - \frac{5}{\sqrt{60}}\sin\theta\sin\theta_1 \equiv -\frac{1 + \varepsilon_4}{12} - \frac{2\sin\theta_1}{\sqrt{10}} = -\frac{\varepsilon_5}{3},$$

donc

$$\sin\theta_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{1 + \varepsilon_4 - 4\varepsilon_5}{12}.$$

L'ultime condition $\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 = 1$ s'écrit enfin

$$\frac{13 + 5\varepsilon_4}{4 \times 12} + \frac{5(9 + \varepsilon_4 - 4\varepsilon_5 - 4\varepsilon_4\varepsilon_5)}{12^2} = \frac{21 + 5(\varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_4\varepsilon_5)}{6^2} = 1,$$

soit

$$(1 + \varepsilon_4)(1 - \varepsilon_5) = 4.$$

L'unique solution est $\varepsilon_4 = 1$, $\varepsilon_5 = -1$. Il vient alors $\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{10}}{4}$, et

$$U_8 = -\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \frac{\omega_3 + 3\omega_4}{\sqrt{30}} - \frac{\omega_5}{\sqrt{2}}. \tag{48}$$

Cette sphère est liée à (33′) par la relation

$$U_3 - U_4 + U_5 - U_8 = 0, \tag{48'}$$

et forme, avec ce système, un S_8 ayant le même diagramme que celui formé par (33), (46).

67. La recherche d'un S_8 associé à S_7^{20} consiste, pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, à prolonger par une sphère U_8 le système des sphères représentées en (26), (36). Nous supposons toujours $\varepsilon_1 = 1$, et les relations (37) exigent, entre les ε_i, les égalités

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(\varepsilon_4 - \varepsilon_7) = 0, \\ \varepsilon_5 - \varepsilon_4 - \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_7) = 0, \end{cases} \tag{49}$$

donc, pour des raisons de rationalité, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_7$. Cette valeur commune ne peut être que -1, sans quoi U_8 ferait les mêmes angles que U_6 avec les sphères de (15), ce qui caractérise U_6, comme l'a montré la discussion du paragraphe 54. Dans ces conditions, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$ montre que U_8 fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2; elle est donc de la forme

$$U_8 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2\omega_2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} + \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\left[\omega_3\cos\theta + \sin\theta(\omega_4\cos\theta_1 + \omega_5\sin\theta_1)\right].$$

$\cos\theta$ est défini par $\varepsilon_3 = -1$, soit

$$U_3 U_8 \equiv \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} + \frac{4(\sqrt{5}-2)\cos\theta}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

qui donne $\cos\theta = -(\sqrt{5}+2)$; $\sin\theta$ vaut alors $2i\sqrt{\sqrt{5}+2}$. Grâce à (15), où $\lambda = 2$, il vient ensuite

$$U_4 U_8 \equiv \frac{-\cos\theta}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\sin\theta\, e^{i\theta_1} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} + \frac{4i\sqrt[4]{5}\,e^{i\theta_1}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

donc

$$e^{i\theta_1} = \frac{i(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt[4]{5}}.$$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$ étant réalisés, (49) entraîne $\varepsilon_5 = \varepsilon_7 = -1$, et il ne reste plus qu'à former $U_6 U_8 = \frac{\varepsilon_6}{\sqrt{5}}$, ou, plus simplement,

$$(U_6 - U_5)U_8 \equiv \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\sin\theta\,\frac{\nu e^{-i\theta_1} - \mu e^{i\theta_1}}{2} = \frac{4i\sqrt[4]{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\left(\frac{e^{-i\theta_1}}{\sqrt{5}} + \frac{2e^{i\theta_1}}{\sqrt{5}+1}\right)$$
$$= \frac{4}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} - 1,$$

donc $U_6U_8 = -1$, qui est inacceptable. Aucun S_8 n'est associé à S_7^{20}.

68. Le S_6 associé à $S_7^{26} = (23, 34, 45, 57, 72; 76)$ est toujours (26), pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Les relations linéaires (39) nous apprennent que les ε_i doivent satisfaire aux égalités

$$(50) \qquad \begin{cases} 1 - \varepsilon_2 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\varepsilon_3 + \varepsilon_7) = 0, \\ 1 - \varepsilon_5 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\varepsilon_4 + \varepsilon_7) = 0, \end{cases}$$

ce qui exige $\varepsilon_2 = \varepsilon_5 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -\varepsilon_7$. $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ entraînerait encore $U_8 = U_6$; il reste donc la solution $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$, $\varepsilon_7 = 1$. U_8, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$U_8 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + h(\omega_4 + \varepsilon i\omega_5) = U_4 - (\omega_4 + i\omega_5) + h(\omega_4 + \varepsilon i\omega_5),$$

avec $\varepsilon = \pm 1$. Il vient alors

$$U_4U_8 \equiv 1 + h(1 - \varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

qui n'est possible qu'avec $\varepsilon = -1$, $h = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$. $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$ étant réalisés, les égalités (50) entraînent $\varepsilon_5 = \varepsilon_7 = 1$, et il suffit de satisfaire la condition $U_6U_8 = \frac{\varepsilon_6}{\sqrt{5}}$; or

$$U_6U_8 \equiv U_4U_6 - \nu = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

donc $\varepsilon_6 = -1$. On peut ainsi prolonger S_7^{26} avec la sphère

$$(51) \qquad \begin{aligned} U_8 &= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} - \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\omega_4 - i\omega_5}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} - \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\frac{\overrightarrow{OP^2}}{\rho} \end{aligned}$$

en un S_8 dont le diagramme est (23, 34, 45, 57, 72; 76, 68; 83, 84). U_8 est liée aux sphères (26) par la relation

$$(51') \qquad U_2 - U_6 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(U_3 - U_8) = 0.$$

On obtient naturellement un autre $S_8\left(a = -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans toutes les formules. Ces deux S_8 sont réels.

69. Il ne reste plus qu'à rechercher les S_8 associés à S_7^{27}. Nous ne connaissons pas les relations qui lient les sphères du S_7, et qui ont été précieuses jusqu'ici. Par contre, la remarque que, dans le diagramme (34, 45, 57, 73; 23, 67) de S_7^{27}, les deux trios 2, 3, 4 et 6, 7, 5 sont permutables permet de réduire la discussion aux deux cas

$$\alpha : \quad \varepsilon_2 = 1,$$
$$\beta : \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_6 = -1.$$

Chacun d'eux sera lui-même subdivisé en deux, suivant que $\varepsilon_3 = 1$ ou -1.

Rappelons que S_7^{27} est représenté par (13), (23), (41), avec les formules auxiliaires (24), (40), et que $\varphi(a) \equiv 1 + a - 9a^2 - a^3 = 0$. ε_1 vaut toujours 1.

α_1. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. — Si $\varepsilon_4 = 1$, U_8 fait les mêmes angles que U_6 avec U_1, U_2, U_3, U_4, donc, pour différer de U_6, son expression se déduit de (23) en changeant ε en $-\varepsilon$. Autrement dit,

$$U_8 - U_6 = 2 \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \varepsilon \sin\beta_4 \omega_5;$$

compte tenu de (24), $U_5 U_8 = \varepsilon_5 a$ s'écrit alors

$$(52) \qquad U_5(U_6 - U_8) \equiv 2 \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 \sin\alpha_1' \varepsilon \sin\beta_4 \equiv \frac{2a(1-a)}{1+a} = (1 - \varepsilon_5)\, a,$$

qui est incompatible avec $\varphi(a) = 0$.

Si $\varepsilon_4 = -1$, U_8 fait les mêmes angles que U_5 avec U_1, U_2, U_3, U_4, et se déduit donc de l'expression (13) de U_5 en changeant α_1' en $-\alpha_1'$; autrement dit

$$U_8 - U_5 = 2 \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \sin\alpha_1' \omega_5.$$

La condition

$$U_6(U_5 - U_8) = (1 - \varepsilon_6)\, a$$

redonne l'équation (52), au changement près de ε_5 en ε_6. Aucun S_8 ne correspond à ce cas.

α_2. $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = -1$. — Si $\varepsilon_4 = 1$, U_8 fait les mêmes angles que U_7 avec U_1, U_2, U_3, U_4; pour qu'elle diffère de U_7, son expression est (41) où l'on change ε' en $-\varepsilon'$; on a donc

$$U_8 = U_7 - 2 \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \varepsilon' \sin\beta_3 \omega_5,$$

qui donne la condition

$$U_7 U_8 \equiv 1 - 2 \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 \sin^2\beta_3 \equiv 1 - 2\,\frac{(1-a)(1+a-8a^2)}{1-5a^2}$$
$$\equiv -\,\frac{1 - 13a^2 + 16a^3}{1 - 5a^2} = \varepsilon_7 a,$$

soit encore

$$1 + \varepsilon_7 a - 13a^2 + (16 - 5\varepsilon_7)\, a^3 = 0,$$

qui est incompatible avec $\varphi(a) = 0$, $\varepsilon_7 = \pm 1$.

Si $\varepsilon_4 = -1$, U_8, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$U_8 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\gamma_1 + \sin\gamma_1 (\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)] \},$$

soit encore

$$U_8 = U_4 + \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 [\omega_4 (1 - \cos\theta) - \omega_5 \sin\theta],$$

avec la condition $U_4 U_8 = -a$; celle-ci s'écrit

$$U_4 (U_4 - U_8) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 (1 - \cos\theta) \equiv \frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)} (1 - \cos\theta) = 1 + a,$$

donc

$$\cos\theta = 1 - \frac{(1+a)^2 (1-2a)}{(1-a)(1-5a^2)} = \frac{-a(1+2a-7a^2)}{(1-a)(1-5a^2)} = \cos\beta_5;$$

on prend $\sin\theta = \varepsilon'' \sin\beta_5$, $\varepsilon'' = \pm 1$. En se rappelant $1 - 2a > 0$, on a ensuite

$$\begin{aligned} U_5 (U_8 - U_4) &\equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 [\cos\alpha'_1 (\cos\theta - 1) + \sin\alpha'_1 \sin\theta] \\ &\equiv \frac{a(1+a)}{1-a} + \frac{\varepsilon'' \sqrt{(1-3a)(1+a-4a^2)}}{1-a} = (1 + \varepsilon_5) a, \end{aligned}$$

ou

$$\varepsilon'' \sqrt{(1-3a)(1+a-4a^2)} = \varepsilon_5 a [1 - (1 + 2\varepsilon_5) a].$$

La quantité sous le radical devient successivement, à l'aide de $\varphi(a) = 0$,

$$1 - 2a - 7a^2 + 12a^3 = -a(3 - 2a - 13a^2) = a^2 (5 - 14a - 3a^2).$$

L'élévation au carré de l'équation en ε'' donne donc

$$5 - 14a - 3a^2 = 1 - 2(1 + 2\varepsilon_5) a + (5 + 4\varepsilon_5) a^2,$$

ou

$$1 - (3 - \varepsilon_5) a - (2 + \varepsilon_5) a^2 = 0.$$

C'est incompatible avec $\varphi(a) = 0$, $\varepsilon_5 = \pm 1$, et l'hypothèse α_2 ne donne aucun S_8.

70. $\beta_1 . \varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_6 = -1$. — On déduit aisément de $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ que U_8 doit être de la forme

$$U_8 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1 [\omega_3 \cos\beta'_1 + \sin\beta'_1 (\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)] \}.$$

$\cos\theta$ est déterminé par $U_4 U_8 = \varepsilon_4 a$; en se rappelant

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos\alpha_1 \cos\alpha'_1 = 0,$$

cela s'écrit

$$\begin{aligned} U_4 U_8 &\equiv -\sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 (\cos\gamma_1 \cos\beta'_1 + \sin\gamma_1 \sin\beta'_1 \cos\theta) \\ &\equiv -\frac{a^2 (1-3a) + (1-a)(1-5a^2)\cos\theta}{(1+a)(1-2a)} = \varepsilon_4 a, \end{aligned}$$

ou

$$(53)\qquad (1-a)(1-5a^2)\cos\theta = -a[a(1-3a)+\varepsilon_4(1+a)(1-2a)].$$

Si $\varepsilon_4 = 1$, (53) donne $\cos\theta = \dfrac{-a}{1-a} = \cos\alpha'_1$, donc $\sin\theta = \varepsilon''\sin\alpha'_1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Il reste à exprimer que $U_6U_8 = -a$, soit

$$(54)\quad U_6U_8 \equiv \sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\,[\cos\gamma_1\cos\beta'_1 - \sin\gamma_1\sin\beta'_1(\cos\beta_4\cos\alpha'_1 + \varepsilon\varepsilon''\sin\beta_4\sin\alpha'_1)]$$
$$\equiv \frac{a^2(1-3a)}{(1+a)(1-2a)} + \frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)}$$
$$\times\left[\frac{a^2}{1-5a^2} - \frac{\varepsilon\varepsilon''(1-2a)\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}}{(1-a)(1-5a^2)}\right] = -a;$$

grâce à (24), ceci se réduit à

$$(55)\qquad \frac{2a^2}{1+a} - \frac{\varepsilon\varepsilon''\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}}{1+a} \equiv \frac{2a^2}{1+a} - \varepsilon''\frac{a(1-a)}{1+a} = -a,$$

qui est incompatible avec $\varphi(a) = 0$, $\varepsilon'' = \pm 1$.

Avec $\varepsilon_4 = -1$, (53) donne $\cos\theta = \dfrac{a(1-a)}{1-5a^2} = \cos\beta_4$, donc $\sin\theta = \varepsilon''\sin\beta_4$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Mais alors l'équation

$$U_5U_8 \equiv \sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\,[\cos\gamma_1\cos\beta'_1 - \sin\gamma_1\sin\beta'_1(\cos\beta_4\cos\alpha'_1 + \varepsilon''\sin\beta_4\sin\alpha'_1)] = \varepsilon_5 a$$

n'est rien d'autre que (54) où ε'' est remplacé par $\varepsilon\varepsilon''$ et le dernier membre par $\varepsilon_5 a$. (55) est donc remplacé par

$$\frac{2a}{1+a} - \varepsilon\varepsilon''\frac{1-a}{1+a} = \varepsilon_5,$$

qui est satisfait par $\varepsilon_5 = 1$, $\varepsilon'' = -\varepsilon$. U_6U_8 est alors égal à $-a$, comme il est demandé. Il vient ensuite

$$-U_7U_8 = \sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\,[\cos\gamma_1\cos\beta'_1 + \sin\gamma_1\sin\beta'_1(\cos\beta_3\cos\beta_4 + \varepsilon\varepsilon'\sin\beta_3\sin\beta_4)]$$
$$= \frac{a^2(1-3a)}{(1+a)(1-2a)} + \frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)}(\cos\beta_3\cos\beta_4 + \varepsilon\varepsilon'\sin\beta_3\sin\beta_4),$$

où, grâce à (24) et (40),

$$\varepsilon\varepsilon'\sin\beta_3\sin\beta_4 = \frac{1-2a}{(1-5a^2)^2}\,\varepsilon\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}\,\varepsilon'\sqrt{(1+a)(1+a-8a^2)}$$
$$= \frac{a^2(1-a^2)(1-2a)}{(1-5a^2)^2},$$

donc

$$-U_7U_8 = \frac{a^2(1-3a)}{(1+a)(1-2a)} + \frac{a^2(1-3a)(1-a)^2}{(1+a)(1-2a)(1-5a^2)} + \frac{a^2(1-a)^2}{1-5a^2}$$
$$= \frac{2a^2(1-3a)}{1-5a^2} + \frac{a^2(1-a)^2}{1-5a^2} = \frac{a^2(3-8a+a^2)}{1-5a^2}.$$

Compte tenu de $\varphi(a)=0$, $U_7U_8=\varepsilon_7 a$ s'écrit alors

$$\frac{a(3-8a+a^2)}{1-5a^2}\equiv\frac{1+4a-17a^2}{1-5a^2}=-\varepsilon_7,$$

qui est impossible avec $\varphi(a)=0$, $\varepsilon_7=\pm 1$.

β_2. $\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_6=-1$. — On déduit aisément de $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=\varepsilon_3=-1$ que U_8 est de la forme

$$U_8=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha'_1+\sin\alpha'_1[\omega_3\cos\alpha'_2+\sin\alpha'_2(\omega_4\cos\theta+\omega_5\sin\theta)]\}.$$

$\cos\theta$ est déterminé par

$$(56)\qquad U_4U_8\equiv-\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1(\cos\gamma_1\cos\alpha'_2+\sin\gamma_1\sin\alpha'_2\cos\theta)$$
$$\equiv\frac{a^2}{1-2a}-\frac{\sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}}{1-2a}\cos\theta=\varepsilon_4 a,$$

donc

$$(57)\qquad \sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}\cos\theta=a[a-\varepsilon_4(1-2a)].$$

Avec $\varepsilon_4=1$, ceci donne [39]

$$\cos\theta=\frac{-a(1-3a)}{\sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}}=\cos\gamma'_3,$$

donc $\sin\theta=\pm\sin\gamma'_3$. Il vient alors

$$(58)\qquad -U_5U_8\equiv\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1[-\cos\gamma_1\cos\alpha'_2+\sin\gamma_1\sin\alpha'_2(\cos\alpha'_1\cos\theta+\sin\alpha'_1\sin\theta)]$$
$$\equiv\frac{a^2}{1-2a}+\frac{a^2(1-3a)}{(1-a)(1-2a)}\pm\frac{\sqrt{(1-3a)(1+a-4a^2)}}{1-a}=-\varepsilon_5 a,$$

ou enfin

$$=\sqrt{(1-3a)(1+a-4a^2)}=a[2a+\varepsilon_5(1-a)].$$

Grâce à $\varphi(a)=0$, la quantité sous le radical s'écrit successivement

$$1-2a-7a^2+12a^3=a(-3+2a+13a^2)=a^2(5-14a-3a^2).$$

L'élévation au carré donne alors

$$5-14a-3a^2=1-2a+5a^2+4\varepsilon_5 a(1-a),$$

soit

$$1-(3+\varepsilon_5)a-(2-\varepsilon_5)a^2=0,$$

qui est incompatible avec $\varphi(a)=0$, $\varepsilon_5=\pm 1$.

Avec $\varepsilon_4=-1$, (57) donne

$$\cos\theta=\frac{a(1-a)}{\sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}}=-\cos\gamma'_2,$$

---

[39] Cette expression précise la détermination de $\cos\gamma'_3$. Mais on peut toujours se reporter à (56) pour remplacer correctement $\cos\theta$ par sa valeur dans les calculs qui suivent.

donc $\sin\theta = \pm \sin\gamma'_2$. (58) est remplacé par

$$-U_5U_8 \equiv \pm \frac{\sqrt{(1-a)(1-a-8a^2)}}{1-a} = -\varepsilon_5 a,$$

que l'élévation au carré transforme en la condition $1-9a-a^2+a^3 \equiv \varphi(-a) = 0$, et non $\varphi(a) = 0$. On ne peut associer aucun S_8 à S_7^{27}.

71. Les seuls S_8 isogonaux de l'espace sont semblables aux quatre types du tableau suivant :

Système.	Valeurs de a.	Formules représentatives.	Nature.
(23; 45; 61; 78).....	$a = \frac{1}{3}$	(31) et (43)	impur
(23, 34, 45, 56, 67, 72; 82, 83, 85, 86).....	$a = \frac{1}{3}$	(33) et (46)	impurs
	$a = -\frac{1}{3}$	(33′) et (48)	
(23, 34, 45, 57, 72; 76, 68; 83, 84).....	$a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$	(26), (38) et (51) pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$	réels

Il est inutile de rechercher des S_9 isogonaux dans E_3, puisque le prolongement des S_7 n'a jamais pu être effectué qu'à l'aide d'une sphère unique.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-SEIZIÈME

Pages.

Structure des groupes libres, par M^lle *Sophie Piccard* 1

Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires, par M. *Paul Lévy* (dédiée à la mémoire d'Aurel Wintner) 59

Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach, par M. *Y. Katznelson*.. 83

Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique, par *W. Pogorzelski* 125

Sur la détermination d'une fonction par les valeurs prises sur un certain ensemble, par MM. *Nicu Boboc* et *Solomon Marcus*..... 151

Sur les anneaux premiers nœthériens à gauche, par MM. *L. Lesieur* et *R. Croisot*... 161

Aspects mathématiques de la théorie unitaire du champ d'Einstein, par M^me *F. Maurer-Tison*..... 185

Éléments exceptionnels des fonctions analytiques, par M. *Paul Montel*..... 271

Un théorème sur les corps convexes, par M. *André Marchaud*..... 283

Sur les systèmes isogonaux de sphères, par M. *René Lagrange*..... 305

TABLE DES MATIÈRES..... 401

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, 55

155170-59

Imprimé en France

CENTRE D'ÉTUDES MATHÉMATIQUES EN VUE DES APPLICATIONS

(Institut Henri POINCARÉ)

I. - MONOGRAPHIES

A. Applications des théories Mathématiques :

FORTET (R.). — *Éléments de calcul des Probabilités*..... 1 200 F

PETIAU (G.). — *La théorie des Fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la Physique mathématique* (relié plein pellior rouge)..... 2 500 F

DUMAS (M.). — *Les Épreuves sur échantillon* (relié plein pellior rouge)..... 1 000 F

C. Physique Mathématique :

DESTOUCHES (J.-L.). — *Principes de la Mécanique classique*..... 350 F

VOGEL (Th.). — *Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la Physique Mathématique*..... 1 200 F

II. - LE FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES A L'USAGE DES PHYSICIENS ET DES INGÉNIEURS

rédigé par les membres du Centre d'Études Mathématiques en vue des applications

(*Sous la direction de* M. le Professeur FRÉCHET)

Fascicule VII. — *Équations aux dérivées partielles*..... 800 F

Fascicule IX. — *Fonctions de la Physique mathématique*..... 800 F

Fascicule XII. — *Calcul des probabilités*..... 600 F

Le Formulaire de Mathématiques comprendra 13 fascicules.

III. - COLLOQUES INTERNATIONAUX

Derniers parus :

LXIII. *Les botanistes français en Amérique du Nord avant 1850* ..... 2 400 F

LXIX. *Chimie et Biochimie des Hétérocycles oxygénés*..... 2 500 F

LXVII. *Microphysiologie comparée des éléments excitables*..... 2 500 F

NOTA : *Le Catalogue général* — dont ce qui précède est un extrait — est envoyé sur demande.

Renseignements et Vente au

SERVICE DES PUBLICATIONS DU *C. N. R. S.*

(3e Bureau)

13, Quai Anatole-France - PARIS (VIIe) — C. C. P. Paris 9061-11 — Téléphone : INV 45-95

SOMMAIRE

FASCICULE N° 4

	Pages.
Un théorème sur les corps convexes, par M. *André Marchaud*	283
Sur les systèmes isogonaux de sphères, par M. *René Lagrange*	305
TABLE DES MATIÈRES	401

TARIF D'ABONNEMENT D'UN AN POUR 1960

AUX

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Paris	7 000 F	70 NF
Départements et Union Française	7 500 F	75 NF
Étranger		$ 23,47

(ou valeur correspondante en francs)

GAUTHIER-VILLARS, Éditeur-Imprimeur-Libraire, 55, q. des Grands-Augustins, PARIS (6e)

DŒTSCH (Gustav). — Indroduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace. Traduit de l'Allemand par Maurice PARODI, avec un appendice Tables de correspondances par R. HERSCHEL. In-8 (16-25) VIII-198 pages; 1959 ..... 3 500 F 35 NF

KOGBETLIANTZ (Ervand G.). — Voies naturelles et bases des mathématiques. Initiation nouvelle (examens et concours, licence et propédeutique). Préface de M. Georges BOULIGAND. In-8 (16-25) XVI-576 pages; 1959 ..... 3 900 F 39 NF

SCHNEIDER (Dr. Théodor). — Introduction aux nombres transcendants. Traduit de l'Allemand par Pierre EYMARD. In-8 (16-25) VIII-151 pages; 1959 ..... 3 500 F 35 NF

La reproduction par tous procédés est interdite.

L'Imprimerie Gauthier-Villars se réserve le droit de fournir les microfilms des volumes épuisés.

155170-59 Dépôt légal. — 1959. — Numéro d'ordre 1343. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Dépôt légal. — 1959. — Numéro d'ordre 831. — *Gauthier-Villars*, éditeur, Paris.

Imprimé en France

La Gérante : P. GAUTHIER-VILLARS